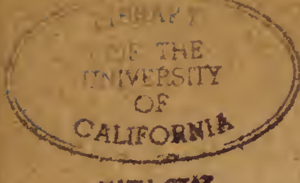
J. A. SERRET
G. SCHEFFERS

LEHRBUCH DER DIFFERENTIAL- U. INTEGRAL-RECHNUNG

I

VIERTE U. FÜNFTE AUFLAGE





P. P.

Meinen umfangreichen Verlag auf dem Gebiete der **Mathematik**, der **Technischen- und Natur-Wissenschaften** nach allen Richtungen hin weiter auszubauen, ist mein stetes durch das Vertrauen und Wohlwollen zahlreicher hervorragender Vertreter dieser Gebiete von Erfolg begleitetes Bemühen, wie mein Verlagskatalog zeigt, und ich hoffe, daß bei gleicher Unterstützung seitens der Gelehrten und Schulmänner des In- und Auslandes auch meine weiteren Unternehmungen Lehrenden und Lernenden in Wissenschaft und Schule jederzeit förderlich sein werden. **Verlagsanerbieten** gediegener Arbeiten auf einschlägigem Gebiete werden mir deshalb, wenn auch schon gleiche oder ähnliche Werke über denselben Gegenstand in meinem Verlage erschienen sind, stets sehr willkommen sein.

Unter meinen zahlreichen Unternehmungen mache ich ganz besonders auf die von den Akademien der Wissenschaften zu Göttingen, Leipzig, München und Wien herausgegebene **Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften** aufmerksam, die in 7 Bänden die Arithmetik und Algebra, die Analysis, die Geometrie, die Mechanik, die Physik, die Geodäsie und Geophysik und die Astronomie behandelt und in einem Schlußband Geschichte, Philosophie und Didaktik besprechen wird. Eine **französische Ausgabe**, von französischen Mathematikern besorgt, hat zu erscheinen begonnen.

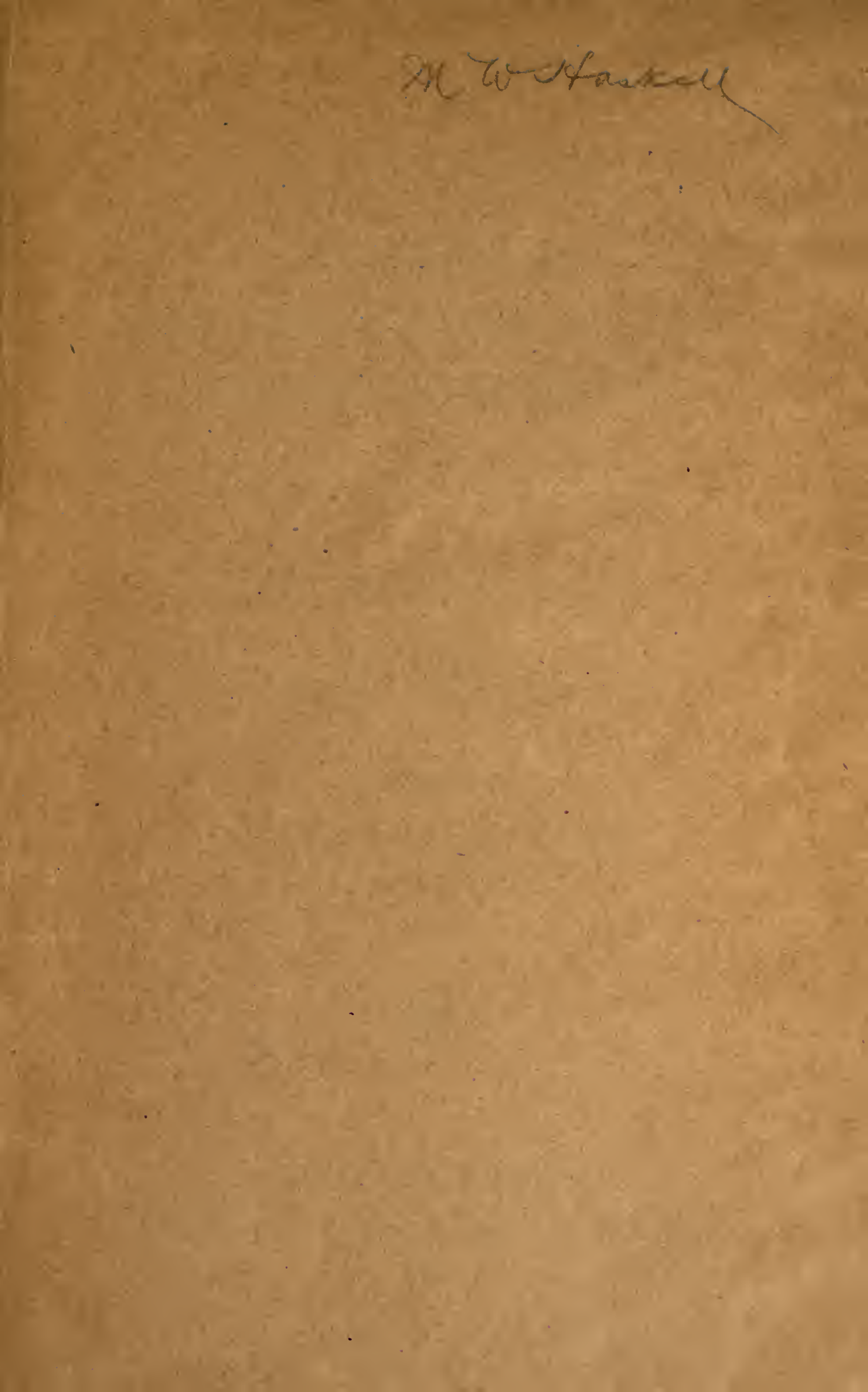
Weitester Verbreitung erfreuen sich die mathematischen und naturwissenschaftlichen Zeitschriften meines Verlags, als da sind: Die **Mathematischen Annalen**, die **Bibliotheca Mathematica** (Zeitschrift für Geschichte der Mathematischen Wissenschaften), das **Archiv der Mathematik und Physik**, die **Jahresberichte der Deutschen Mathematiker-Vereinigung**, die **Zeitschrift für Mathematik und Physik** (Organ für angewandte Mathematik), die **Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht**, die **Mathematisch-naturwissenschaftlichen Blätter**, ferner **Natur und Schule** (Zeitschrift für den gesamten naturkundlichen Unterricht aller Schulen), die **Geographische Zeitschrift** u. a.

Seit 1868 veröffentliche ich: **„Mitteilungen der Verlagsbuchhandlung B. G. Teubner“**. Diese jährlich zweimal erscheinenden „Mitteilungen“, die in 30000 Exemplaren im In- und Auslande von mir verbreitet werden, sollen das Publikum, das meinem Verlage Aufmerksamkeit schenkt, von den erschienenen, unter der Presse befindlichen und von den vorbereiteten Unternehmungen des Teubnerschen Verlags durch ausführliche Selbstanzeigen der Verfasser in Kenntnis setzen. **Die Mitteilungen werden jedem Interessenten auf Wunsch regelmäßig bei Erscheinen umsonst und postfrei von mir übersandt.** Das **ausführliche „Verzeichnis des Verlags von B. G. Teubner auf dem Gebiete der Mathematik, der Technischen- und Natur-Wissenschaften nebst Grenzgebieten“** (100. Ausgabe. [XLVIII u. 272 S.] gr. 8. 1904. vergriffen) erscheint im Frühjahr 1908 in neuer Auflage mit eingehender alphabetischer und systematischer Bibliographie und einem Gedenktagebuch für Mathematiker. Wünsche um Zusendung, die kostenfrei erfolgt, nehme ich jederzeit gern entgegen.

Leipzig, Poststraße 3.

B. G. Teubner.

M V. s. 150 : 807


M W Haskell



J. A. SERRET

LEHRBUCH DER DIFFERENTIAL- UND INTEGRALRECHNUNG

NACH AXEL HARNACKS ÜBERSETZUNG

VIERTE UND FÜNFTE AUFLAGE

BEARBEITET VON

GEORG SCHEFFERS

ERSTER BAND

DIFFERENTIALRECHNUNG

MIT 70 FIGUREN IM TEXT



LEIPZIG UND BERLIN
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER
1908

Aus dem Vorworte zur dritten Auflage.

Vom Jahre 1884 an erschien zum ersten Male *Axel Harnacks* deutsche Bearbeitung von *Joseph Alfred Serrets* „Cours de calcul différentiel et intégral“.

Als eine neue Auflage des vielbegehrten Werkes nötig wurde, übernahm nach *Harnacks* Tode Herr *Georg Bohlmann* ihre Besorgung.

Nachdem der 1897 erschienene erste Band der zweiten Auflage vergriffen war, habe ich mich, der Aufforderung des Herrn Verlegers folgend, bereit erklärt, die Neubearbeitung des ganzen dreibändigen Werkes zu übernehmen. Bei dem Erscheinen des ersten Bandes in dritter Auflage habe ich Rechenschaft abzulegen über die Änderungen, die mir darin nötig erschienen:

Es war nötig, fast den ganzen Text neu zu schreiben, so daß man vielleicht jetzt beim Lesen des Buches nicht mehr empfindet, daß es ursprünglich eine Übersetzung war, und nicht mehr heraushört, was von *Harnack* und was von *Bohlmann* eingeschaltet worden ist. Die Figuren waren in der ersten Auflage minderwertig, und in der zweiten wurden ebensolche hinzugefügt. Daher habe ich alle Abbildungen durch neue ersetzt. Ferner habe ich die Lehrsätze besonders formuliert, so daß klarer hervortritt, was bewiesen wird. Die Zahl der Rückverweisungen ist stark vermehrt. Dagegen wurden die in der zweiten Auflage am Schlusse hinzufügten literarischen Hinweise unterdrückt, da sie meines Erachtens jemanden, der an das Studium dieses dickleibigen Bandes herantritt, nur entmutigen können.

In Kürze seien die wichtigeren *sachlichen* Änderungen erwähnt: Vor allem mußten manche Beweise exakter werden. Deshalb wird am Anfange eine allerdings recht knappe Darstellung der Entwicklung des Zahlbegriffes gegeben. Nur so wurde es z. B. möglich, für die Sätze über stetige Funktionen und für das Merkmal der Konvergenz unendlicher Reihen exakte Beweise zu geben. Die auf unentwickelte Funktionen

bezüglichen Betrachtungen wurden für sich in einem Kapitel zusammengefaßt, weil sie auf viel mehr funktionentheoretischen Voraussetzungen beruhen als die über entwickelte Funktionen. Dabei war es geboten, den Begriff der Unabhängigkeit von Funktionen und Gleichungen und die Funktionaldeterminante einzuführen. Die Schwierigkeiten in der Theorie der Maxima und Minima von Funktionen mehrerer Veränderlicher wurden etwas schärfer beleuchtet. Besonders viele Änderungen erheischten diejenigen Kapitel, die Anwendungen der Differentialrechnung auf die Geometrie enthalten. Vor allem ließ die bisherige Bearbeitung fast durchaus die exakte Bestimmung der Vorzeichen der auftretenden Quadratwurzeln vermissen, die ja unumgänglich nötig ist, sobald man sich, wie es *Serret* tut, durchaus auf reelle Gebilde beschränkt. Hierin wurde gründlich Wandel geschaffen. Bemerkungen über das Rechnen mit Polarkoordinaten und über die Scheitel von ebenen Kurven sind neu aufgenommen. Plan- und Filarevoluten und -evolventen werden deutlich gekennzeichnet und genauer behandelt. Die Begriffe: Tangentenfläche und abwickelbare Fläche werden nicht mehr ohne Beweis als identisch aufgefaßt. Bei der Theorie der Indikatrizen eines Flächenpunktes wurde auf die ursprüngliche Konzeption *Dupins* zurückgegangen. Das Kapitel über elementare Funktionen von komplexen Veränderlichen ist gänzlich neu bearbeitet. Ich ging dabei von der Auffassung aus, nur soviel zu bringen, als für die Integralrechnung in der Fortsetzung des Werkes nötig ist.

Besondere Sorgfalt habe ich darauf gelegt, solchen Aussagen, die phrasenhaft erscheinen oder unklar sein könnten, bestimmtere Gestalt zu geben und mit voller Aufrichtigkeit da, wo es nötig war, auf etwaige schwache Grundlagen der Betrachtungen hinzuweisen.

Alles in allem bestand meine bescheidene Aufgabe nur darin, guten alten Wein in neue Schläuche zu füllen, wobei allerdings gelegentlich ein kleiner Zuschuß zur Ergänzung nötig war.

In aufopfernder Weise hat mich Herr Oberlehrer Professor Dr. *Jakob Kraus* in Darmstadt beim Lesen der ersten und mein Kollege Herr Geh. Hofrat Prof. Dr. *Friedrich Dingeldey* beim Lesen der zweiten Korrekturen unterstützt. Ihnen verdankt das Buch mancherlei Verbesserungen in Einzelheiten.

Darmstadt, im Juni 1906.

Vorwort zur vierten und fünften Auflage.

In der kurzen Zeit seit dem Erscheinen der neuen Bearbeitung dieses Bandes sind mir keine Rezensionen, die hätten verwertet werden können, *rechtzeitig* zu Gesicht gekommen. Wohl aber hatte ich die Freude, von mehreren Seiten briefliche Mitteilungen mit dankenswerten Korrekturen zu erhalten, insbesondere von Herrn Prof. Dr. *F. Hočevar* in Graz, Herren *W. Flügel* in Berlin, *P. Lehmann* in Feldkirch und *F. Rauschen* in Düren. Mit ganz besonderem Danke aber muß ich anerkennen, daß mein verehrter Freund, Herr Geh. Hofrat Prof. Dr. *F. Dingeldey* in Darmstadt den ganzen Band vor dem Neudrucke einer Durchsicht unterzogen und mir dabei sehr viele Verbesserungen angegeben hat.

Ein Bedürfnis zu einschneidenden Änderungen hatte sich bisher nicht herausgestellt; es handelte sich vielmehr nur um Korrekturen im einzelnen. Eine Anzahl von Ungenauigkeiten konnte ausgemerzt werden; außerdem wurde die Gelegenheit wahrgenommen, den sprachlichen Ausdruck durch zahllose kleine Änderungen zu verbessern.

Dabei ist an der Einteilung in Artikel und an der Numerierung der Sätze nichts geändert worden. *Infolgedessen gelten die Rückverweisungen, die der im vorigen Jahre erschienene zweite Band (Integralrechnung) enthält, auch für diese neue Auflage.*

Auf die Anfragen wegen des Erscheinens des *dritten* Bandes kann ich bei dieser Gelegenheit antworten, daß er gegenwärtig gedruckt wird.

Steglitz, im Juni 1908.

Georg Scheffers.

Inhalt.*)

Erstes Kapitel.

Zweites Kapitel.

*) Ein alphabetisch geordnetes Sachregister befindet sich am Schlusse des Bandes.

Drittes Kapitel.

Viertes Kapitel.

Fünftes Kapitel.

Sechstes Kapitel.

Siebentes Kapitel.

Seite

Theorie der ebenen Kurven. 282

Achtes Kapitel.

Anwendungen der Theorie der ebenen Kurven. 369

Neuntes Kapitel.

Zehntes Kapitel.

Elftes Kapitel.

Zwölftes Kapitel.

Erstes Kapitel.

Einleitende Begriffe.

---

§ 1. Von den Zahlen.

1. Der Bereich der rationalen Zahlen. Die Arithmetik geht von der natürlichen Zahlenreihe 1, 2, 3, ... aus, also von den *ganzen positiven Zahlen.* Sie stehen in einer Rangordnung: jede weiter rechts stehende heißt größer als ($>$) eine weiter links stehende. *Addition* und *Multiplikation* führen in diesem Bereiche stets wieder zu ganzen positiven Zahlen. Dabei gehorchen sie drei *formalen Gesetzen,* dem der

Kommutation:

$$a + b = b + a \quad \text{und} \quad a \cdot b = b \cdot a,$$

Assoziation:

$$(a + b) + c = a + (b + c) \quad \text{und} \quad (a \cdot b)c = a(b \cdot c),$$

Distribution:

$$(a + b)c = a \cdot c + b \cdot c.$$

Die *inversen* Operationen, nämlich *Subtraktion* und *Division,* sind jedoch in diesem Bereiche nicht stets ausführbar. Deshalb wird das Zahlengebiet erweitert. Man befolgt dabei den *Grundsatz von der Erhaltung der formalen Gesetze,* richtet es nämlich so ein, daß auch im erweiterten Bereiche jene drei Gesetze gelten. Die Forderung der Ausführbarkeit der Subtraktion führt zur *Null* und zu den *negativen ganzen Zahlen.* Alle ganzen Zahlen ... -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ... stehen wieder in einer Rangordnung; jede weiter rechts stehende heißt größer als jede weiter links stehende. Die Forderung der Ausführbarkeit der Division führt noch zur Hinzunahme

aller *gebrochenen Zahlen.* Das so gewonnene Gebiet heißt der *Bereich aller rationalen Zahlen.* In ihm gelten die obigen drei Gesetze immer noch. Alle rationalen Zahlen stehen in einer Rangordnung. Sind nämlich a/b und c/d zwei rationale Zahlen, so dürfen a, b, c, d als ganze Zahlen und insbesondere die Nenner b und d als positive Zahlen vorausgesetzt werden; alsdann heißt $a/b > c/d$, wenn $ad > bc$ ist. Für alle rationalen Zahlen gelten nun die Gesetze:

Ist $p > q$ und $q > r$, so ist auch $p > r$.

Ist $p > q$, so ist auch $p \pm r > q \pm qr$.

Ist $p > q$ und $r > 0$, so ist auch $pr > qr$.

Ist $p > q$, aber $r < 0$, so ist jedoch $pr < qr$.

Null und *Eins* heißen *Modul* der Addition bzw. Multiplikation, da ihnen die Eigenschaften zukommen, daß für *jede* rationale Zahl p

$$p + 0 = 0 + p = p, \quad p \cdot 1 = 1 \cdot p = p$$

ist. Das Produkt der beiden Moduln ist gleich Null, d. h. gleich dem Modul der Addition. Die *Null* spielt daher eine besondere Rolle im Gebiete der Multiplikation; für jede rationale Zahl p ist:

$$p \cdot 0 = 0 \cdot p = 0.$$

Daraus folgt: *Die Division durch Null ist unbestimmt und muß daher vermieden werden.*

Jede rationale Zahl, die keine ganze Zahl ist, liegt zwischen zwei ganzen Zahlen a und $a + 1$ und ist also in der Form $a + b/c$ darstellbar, wo b/c ein *positiver echter Bruch* und $1/c$ ein *Stammbruch* heißt. Jeder Stammbruch $1/c$ läßt sich vermöge fortgesetzter Division von 10, 100, 1000 usw. mit c in einen *Dezimalbruch* verwandeln; da die *Reste* bei den Divisionen zwischen 0 und c liegen, so kehrt nach mindestens c Operationen der alte Rest wieder, oder aber die Division geht nach mindestens c Operationen auf. *Die rationalen Zahlen überhaupt sind mithin durch Dezimalbrüche darstellbar und zwar entweder durch endlose, aber periodische oder durch endliche Dezimalbrüche.* In der Arithmetik wird gezeigt, daß umgekehrt jeder solche Dezimalbruch in der Form $a + b/c$ darstellbar ist, wo a ganzzahlig und b/c ein positiver echter Bruch ist.

Da man die Differenz zwischen zwei rationalen Zahlen in beliebig viele gleiche Teile teilen kann, so folgt: Zwischen zwei rationalen Zahlen liegen, wie wenig auch ihre Differenz von Null abweichen mag, stets noch unzählig viele rationale Zahlen. Dies meint man, wenn man kurz sagt: *Der Bereich der rationalen Zahlen ist überall dicht.*

2. Der Bereich der reellen Zahlen. Kann man alle rationalen Zahlen in zwei Klassen derart teilen, daß jede Zahl der ersten Klasse kleiner als jede Zahl der zweiten Klasse ist so sind drei Fälle denkbar: *Entweder* gibt es eine größte Zahl der ersten Klasse oder *zweitens* eine kleinste Zahl der zweiten Klasse oder *drittens* weder das eine noch das andere. Der *erste* Fall liegt z. B. vor, wenn wir zur ersten Klasse alle rationalen Zahlen kleiner oder gleich 2,5 rechnen. Alsdann enthält die zweite Klasse alle rationalen Zahlen größer als 2,5. Es gibt hier keine kleinste Zahl der zweiten Klasse, denn zwischen 2,5 und jeder größeren rationalen Zahl liegen ja noch unzählig viele rationale Zahlen. Der *zweite* Fall dagegen liegt vor, wenn wir zur ersten Klasse alle rationalen Zahlen kleiner als 2,5 und zur zweiten alle rationalen Zahlen größer oder gleich 2,5 rechnen. In beiden Beispielen sagen wir, daß die rationale Zahl 2,5 die *Grenze* zwischen den beiden Klassen sei.

Es kann aber, wie gesagt, *drittens* vorkommen, daß es keine rationale Zahl derart gibt, daß alle Zahlen der einen Klasse größer oder kleiner als diese Zahl sind. In diesem Falle sagt man, daß die *Grenze* zwischen beiden Klassen eine *irrationale* Zahl sei, die *größer* als alle Zahlen der ersten und *kleiner* als alle Zahlen der zweiten Klasse heißt. Zwei irrationale Zahlen heißen *gleich*, wenn durch sie alle rationalen Zahlen in dieselben beiden Klassen geteilt werden. Von zwei irrationalen Zahlen heißt eine *größer* als die andere, wenn es rationale Zahlen gibt, die kleiner als die eine und größer als die andere sind. Alle rationalen und irrationalen Zahlen stehen also wieder in einer Rangordnung. Ihre Gesamtheit heißt der *Bereich aller reellen Zahlen.*

Jede irrationale Zahl liegt zwischen solchen rationalen Zahlen, deren Differenz beliebig wenig von Null verschieden gemacht werden kann. Eine reelle Zahl überhaupt ist voll-

ständig definiert, sobald zwei endlose Folgen von rationalen Zahlen $p_1, p_2, p_3, \ldots$ und $q_1, q_2, q_3, \ldots$ irgendwie, aber so definiert sind, daß *erstens* die p der Reihe nach immer größer werden ($p_{n+1} > p_n$), *zweitens* die q der Reihe nach immer kleiner werden ($q_{n+1} < q_n$), *drittens* jedes p kleiner als jedes q ist und *viertens* die (stets positive) Differenz $q_n - p_n$ dadurch, daß man den Index n hinreichend groß wählt, kleiner als eine beliebig klein gewählte positive rationale Zahl σ gemacht werden kann. Denn unter diesen Voraussetzungen ist, wie man zeigen könnte, eine jede beliebig gegebene rationale Zahl entweder größer als alle p oder kleiner als alle q, so daß alle rationalen Zahlen in der Tat in zwei Klassen geteilt sind. Diese Art der Definition liegt z. B. vor, wenn eine irrationale Zahl durch einen endlosen und nicht periodischen Dezimalbruch definiert wird. Wenn z. B. $\sqrt{2}$ berechnet werden soll, so gibt es eine Vorschrift, nach der man den Dezimalbruch 1,414 ... Ziffer für Ziffer berechnen kann. Wird er nun nach der n^{ten} Dezimalstelle abgebrochen, so entsteht eine rationale Zahl p_n. Wird in ihr die letzte Dezimale um eine Einheit erhöht, so entsteht eine größere rationale Zahl q_n. Dabei ist $q_n - p_n = 1 : 10^n$. Augenscheinlich nimmt hier die Reihe aller p_n zu, die aller q_n ab; außerdem ist jede Zahl p kleiner als jede Zahl q, und, wenn man eine beliebig kleine positive rationale Zahl σ gewählt hat, so kann man n so groß annehmen, daß $1 : 10^n$ und mithin auch $q_n - p_n$ kleiner als σ wird.

Man hat die Rechenregeln mit Hilfe des Grundsatzes von der Erhaltung der formalen Gesetze auf den Bereich aller reellen Zahlen so übertragen, daß auch hier alle in Nr. 1 aufgestellten Gesetze gelten. Da schon der Bereich aller rationalen Zahlen überall dicht ist, so ist um so mehr *der Bereich aller reellen Zahlen überall dicht.*

Über den Bereich aller reellen Zahlen soll bis auf weiteres nicht hinausgegangen werden. Vielmehr verstehen wir in der Folge, solange nicht ausdrücklich eine andere Festsetzung getroffen wird, unter *Zahl* oder *Größe* schlechtweg immer eine reelle Zahl.

3. Darstellung der reellen Zahlen durch Strecken auf einer Geraden. Auf einer etwa wagerechten Geraden g

werden zwei Punkte, der *Nullpunkt* O und der *Einheitspunkt* E, irgendwo festgesetzt, der Einheitspunkt etwa, um etwas Bestimmtes vor Augen zu haben, rechts vom Nullpunkte. Die Strecke OE soll die *Strecke Eins* heißen. Durch ihre Vervielfältigung über E hinaus erhält man eine Reihe von Endpunkten. Die Strecken von O bis zu ihnen heißen die Strecken 2, 3, 4 usw. Durch beständiges Abtragen von OE über O hinaus nach der anderen (linken) Seite entstehen ebenso die Strecken -1, -2, -3 usw. Da jede rationale Zahl nach Nr. 1 in der Form $a + b/c$ darstellbar ist, so können wir jede solche Zahl ebenfalls als Strecke abbilden, indem wir den Unterschied der Strecken a und $a+1$ in c gleiche Teile teilen und den b^{ten} Teilpunkt als Endpunkt wählen. *Jede rationale Zahl wird somit durch eine in O beginnende und positiv oder negativ, d. h. nach rechts oder links, gerichtete Strecke dargestellt.*

Man kann auch sagen, und das ist oft eine bequemere Ausdrucksweise, daß jede rationale Zahl durch einen *Punkt* auf der Geraden dargestellt wird, nämlich durch den Endpunkt der zugehörigen Strecke. Der Rangordnung der rationalen Zahlen entspricht die Anordnung dieser Punkte auf der Geraden im Sinne der Richtung von O nach E. *Die Bildpunkte liegen überall dicht.*

Trotzdem enthält die Gerade g noch unzählig viele Punkte, die nicht Bildpunkte von rationalen Zahlen sind. Wenn man z. B. in einer Ebene durch g das Quadrat über OE errichtet und seine Diagonale von O an über E hinaus auf g abträgt, so ist der Endpunkt D *kein* Bildpunkt einer rationalen Zahl, weil $\sqrt{2}$ keine rationale Zahl ist, wie man beweisen kann. Wenn man nun in D noch beliebige rationale Vielfache der Strecke Eins anträgt, so kommt man daher zu unzählig vielen Punkten, die nicht Bildpunkte von rationalen Zahlen sind. Es folgt, daß um so mehr *alle* diejenigen Punkte der Geraden, die nicht Bildpunkte von rationalen Zahlen sind, überall dicht liegen. Solche Stellen können wir als Bildpunkte von irrationalen Zahlen definieren. Wenn nämlich eine irrationale Zahl wie in Nr. 2 durch die beiden endlosen Folgen $p_1 < p_2 < p_3$ usw. und $q_1 > q_2 > q_3$ usw. von rationalen Zahlen gegeben ist, so gehören zu beiden Folgen zwei endlose Folgen von Bildpunkten.

[3

Die Bildpunkte der ersten Art liegen sämtlich links von denen der zweiten Art und die von p_n und q_n liegen, wenn man n hinreichend groß wählt, so nahe beieinander, daß ihr *Intervall* $q_n - p_n$ kleiner als eine beliebig kleine gegebene Strecke σ wird. Nach dem *Axiome von der Stetigkeit der geraden Linie* gibt es mindestens einen Punkt auf der Geraden, der rechts von den Bildpunkten aller p_n und links von den Bildpunkten aller q_n liegt. Es kann nicht mehr als einen geben. Denn man kann ja das den Punkt einschließende Intervall $q_n - p_n$ kleiner machen als das Intervall zwischen zwei noch so nahe beieinander liegenden Punkten. Der also einzig vorhandene Punkt, der rechts von den Bildpunkten aller p_n und links von denen aller q_n liegt, heißt der Bildpunkt der ins Auge gefaßten irrationalen Zahl. Oder auch: Die Strecke von O bis zu diesem Punkte heißt das Bild der irrationalen Zahl.

Wählen wir umgekehrt irgend einen Punkt P auf g, der kein Bildpunkt einer rationalen Zahl ist, so gibt es zwei ganze Zahlen a und $a+1$, deren Bildpunkte den Punkt P einschließen. Wir teilen das Intervall zwischen ihnen in zehn gleiche Teile. In einem der Teilintervalle muß P liegen, etwa in dem $(b+1)^{\text{ten}}$. Dann teilen wir dies wieder in zehn gleiche Teile; es liege P jetzt im $(c+1)^{\text{ten}}$ dieser noch kleineren Intervalle. Fahren wir so fort, so ergeben sich Schritt für Schritt die Ziffern $a, b, c, \ldots$ eines endlosen Dezimalbruches

$$a + \frac{b}{10} + \frac{c}{100} + \cdots,$$

der eine irrationale Zahl vorstellt und zwar diejenige, deren Bildpunkt P ist.

Die Gesamtheit aller reellen Zahlen und die Gesamtheit aller von einem Nullpunkte O einer Geraden g ausgehenden Strecken auf der Geraden lassen sich daher so aufeinander beziehen, daß jeder reellen Zahl eine Strecke und jeder Strecke eine reelle Zahl entspricht. Der Rangordnung der reellen Zahlen entspricht dabei die Anordnung der Endpunkte der Strecken.

Hiermit ist für alle reellen Zahlen ein *Maßstab* hergestellt, dessen *Längeneinheit* die Strecke OE ist.

4. Der absolute Betrag. Die reellen Zahlen, abgesehen von der Null, sind positiv oder negativ. Unter dem *absoluten*

Betrage einer positiven Zahl versteht man die Zahl selbst, unter dem absoluten Betrage einer negativen Zahl dieselbe Zahl, aber versehen mit dem Pluszeichen. Der absolute Betrag einer von Null verschiedenen Zahl ist also stets positiv und von Null verschieden; man sagt auch: Er ist der *Wert der Zahl, abgesehen vom Vorzeichen,* oder *die absolut genommene Zahl.* Unter dem absoluten Betrage von Null versteht man Null selbst. Den absoluten Betrag einer Zahl a bezeichnet man mit $|a|$. Es ist also z. B. $|7| = |-7| = 7$. Ohne weiteres leuchtet ein:

Satz 1: Der absolute Betrag eines Produktes ist gleich dem Produkte der absoluten Beträge der Faktoren:

$$|a_1 a_2 a_3 \ldots a_n| = |a_1| \cdot |a_2| \cdot |a_3| \cdots |a_n|.$$

Der Satz über den absoluten Betrag einer *Summe* ist jedoch nicht so einfach, aber von größter Wichtigkeit. Es seien nämlich $a_1, a_2, a_3, \ldots a_n$ eine Reihe von Zahlen und $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_n$ ihre absoluten Beträge. Entweder ist nun die Summe $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ positiv oder gleich Null oder negativ. In den ersten beiden Fällen ist sie ihrem absoluten Betrage gleich, im letzten dem entgegengesetzten Werte. Also ist entweder

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = |a_1 + a_2 + \cdots + a_n|$$

oder

$$-a_1 - a_2 - \cdots - a_n = |a_1 + a_2 + \cdots + a_n|.$$

Sowohl a_1 als auch $-a_1$ hat den absoluten Betrag α_1, ebenso a_2 und $-a_2$ den absoluten Betrag α_2 usw. Die linken Seiten werden nun höchstens vergrößert, wenn man $a_1, a_2, \ldots a_n$ oder $-a_1, -a_2, \cdots -a_n$ durch ihr absoluten Beträge ersetzt, weil die Zahlen selbst ihren absoluten Beträgen höchstens gleich, aber sicher nicht größer als sie sind. In jedem Falle ist daher:

$$|a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n| \geqq |a_1 + a_2 + \cdots + a_n|.$$

Gleichheit tritt nur dann ein, wenn keiner der Summanden $a_1, a_2, \ldots a_n$ bzw. $-a_1, -a_2, \cdots -a_n$ dadurch, daß man ihn durch seinen absoluten Betrag ersetzt, vergrößert wird, d. h. wenn sie sämtlich positiv sind, mit anderen Worten, wenn $a_1, a_2, \ldots a_n$ entweder sämtlich positiv oder sämtlich negativ

sind. Mithin ergibt sich, wenn man die letzte Ungleichung von rechts nach links liest, der

Satz 2: Der absolute Betrag einer Summe ist kleiner als die Summe der absoluten Beträge der Summanden oder höchstens ebenso groß:

$$|a_1 + a_2 + \cdots + a_n| \leqq |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n|.$$

Er ist ihr dann und nur dann gleich, wenn alle Summanden dasselbe Vorzeichen haben.

5. Über Potenzen und Wurzeln. In der Arithmetik wird definiert, daß u^v, wenn v eine ganze positive Zahl ist gleich dem Produkte von v Faktoren u sein soll, ferner $\sqrt[v]{u}$ gleich einer Zahl, die v-mal mit sich selbst multipliziert das Produkt u gibt. Dabei wird ein Verfahren gelehrt, wie man Ziffer für Ziffer den Wert von $\sqrt[v]{u}$ als (im allgemeinen endlosen) Dezimalbruch berechnen kann. Ist dabei v gerade, so muß jedoch u positiv angenommen werden. Potenzen mit negativen und gebrochenen Exponenten werden vermöge der Definitionen

$$u^{-v} = \frac{1}{u^v}, \quad u^{\frac{1}{v}} = \sqrt[v]{u}$$

auf die ursprünglichen Potenzen und Wurzeln zurückgeführt. Eine Potenz u^v, deren Basis u positiv und deren Exponent v rational ist, hat stets nur *einen* positiven Wert. Zu ihm kann übrigens ein negativer Wert hinzutreten; wir beschränken uns jedoch hier auf den positiven Wert. Man zeigt: *Der positive Wert von u^v liegt, wenn u positiv und v positiv und rational ist, um so näher bei Eins, je kleiner v ist. Insbesondere wird $u^0 = 1$ gesetzt.*

Die niedere Arithmetik gibt aber keine Definition von u^v für den Fall, *daß der Exponent v irrational ist.* Ist v negativ, so führen wir u^v auf $1 : u^{-v}$ zurück, wo der Exponent positiv ist. Wir haben also noch die Aufgabe, u^v für den Fall zu definieren, *daß der Exponent v eine irrationale, aber positive Zahl ist.* In diesem Falle läßt sich u^v als irrationale Zahl in folgender Weise definieren, wenn wir noch ausdrücklich voraussetzen, *daß die Basis u positiv sei:*

Wir brechen den endlosen Dezimalbruch v nach der n^{ten} Dezimalstelle ab und erhalten dadurch eine rationale positive

Zahl p_n. Wird die letzte Ziffer dieses Dezimalbruches um Eins erhöht, so geht eine größere rationale positive Zahl q_n hervor. Dabei ist $q_n - p_n = 1 : 10^n$. Nun sind

$$\pi_n = u^{p_n}, \quad \varkappa_n = u^{q_n}$$

nach dem Vorhergehenden wohldefinierte positive Zahlen, da ihre Exponenten rational sind und die Basis positiv ist. Im Fall $u > 1$ ist, wenn nach und nach $n = 1, 2, 3, \ldots$ gewählt wird, $\pi_1 < \pi_2 < \pi_3$ usw. und $\varkappa_1 > \varkappa_2 > \varkappa_3$ usw. Außerdem ist jedes π kleiner als jedes $\varkappa$. Die Differenz $\varkappa_n - \pi_n$ läßt sich so schreiben:

$$\varkappa_n - \pi_n = \pi_n \left(\sqrt[10^n]{u} - 1 \right)$$

und ist also, da $\pi_n < \varkappa_1$ ist, kleiner als $\varkappa_1 \left(\sqrt[10^n]{u} - 1 \right)$. Da die hier auftretende Wurzel um so weniger von Eins abweicht, je größer n gewählt wird, so läßt sich n stets so groß wählen, daß die Differenz $\varkappa_n - \pi_n$ kleiner als eine beliebig klein gewählte positive Zahl σ wird. Nach Nr. 2 definieren mithin die Wertereihen $\pi_1, \pi_2, \pi_3, \ldots$ und $\varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_3, \ldots$ eine bestimmte reelle Zahl, und *diese Zahl soll der Wert der Potenz u^v sein.* Ist $u < 1$, aber > 0, so gelten dieselben Schlüsse, wenn man nur die Größen π und $\varkappa$ in ihrer Bedeutung vertauscht.

Wir mußten $u > 0$ voraussetzen, weil sonst die Zahlen π_n oder $\varkappa_n$ zum Teil gar nicht reell vorhanden wären. *Eine Potenz mit irrationalem Exponenten wird also nur dann definiert, wenn ihre Basis positiv ist, und zwar ist sie dann als eine positive reelle Zahl definiert.* Es läßt sich nun beweisen, daß die gewöhnlichen Potenzregeln auch für solche Potenzen gelten, da die Potenzen u^{p_n} und u^{q_n}, die den gewöhnlichen Rechenregeln gehorchen, die Potenz u^v beliebig eng einschließen. Doch gehen wir hierauf nicht näher ein.

§ 2. Von den Funktionen.

6. Konstanten und Veränderliche, Funktionen. Die Größen, die bei einer mathematischen Untersuchung auftreten, sind von zweierlei Art. Unter einer *Konstanten* versteht man eine Größe, die während der Untersuchung immer ein und denselben Wert behalten soll. Eine Größe dagegen, die sich

während der Untersuchung ändern darf oder soll, heißt eine *Veränderliche* (Variable). Veränderliche Größen bezeichnet man gern, soweit es angeht, mit den letzten Buchstaben des Alphabets. Wenn eine veränderliche Größe x nur Werte innerhalb eines gewissen Bereiches, z. B. nur alle Werte zwischen 2 und 3, annehmen darf, so heißt die Gesamtheit dieser erlaubten Werte der *Variabilitätsbereich* der Veränderlichen x.

Ebenso spricht man von dem Variabilitätsbereiche mehrerer veränderlicher Größen $x_1, x_2, \ldots x_n$, indem man darunter die Gesamtheit aller derjenigen Wertsysteme $x_1, x_2, \ldots x_n$ versteht, die man für die veränderlichen Größen zulassen will.

Bei jeder Frage, bei der man mehrere Veränderliche zu betrachten hat, kann man einigen dieser Veränderlichen irgend welche Werte erteilen, und dann nehmen die übrigen Veränderlichen bestimmte Werte an. Die einen heißen dann *unabhängige Veränderliche,* die andern *abhängige Veränderliche* oder *Funktionen der unabhängigen Veränderlichen.*

Z. B. führt die Betrachtung eines Kreises zu drei Größen, dem Radius, dem Umfange und dem Inhalte. Wenn man einer von ihnen irgend einen Wert erteilt, so nehmen die beiden anderen *zugehörige* bestimmte Werte an; sie sind also Funktionen der zuerst bestimmt gewählten Größe, die hier die unabhängige Veränderliche ist. Bei einem geraden und begrenzten Kreiszylinder hat man vier Größen zu betrachten, den Radius, die Höhe, die Oberfläche und das Volumen. Hier kann man zweien von diesen Größen willkürliche Werte beilegen; die anderen beiden bekommen alsdann *zugehörige* bestimmte Werte, sie sind also Funktionen der beiden ersten, der unabhängigen Veränderlichen.

Allgemein definiert man:

Die Veränderliche y heißt eine Funktion der Veränderlichen x, wenn eine Vorschrift vorhanden ist, die jedem bestimmten Werte der Veränderlichen x innerhalb eines gewissen Variabilitätsbereiches einen, aber auch nur einen bestimmten Wert der Veränderlichen y zuordnet. Alsdann heißt x die unabhängige Veränderliche in Hinsicht auf die abhängige Veränderliche y.

Ferner definiert man analog:

Die Veränderliche y heißt eine Funktion der n Veränder-

lichen $x_1, x_2, \ldots x_n$, *wenn eine Vorschrift vorhanden ist, die jedem bestimmten Wertsysteme* $x_1, x_2, \ldots x_n$, *das innerhalb des Variabilitätsbereiches von* $x_1, x_2, \ldots x_n$ *liegt, einen, aber auch nur einen bestimmten Wert der Veränderlichen* y *zuordnet.* Alsdann heißen $x_1, x_2, \ldots x_n$ die unabhängigen Veränderlichen.

Die Funktionen y, die wir in der Folge betrachten, werden meistens *analytisch* definiert sein, d. h. mittels Gleichungen, die zwischen ihnen und den unabhängigen Veränderlichen bestehen.

Eine Funktion heißt *algebraisch*, wenn die Gleichung, durch die sie mit den unabhängigen Veränderlichen verknüpft wird, dadurch hergestellt worden ist, daß man auf *alle* Veränderlichen und eine Reihe von Konstanten nur die sogenannten *algebraischen Operationen* angewandt hat, nämlich die Addition und Subtraktion, die Multiplikation und Division, die Erhebung in Potenzen mit ganzen konstanten Exponenten und die Ausziehung von Wurzeln mit ganzen konstanten Exponenten. Da man die vorkommenden Wurzeln dadurch entfernen kann, daß man die Gleichung in passende Potenzen mit ganzzahligen Exponenten erhebt, und da man ferner durch passende Multiplikationen auch alle solche Nenner und negativen Potenzen beseitigen kann, in denen Veränderliche vorkommen, so leuchtet ein, daß die Gleichung, durch die eine algebraische Funktion y von $x_1, x_2, \ldots x_n$ definiert wird, stets, indem man sie nach Potenzen von y ordnet, auf die Form gebracht werden kann:

$$X_0 y^n + X_1 y^{n-1} + X_2 y^{n-2} + \cdots + X_{n-1} y + X_n = 0,$$

wo $X_0, X_1, X_2, \ldots X_n$ nur noch die unabhängigen Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots x_n$ enthalten und zwar mit einer Reihe von Konstanten nur noch durch die Operationen: Addition, Subtraktion und Multiplikation verknüpft. Aber es ist nicht sicher, daß, wenn man eine solche Gleichung nach Belieben bildet, auch zu einem beliebigen Wertsysteme $x_1, x_2, \ldots x_n$ ein reeller Wert von y vorhanden ist.

Sicher ist dies jedoch der Fall, wenn die Gleichung insbesondere vom ersten Grade hinsichtlich y ist: $X_0 y + X_1 = 0$, da sie dann in der Form:

$$y = \frac{-X_1}{X_0}$$

[6

nach y aufgelöst werden kann. Hier ist y ein Bruch, dessen Zähler und Nenner nur ganze positive Potenzen der unabhängigen Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots x_n$ enthalten, die miteinander und mit Konstanten nur durch Addition, Subtraktion und Multiplikation verknüpft sind. Alsdann heißt y eine *rationale Funktion* von $x_1, x_2, \ldots x_n$. Insbesondere ist also y eine rationale Funktion von nur *einer* Veränderlichen x allein, wenn sie so dargestellt werden kann:

$$(1) \qquad y = \frac{a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \cdots + a_{m-1} x + a_m}{b_0 x^r + b_1 x_{r-1} + \cdots + b_{r-1} x + b_r},$$

wo m und r ganze positive Zahlen und die *Koeffizienten* a_0, $a_1, \ldots a_{m-1}$, a_m und $b_0, b_1, \ldots b_{r-1}$, b_r Konstanten bedeuten. Insbesondere heißt y eine *ganze rationale Funktion* von x_1, x_2, $\ldots x_n$, wenn der Nenner der rationalen Funktion eine Konstante ist, d. h. wenn y gleich einer Summe von Produkten von positiven ganzzahligen Potenzen von $x_1, x_2, \ldots x_n$ und von Konstanten wird. Zum Unterschiede von den *ganzen* rationalen Funktionen nennt man rationale Funktionen, deren Nenner nicht konstant sind, *gebrochene rationale Funktionen.*

Nach dem Vorhergehenden ist also y eine *ganze rationale Funktion von nur einer Veränderlichen* x, wenn sie so dargestellt werden kann:

$$y = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \cdots + a_{m-1} x + a_m.$$

Ist $a_0 \neq 0$, so heißt sie eine *ganze rationale Funktion vom* m^{ten} *Grade.*

Eine Funktion y von $x_1, x_2, \ldots x_n$, die keine algebraische Funktion ist, heißt *transzendent.* Z. B. sind $y = \sin x$, $y = x^x$, $y = x^{\sqrt{2}}$, $y = 10^x$ transzendente Funktionen von x.

Wenn eine Funktion y von $x_1, x_2, \ldots x_n$ durch eine Gleichung gegeben ist, die $x_1, x_2, \ldots x_n$ enthält, aber nicht nach y aufgelöst ist, so sagt man, daß y durch die Gleichung als *unentwickelte* oder *implizite Funktion* von $x_1, x_2, \ldots x_n$ gegeben wird. Z. B. wenn $y^2 - x = 0$ vorgeschrieben ist, so ist y eine unentwickelte Funktion von x. Wir können sie jedoch in diesem Beispiele durch Auflösen der Gleichung nach y sofort als *entwickelte* oder *explizite* Funktion von x darstellen, aber es ergeben sich ihrer zwei, nämlich $y = |\sqrt{x}|$ und $y = -|\sqrt{x}|$.

6]

In diesem Beispiele ist der *Variabilitätsbereich* von x der aller *positiven* Zahlen. Andere Beispiele von entwickelten Funktionen sind die oben erwähnten rationalen Funktionen. So ist y durch (1) als entwickelte Funktion von x definiert. Da eine rationale Funktion y von $x_1, x_2, \ldots x_n$ offenbar für jedes reelle Wertsystem $x_1, x_2, \ldots x_n$ einen reellen Wert hat, abgesehen von denjenigen, für die der Nenner gleich Null wird (weil man mit Null nicht dividieren darf, vgl. Nr. 1), so ist hier der Variabilitätsbereich von $x_1, x_2, \ldots x_n$ der Bereich aller reellen Zahlen, abgesehen von denjenigen Wertsystemen, für die der Nenner gleich Null wird. Liegt eine *ganze* rationale Funktion y von $x_1, x_2, \ldots x_n$ vor, so fällt jedoch diese Beschränkung fort.

Wir werden die Funktionen oder abhängigen Veränderlichen ebenso wie die unabhängigen Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots x_n$ einfach durch Buchstaben wie $y_1, y_2, \ldots$ bezeichnen können. Wenn aber betont werden soll, daß sie von $x_1, x_2, \ldots x_n$ abhängig sind, so werden wir zu ihrer Bezeichnung Symbole wie $f, F, \varphi, \ldots$ benutzen, hinter die wir die unabhängigen Veränderlichen, eingeschlossen in eine Klammer, schreiben. So sollen $f(x)$, $F(x)$, $\varphi(x)$ usw. Funktionen der unabhängigen Veränderlichen x bedeuten; ebenso soll z. B. $F(x_1, x_2, \ldots x_n)$ eine Funktion der n unabhängigen Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots x_n$ sein. Solche Symbole brauchen wir natürlich nur dann anzuwenden, wenn wir nicht ganz bestimmt gegebene Funktionen betrachten wie z. B. $y = \sin x$, $y = 10^x$ u. dergl., wo sie überflüssig sind. Wenn z. B. $f(x)$ eine Funktion von x bedeutet, so soll $f(a)$ der Wert sein, den sie annimmt, sobald der Veränderlichen x der bestimmte Wert a erteilt wird. Ähnlich im Falle mehrerer unabhängiger Veränderlicher.

7. Graphische Darstellung der Funktionen. Eine Funktion $y = f(x)$ von *einer* Veränderlichen x stellt man graphisch dar, indem man in der aus der *analytischen Geometrie* bekannten Art ein *Koordinatensystem* benutzt. Denn nach Nr. 3 können wir alle reellen Zahlen x durch Strecken auf einer x-Achse oder *Abszissenachse* darstellen, gemessen von einem *Anfangs-* oder *Nullpunkte* O aus unter Zugrundelegung einer bestimmt gewählten Einheit $O1$, siehe Fig. 1. Zu dieser

x-Achse senkrecht nehmen wir die y-Achse oder *Ordinatenachse* durch O an, indem wir auf ihr ebenfalls O als Anfangspunkt benutzen und zweckmäßigerweise die y-Einheit gleich der x-Einheit wählen. Jede Achse hat eine positive und eine negative Richtung. Jedem reellen Wertepaare x, y entspricht eine Abszisse $x = OP$ und eine Ordinate $y = OQ$, mithin ein Punkt M der Ebene als *Bildpunkt* mit den *Koordinaten* x und y. Umgekehrt: Zu jedem bestimmten Punkte M der Ebene gehört ein bestimmtes Koordinatenpaar x, y. Man zieht es vor, PM und nicht OQ die *Ordinate* zu nennen.

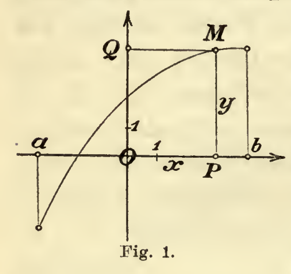


Fig. 1.

Ist $y = f(x)$ eine gegebene Funktion von x und ist der Variabilitätsbereich von x z. B. das Intervall von a bis b, so gehört zu jedem Werte von x zwischen a und b ein Wert von y, also ein Bildpunkt M. Die Gesamtheit aller Bildpunkte (x, y) heißt das *Bild der Funktion* $f(x)$. Für viele Funktionen, namentlich für diejenigen, die wir genauer untersuchen, ist dies Bild, wie wir sehen werden, eine stetige krumme Linie, eine *Kurve*. Daher veranschaulichen wir häufig eine Funktion $y = f(x)$ in der Figur durch eine Kurve. Jedoch ist zu fordern, *daß die Beweise aller Sätze, die nicht geometrischer, sondern analytischer Natur sind, auch unabhängig von derartigen Hilfsmitteln der Veranschaulichung geführt werden können.*

Eine Funktion $y = f(x_1, x_2)$ von zwei unabhängigen Veränderlichen x_1 und x_2 veranschaulicht man sich in entsprechender Weise, indem man ein räumliches Koordinatensystem mit drei zueinander senkrechten Achsen, einer x_1-Achse, einer x_2-Achse und einer y-Achse, benutzt. Jedem Wertepaare x_1, x_2 im Variabilitätsbereiche von x_1 und x_2 gehört ein Wert von y zu, allen drei Werten ein Punkt (x_1, x_2, y) des Raumes. Alle diese Bildpunkte einer Funktion von zwei Veränderlichen werden in vielen Fällen eine *Fläche* erfüllen.

Zur Erläuterung betrachten wir jetzt einige besondere transzendente Funktionen von einer Veränderlichen.

8. Die Exponentialfunktion a^x. Ist a eine *positive* Zahl, so hat a^x nach Nr. 5 für jedes x einen bestimmten posi-

tiven Wert, so daß der Variabilitätsbereich von x alle reellen Zahlen umfaßt. Drei Fälle sind zu unterscheiden:

α) Ist $a > 1$, so nimmt die *stets positive* Potenz $y = a^x$ mit wachsendem x beständig zu. Solange x absolut genommen sehr große, aber negative Werte hat, ist y oder $1 : a^{-x}$ sehr klein; für $x = 0$ ist $y = 1$; wächst x zu sehr großen positiven Werten, so wird auch y sehr groß. Siehe die ausgezogene Kurve in Fig. 2, in der a insbesondere gleich Zwei gewählt wurde.

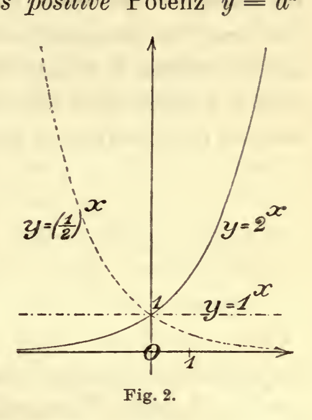


Fig. 2.

β) Ist $a = 1$, so ist $y = a^x = 1$. Das Bild ist die Parallele zur x-Achse mit der Ordinate Eins.

γ) Ist $a < 1$ (aber positiv), so ergibt sich, da $a^x = (1 : a)^{-x}$ ist, derselbe Verlauf wie im Falle α), aber mit Vertauschung von rechts und links. So geht für $a = \frac{1}{2}$ die gestrichelte Kurve aus der Kurve für $a = 2$ durch Umklappung um die y-Achse hervor.

9. Die goniometrischen Funktionen. Darunter versteht man Sinus, Kosinus, Tangens und Kotangens von x, also $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$ und $\operatorname{ctg} x$. Hierbei soll wie stets, wenn von den goniometrischen Funktionen die Rede sein wird, unter x nicht das Gradmaß, sondern das *natürliche oder Bogenmaß des Winkels* verstanden werden. Es sei nämlich α das Gradmaß eines Winkels, und es werde um seinen Scheitel der Kreis mit dem Radius Eins konstruiert. Siehe Fig. 3. Die Länge des Bogens, den der Winkel auf dem Kreise abschneidet, heißt das Bogenmaß x des Winkels. Das Bogenmaß ist dem Gradmaße proportional, d. h. es ist $x : 2\pi = \alpha : 360$ oder $x = \pi\alpha : 180$.

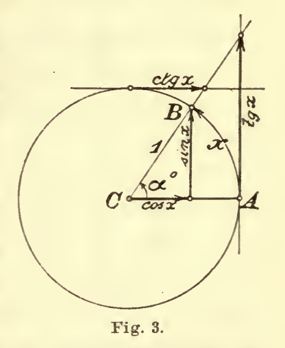


Fig. 3.

Das Bogenmaß von 1^0 ist gleich $\pi : 180$ oder rund 0,01745. Der Winkel, dessen Bogenmaß $x = 1$ ist, den wir also künftig als *Winkeleinheit* benutzen, hat $180^0 : \pi$ oder rund $57^0\,17'\,44'',8$.

[**8, 9**

Wird nun der Schenkel CA des Winkels festgehalten, dagegen der andere Schenkel CB in bestimmtem Sinne um C gedreht, so wächst x von Null bis zu beliebig großen Werten; bei der Drehung im entgegengesetzten Sinne nimmt x bis zu beliebig kleinen, nämlich negativen Werten ab. Der Variabilitätsbereich von x umfaßt also alle reellen Zahlen. In der Trigonometrie werden die Funktionen $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$ durch die in Fig. 3

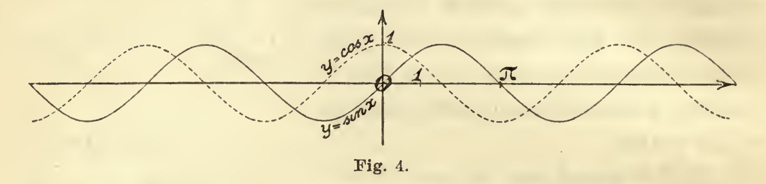


Fig. 4.

angegebenen Strecken geometrisch definiert und, wie bekannt, mit bestimmten Vorzeichen. Tragen wir x als Abszisse auf einer x-Achse und den zugehörigen Funktionswert als zugehörige Ordinate auf, so kommen wir zu den in Fig. 4 und 5 gegebenen Bildern der goniometrischen Funktionen. Hier ist jedoch die *Längeneinheit kleiner als in Fig.* 3 gewählt worden. Insbesondere sieht man:

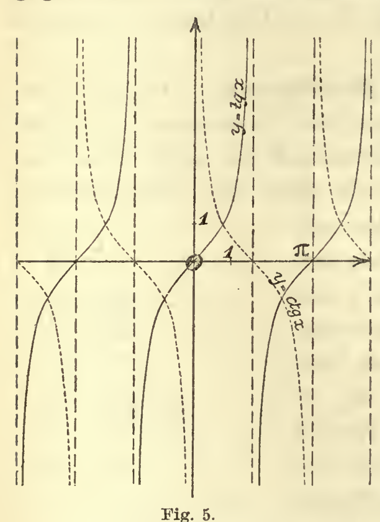


Fig. 5.

Alle vier goniometrischen Funktionen sind *periodisch*, d. h. der Wert, den eine der vier Funktionen für irgend ein x hat, ist gerade so groß wie derjenige Wert, den sie annimmt, wenn dies x um einen gewissen *konstanten* Betrag, die *Periode*, zu- oder abnimmt. Bei $\sin x$ und $\cos x$ ist die Periode 2π (zu 360^0 gehörig), bei $\operatorname{tg} x$ und $\operatorname{ctg} x$ dagegen π (zu 180^0 gehörig). Infolgedessen wiederholen sich die Kurvenzweige in den Intervallen 2π bzw. π beständig. Die Funktionen $\sin x$ und $\cos x$ nehmen nur Werte zwischen -1 und $+1$ an, dagegen $\operatorname{tg} x$ und $\operatorname{ctg} x$ alle reellen Werte überhaupt. Die Funktion $\sin x$ nimmt im Intervalle

$-\frac{1}{2}\pi \leqq x \leqq +\frac{1}{2}\pi$ jeden Wert zwischen -1 und $+1$ je einmal an; $\cos x$ tut dasselbe im Intervalle $0 \leqq x \leqq +\pi$; $\operatorname{tg} x$ nimmt jeden Zahlenwert einmal im Intervalle $-\frac{1}{2}\pi < x < +\frac{1}{2}\pi$ und $\operatorname{ctg} x$ jeden einmal im Intervalle $0 < x < \pi$ an. Für $x = \pm\frac{1}{2}\pi$ aber hat $\operatorname{tg} x$ keinen endlichen Wert, ebenso wenig $\operatorname{ctg} x$ für $x = 0$ und $x = \pi$. Dieselben Erscheinungen wiederholen sich periodisch.

10. Die inverse Funktion. Es sei $y = f(x)$ eine Funktion von x für jedes x, das dem Intervalle $a \leqq x \leqq b$ angehört. Dann entspricht jedem Werte x dieses Intervalles ein gewisser Wert y. Die Gesamtheit dieser Werte möge dem Intervalle $A \leqq y \leqq B$ angehören. Nimmt $f(x)$ jeden Wert zwischen A und B nur einmal an, so entspricht auch umgekehrt jedem Werte y des Intervalles $A \leqq y \leqq B$ nur ein bestimmter Wert x, für den $y = f(x)$ wird. Es ist dann also auch x eine Funktion von y, die wir etwa mit $x = \varphi(y)$ bezeichnen. Diese Funktion x von y heißt *die zur Funktion $f(x)$ inverse Funktion.* Fig. 6 sucht die Definition zu erläutern. Der Kurvenbogen gebe den Verlauf der Funktion $y = f(x)$, wenn x als Abszisse, y als Ordinate gewählt ist. Die Projektion der Kurvenpunkte auf die x-Achse liefert alle Punkte des Variabilitätsbereiches $a \leqq x \leqq b$. Projiziert man den Kurvenzug auf die y-Achse, so wird auf dieser das Intervall von A bis B abgeschnitten. Da jedem Werte y dieses Intervalles ein und nur ein Wert x des Intervalles von a bis b entsprechen soll, so wird bei der Projektion des Kurvenbogens auf die y-Achse der Abschnitt von A bis B *lückenlos* und *überall einfach* überdeckt. Betrachtet man jetzt y als unabhängige Veränderliche und sucht denjenigen Wert x in dem Intervalle von a bis b, für den $y = f(x)$ wird, so bildet man die Funktion $x = \varphi(y)$. Geometrisch wird sie erhalten, indem in den einzelnen Punkten y des Intervalles $A \leqq y \leqq B$ Parallelen zur x-Achse von der Länge und Richtung gezogen werden, die jedesmal durch $x = \varphi(y)$ bestimmt sind. *Dabei entsteht genau der alte Kurvenzug wieder, jedoch hat jetzt die Abszissenachse ihre Rolle mit der Ordinatenachse vertauscht.*

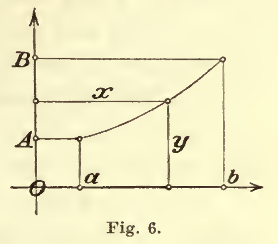


Fig. 6.

Betrachten wir z. B. die Funktion $y = x^2$ und weisen wir x alle *positiven* Werte als Variabilitätsbereich an, so nimmt y ebenfalls alle positiven Werte an, und jedem positiven Werte x entspricht ein und nur ein positiver Wert y und jedem positiven Werte y ein und nur ein positiver Wert x. Demnach ist $x = \left|\sqrt{y}\right|$ eine zu $y = x^2$ inverse Funktion.

11. Der Logarithmus. Betrachten wir die in Nr. 8 besprochene Funktion $y = a^x$. Wir sahen: wenn x alle Werte durchläuft, so nimmt y alle positiven Werte und jeden nur einmal an. Dabei ist a positiv und von Null und Eins verschieden vorausgesetzt. Es wird daher umgekehrt x eine Funktion von y werden. Die so entstehende Funktion heißt bekanntlich der *Logarithmus von y mit der Basis a*:

$$x = {}^a\log y.$$

Durchläuft y alle positiven Zahlen, so nimmt der Logarithmus alle positiven und negativen Werte und jeden nur einmal an. Für negative Werte von y ist ${}^a\log y$ nicht definiert.

12. Die zyklometrischen Funktionen. Die zu den goniometrischen Funktionen inversen Funktionen heißen die *zyklometrischen* Funktionen.

a) Ist $y = \operatorname{tg} x$, so wird, wenn x von $-\frac{1}{2}\pi$ bis $+\frac{1}{2}\pi$ wächst, y alle negativen und positiven Werte durchlaufen und jeden Wert nur einmal annehmen. Jedem Werte y entspricht daher ein und nur ein Wert x zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$. Also wird x eine Funktion von y, die, wenn y alle reellen Werte durchläuft, alle Werte zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ annimmt. Die so definierte Funktion heißt der *Arcus Tangens* von y, und man schreibt:

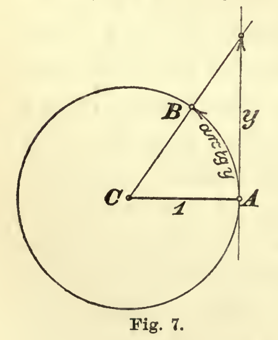


Fig. 7.

$$x = \operatorname{arc\,tg} y,$$

weil x ein Bogen ist, dessen Tangens gleich y ist. Siehe Fig. 7.

Die so entstehenden Werte x sind aber nicht die einzigen, die der Gleichung $y = \operatorname{tg} x$ genügen. Da vielmehr der Tangens nach Nr. 9 die Periode π hat, so ist auch $y = \operatorname{tg}(x - k\pi)$, wo k irgend eine *ganze* Zahl ist, und daher erfüllt auch:

$$x = \operatorname{arc}\operatorname{tg} y + k\pi$$

die Bedingung $y = \operatorname{tg} x$. Jede Funktion von der Form $\operatorname{arc}\operatorname{tg} y + k\pi$ ist daher eine zum Tangens inverse Funktion. Die Gleichung $x = \operatorname{arc}\operatorname{tg} y + k\pi$ liefert aber auch *alle* Werte x, die $y = \operatorname{tg} x$ genügen, wenn k nach und nach alle ganzen Zahlen bedeutet. Sie werden *sämtlich* mit $\operatorname{arc}\operatorname{tg} y$ bezeichnet. Aber $\operatorname{arc}\operatorname{tg} y$ stellt nur dann eine Funktion in dem in Nr. 6 definierten Sinne vor, wenn noch vorgeschrieben wird, daß ihr Wert in einem bestimmten Intervalle von $-\frac{1}{2}\pi + k$ bis $+\frac{1}{2}\pi + k$ liegen soll. Meistens werden wir künftig das Intervall von $-\frac{1}{2}\pi$ bis $+\frac{1}{2}\pi$ vorschreiben. Eine entsprechende Bemerkung gilt auch in den folgenden Fällen b), c) und d).

b) Ist $y = \operatorname{ctg} x$ und durchläuft x alle Werte von 0 bis π, so durchläuft y alle reellen Werte und jeden nur einmal. Umgekehrt wird daher

$$x = \operatorname{arc}\operatorname{ctg} y$$

eine Funktion, die alle Werte zwischen 0 und π und jeden nur einmal annimmt, wenn y alle reellen Werte durchläuft. *Alle* Werte x, für die $y = \operatorname{ctg} x$ ist, liefert die Gleichung

$$x = \operatorname{arc}\operatorname{ctg} y + k\pi,$$

und sie werden *sämtlich* mit $\operatorname{arc}\operatorname{ctg} y$ bezeichnet.

c) Ist $y = \sin x$ und durchläuft x alle Werte von $-\frac{1}{2}\pi$ bis $+\frac{1}{2}\pi$, so durchläuft y alle Werte von -1 bis $+1$. Also ist

$$x = \arcsin y$$

eine Funktion von y, die nur für die Werte von y zwischen -1 und $+1$ definiert ist. Durchläuft y dieses Intervall, so nimmt x alle Werte zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ und jeden nur einmal an. Da aber $\sin x = \sin(x - 2k\pi) = \sin(\pi - x + 2k\pi)$ ist, so werden *alle* Lösungen der Gleichung $y = \sin x$ dargestellt durch:

$$x = \arcsin y + 2k\pi, \quad x = -\arcsin y + (2k+1)\pi.$$

Sie werden *sämtlich* mit $\arcsin y$ bezeichnet.

d) Ist $y = \cos x$ und durchläuft x alle Werte von 0 bis π, so durchläuft y alle Werte von $+1$ bis -1. Deshalb ist

$$x = \arccos y$$

eine Funktion, die, wenn y alle Werte zwischen -1 und $+1$

durchläuft, alle Werte zwischen π und 0 und jeden nur einmal annimmt. Eine andere Lösung der Gleichung $y = \cos x$ ergibt sich wegen $\cos x = \cos(2\pi - x)$, nämlich:

$$x = 2\pi - \operatorname{arc} \cos y,$$

und alle Lösungen jener Gleichung stecken in den beiden Formeln:

$$x = \operatorname{arc} \cos y + 2k\pi, \quad x = -\operatorname{arc} \cos y + 2k\pi.$$

Sie werden *sämtlich* mit arc cos y bezeichnet.

§ 3. Der Begriff der Grenze.

13. Grenzwert bei wachsendem x. Wir wollen annehmen, y sei eine Funktion $f(x)$, und zwar sei sie für solche Werte von x definiert, die *kleiner* als ein bestimmter Wert a sind; dagegen sei y für $x = a$ selbst *nicht* definiert. Dies bedeutet: Wie nahe wir auch x bei a, aber immer noch kleiner als a wählen mögen, stets gehört zu diesem x ein Wert y. Man wird versucht sein, einen Wert von y auch für $x = a$ aus der Betrachtung derjenigen Werte abzuleiten, die y kurz vorher hat. Zeigt sich, daß y, sobald sich x dem a nähert, stark schwankende Werte annimmt, so wird man freilich diesen Versuch aufgeben; zeigt sich jedoch, daß die Werte von y dabei immer weniger von einem gewissen Werte A abweichen, so wird man sagen, daß y für $x = a$ den *Grenzwert* A erreicht. Aber es ist noch genauer festzusetzen, was unter diesem immer geringeren Abweichen von A zu verstehen ist. Wenn man unter σ eine kleine *positive* Zahl versteht, so kann man sich überlegen, ob es unmittelbar vor $x = a$ ein Intervall gibt, innerhalb dessen y *überall* von A um weniger als σ abweicht. Die untere Grenze eines solchen Intervalles wird mit $x = a - h$ zu bezeichnen sein, wo h eine *positive* Zahl bedeutet, während a selbst die obere Intervallgrenze ist. Wählen wir σ noch kleiner als vorher, so kann es sein, daß es immer noch ein Intervall von Werten von x kleiner als a gibt, innerhalb dessen y *überall* von A um weniger als σ abweicht. Gibt es immer ein solches Intervall, wie klein auch σ gewählt sein mag, so werden wir sagen, daß y für $x = a$ den Grenzwert A erreicht. So kommen wir zu der

Definition: Die Funktion $f(x)$, die für Werte von x kleiner als a definiert ist, hat für den Wert $x = a$ den Grenzwert A, wenn es stets, wie klein man auch eine positive Zahl σ wählen mag, unmittelbar vor $x = a$ ein Intervall $a - h < x < a$ gibt, innerhalb dessen $f(x)$ überall von A um weniger als σ abweicht, so daß für jedes x innerhalb dieses Intervalles $|f(x) - A| < \sigma$ ist.

1. Beispiel: Unter y werde für *negative* Werte von x die dritte Potenz von x verstanden. Wohlbemerkt definieren wir $y = x^3$ nur für $x < 0$, nicht auch für $x = 0$; es soll also nicht direkt $x = 0$ darin gesetzt werden, wodurch sich $y = 0$ ergäbe, sondern es soll aus den *vor* $x = 0$ liegenden Werten der Funktion ihr *Grenzwert* für $x = 0$ ermittelt werden. Hier ist $a = 0$, also ein Intervall vor a etwa durch $-h$ und 0 begrenzt. Wir haben eine Zahl A so zu suchen, daß stets, wie klein man auch die positive Zahl σ wählen mag, $x^3 - A$ absolut genommen kleiner als σ ist, wenn x zwischen $-h$ und 0 liegt. Dies wird in der Tat erreicht, wenn insbesondere $A = 0$ gewählt wird und $h < \sqrt[3]{\sigma}$ ist, denn dann wird, sobald x zwischen $-h$ und 0 liegt, $|x^3 - A|$ oder also $|x^3|$ kleiner als $\sqrt[3]{\sigma^3} = \sigma$. Ist z. B. $\sigma = 0{,}001$ gewählt, so ist $|x^3|$ für *alle* Werte von x zwischen $-0{,}1$ und 0 kleiner als σ, also auch $|x^3 - A|$, wenn darin $A = 0$ ist. Wenn wir uns in Fig. 8 ein Bild von der Funktion $y = x^3$ für negative Werte von x machen, so sehen wir: Wie klein wir auch die Zahl σ wählen mögen, stets gibt es vor $x = 0$ ein Intervall $-h < x < 0$, innerhalb dessen die Ordinate von Null um weniger als σ abweicht, so daß die beiden Parallelen zur x-Achse mit den Ordinaten $+\sigma$ und $-\sigma$ dasjenige Stück des Bildes der Funktion einschließen, das von $x = -\sqrt[3]{\sigma}$ bis $x = 0$ geht.

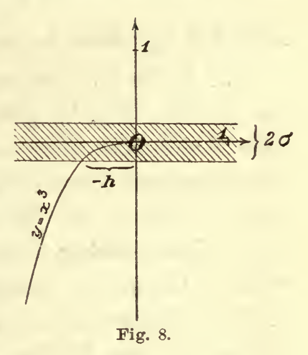


Fig. 8.

2. Beispiel: Unter $y = [x]$ sei die größte *ganze* in der *positiven* Zahl x enthaltene Zahl verstanden. Liegt x zwischen 0 und 1, so ist $y = 0$, liegt x zwischen 1 und 2, so ist $y = 1$ usw. Das Bild dieser Funktion besteht daher, siehe Fig. 9,

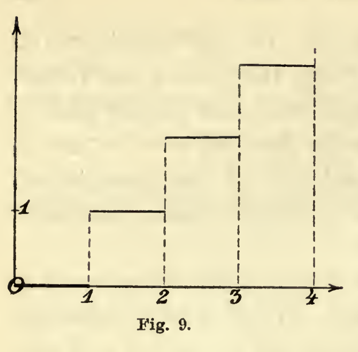


Fig. 9.

aus lauter treppenweise geschichteten parallelen Strecken. Für $x=2$ z. B. kann man im Zweifel sein, ob man y den Wert 1 oder 2 zuschreiben soll. Wenn wir aber x auf Werte *kleiner* als zwei beschränken, so ist der Grenzwert von y für $x=2$ der Wert Eins. In der Tat, in dem ganzen Intervalle $1<x<2$ ist ja $[x]-1$ sogar gleich Null. Wie klein wir auch die positive Zahl σ wählen mögen, stets ist

$$|[x]-1|<\sigma$$

sobald x irgendwo in dem Intervalle $1<x<2$ vor $x=2$ liegt.

3. *Beispiel:* Es sei y die Funktion $x \sin x$ für Werte von $x<0$. Fig. 10 gibt das Bild dieser Funktion. Die Kurve nähert sich mit wachsendem x in immer niedriger werdenden Schwingungen dem Nullpunkte, so daß für $x=0$ als Grenzwert A von y der Wert Null zu vermuten ist. In der Tat: Ist σ eine beliebig kleine positive Zahl, so sei $h=|\sqrt{\sigma}|$ gewählt. Dann ist, sobald x im Intervalle $-h<x<0$ liegt, $|x \sin x|$ kleiner als x^2, da der Sinus von x absolut genommen kleiner als der Winkel x (in Bogenmaß) ist, d. h. es kommt $|x \sin x - 0|<|x^2|<|h^2|=\sigma$.

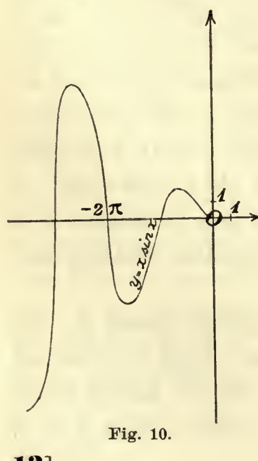


Fig. 10.

4. *Beispiel:* Jetzt bedeute y für *negative* Werte von x die Funktion $\sin(1:x)$. Ihr Bild ist in Fig. 11 angedeutet; die Schwingungen werden, wenn x zu Null hin wächst, so eng, daß sie nicht mehr gezeichnet werden können. Diese Funktion hat für $x=0$ *keinen* Grenzwert. Denn es sei $-h<x<0$ irgend ein Intervall vor $x=0$. Innerhalb des Intervalles ist $|1:x|$ größer als $1:h$; aber wie klein auch h sein mag, stets gibt es eine ganze Zahl k derart, daß $\frac{1}{2}\pi+2k\pi$ und um so mehr

$\frac{1}{2}\pi + (2k+1)\pi$ größer als $1:h$ wird. Im Intervalle liegen also stets Werte von der Form:

$$x = -\frac{1}{\frac{1}{2}\pi + 2k\pi} \quad \text{und} \quad x = -\frac{1}{\frac{1}{2}\pi + (2k+1)\pi}.$$

Für den ersten ist y gleich -1, für den zweiten gleich $+1$. Wäre nun A der Grenzwert für $x = 0$, so müßte also sowohl $|-1-A|$ als auch $|+1-A| < \sigma$ sein, wie klein auch σ gewählt sein mag. Einen solchen Wert A gibt es jedoch nicht.

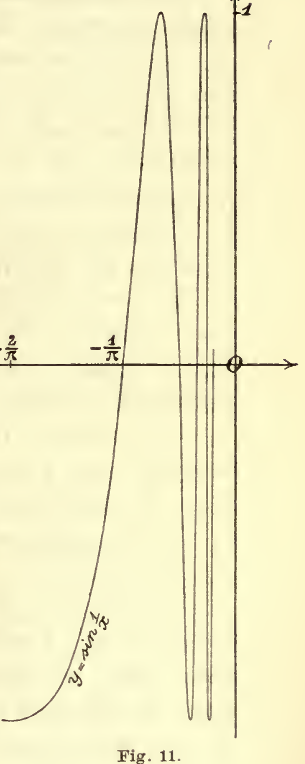


Fig. 11.

14. Grenzwert bei abnehmendem x. Nehmen wir jetzt an, y sei eine Funktion $f(x)$ für solche Werte von x, die *größer* als ein bestimmter Wert a sind; dagegen sei y für $x = a$ nicht definiert. Alsdann können wir entsprechende Überlegungen anstellen und kommen so zu der

Definition: Die Funktion $f(x)$, die für Werte von x größer als a definiert ist, hat für den Wert $x = a$ den Grenzwert A, wenn es stets, wie klein man auch eine positive Zahl σ wählen mag, unmittelbar nach $x = a$ ein Intervall $a < x < a + h$ gibt, innerhalb dessen $f(x)$ überall von A um weniger als σ abweicht, so daß für jedes x innerhalb dieses Intervalles $|f(x) - A| < \sigma$ ist.

1. Beispiel: Es sei $y = x^3$ für *positive* Werte von x. Wählen wir $h < \sqrt[3]{\sigma}$, wo σ eine beliebig kleine positive Zahl sei, so ist $h^3 < \sigma$, also im Intervalle $0 < x < h$ auch $|x^3 - 0| < \sigma$, d. h. y hat für $x = 0$ den Grenzwert $A = 0$.

2. Beispiel: Ist $y = [x]$ die größte *ganze* in der *positiven* Zahl x enthaltene Zahl und zwar für alle $x > 2$, so hat y für $x = 2$ den Grenzwert $A = 2$. Denn wenn wir $h = 1$ wählen, so ist im ganzen Intervalle $2 < x < 2 + h$ stets $y = 2$, also $|[x] - 2| < \sigma$ für beliebiges positives σ.

3. *Beispiel:* Ist $y = x \sin x$ für $x > 0$, so hat y für $x = 0$ den Grenzwert $A = 0$, denn wenn $h = |\sqrt{\sigma}|$ gewählt wird, so ist für alle x im Intervalle $0 < x < h$ auch $|x \sin x - 0| < x^2 < h^2 = \sigma$.

4. *Beispiel:* Ist $y = \sin(1 : x)$ für $x > 0$, so hat y für $x = 0$ *keinen* Grenzwert, was sich analog wie in Nr. 13 ergibt.

15. Grenzwert überhaupt. Im ersten und dritten Beispiele zeigte sich, daß die Funktionen $y = x^3$ und $y = x \sin x$ sowohl bei wachsendem x als auch bei abnehmendem x jedesmal gleiche Grenzwerte für $x = 0$ haben. Im zweiten Beispiele jedoch ergab sich, daß $y = [x]$ für bis $x = 2$ wachsendes x den Grenzwert 1, für bis $x = 2$ abnehmendes x den Grenzwert 2 hat. Im vierten Beispiele ergaben sich überhaupt keine Grenzwerte.

Ist nun $y = f(x)$ innerhalb eines solchen Intervalles für x definiert, das den Wert $x = a$ enthält, so kann man sich dem Werte $x = a$ sowohl mit wachsendem als auch mit abnehmendem x nähern. Nur wenn sich beide Male derselbe Grenzwert ergibt, sagen wir, daß die Funktion für $x = a$ dort einen Grenzwert schlechtweg hat.

Definition: Die Funktion $f(x)$ hat an einer Stelle $x = a$ innerhalb des Variabilitätsbereiches von x den Grenzwert A, wenn sie sowohl für ein x, das bis a wächst, als auch für ein x, das bis a abnimmt, den Grenzwert A hat.

Oder auch:

Definition: Die Funktion $f(x)$ hat an einer Stelle $x = a$ innerhalb des Variabilitätsbereiches von x den Grenzwert A, wenn stets, wie klein man auch eine positive Zahl σ wählen mag, ein Intervall $a - h < x < a + h$ um a herum vorhanden ist, innerhalb dessen $f(x)$ überall von A um weniger als σ abweicht, so daß für jedes x innerhalb des Intervalles $|f(x) - A| < \sigma$ ist.

Man bezeichnet den Grenzwert alsdann, indem man vor $f(x)$ das Zeichen „lim" (Limes, die Grenze) setzt und darunter angibt, für welchen Wert a von x der Grenzwert gemeint ist. Nach dem ersten und dritten Beispiele in Nr. 13, 14 ist so:

$$\lim_{x=0} x^3 = 0, \quad \lim_{x=0} x \sin x = 0.$$

In dem Falle, wo eine Funktion $f(x)$ verschiedene Grenz-

werte hat, je nachdem x wachsend oder abnehmend nach a strebt, bezeichnet man die Grenzwerte auch mit $f(a-0)$ und $f(a+0)$.

16. Grenzwert einer Funktion von mehreren Veränderlichen. Ist $y = f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ als Funktion von x_1, $x_2, \ldots x_n$ in einem gewissen Variabilitätsbereiche der n Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots x_n$ definiert, so kann man auch hier ein bestimmtes Wertsystem $x_1 = a_1,\ x_2 = a_2, \ldots x_n = a_n$ ins Auge fassen, das dem Variabilitätsbereiche angehört. Man sagt dafür kurz: Man fixiert eine *Stelle* $x_1 = a_1,\ x_2 = a_2, \ldots x_n = a_n$ innerhalb des Variabilitätsbereiches. Dann haben wir die

Definition: Die Funktion $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ hat an einer Stelle $x_1 = a_1,\ x_2 = a_2, \ldots x_n = a_n$ des Variabilitätsbereiches von $x_1, x_2, \ldots x_n$ den Grenzwert A, wenn es stets, wie klein man auch eine positive Zahl σ wählen mag, derartige Intervalle

$$a_1 - h < x_1 < a_1 + h, \qquad a_2 - h < x_2 < a_2 + h \ \text{usw.}$$

gibt, daß für alle Werte von $x_1, x_2, \ldots x_n$ innerhalb dieser Intervalle die Funktion $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ von A um weniger als σ abweicht: $|f(x_1, x_2, \ldots x_n) - A| < \sigma$.

§ 4. Die Begriffe $+\infty$ und $-\infty$.

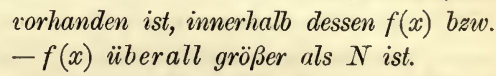
17. Unendlicher Grenzwert bei endlichem x. Es sei $y = f(x)$ eine Funktion von x, die wieder wie in Nr. 13 definiert sei für $x < a$. Sie habe aber für $x = a$ *keinen* bestimmten endlichen Grenzwert. Alsdann ist es denkbar, daß y, je näher x wachsend an a heranrückt, immer größere und größere Werte erhält; und wir sagen, daß $f(x)$ für $x = a$ den Grenzwert $+\infty$ hat, wenn es stets zu jeder noch so groß gewählten Zahl N ein Intervall $a - h < x < a$ vor a gibt, in dem y überall größer als N ist.

Entsprechendes gilt, wenn $x > a$ ist und *abnehmend* an a heranrückt.

Es kann auch vorkommen, daß $f(x)$, sobald sich x dem Werte a, sei es wachsend oder abnehmend, nähert, nur absolut genommen immer größere Werte erhält und stets negativ ist. Dann werden wir dementsprechend sagen, daß nicht $+\infty$, sondern $-\infty$ der Grenzwert ist.

Wir definieren also so:

Definition: Die Funktion $f(x)$, die für Werte von x $\left\{\begin{matrix}\text{kleiner}\\ \text{größer}\end{matrix}\right\}$ als a definiert ist, erreicht an der Stelle $x = a$ mit $\left\{\begin{matrix}\text{wachsendem}\\ \text{abnehmendem}\end{matrix}\right\}$ x den Grenzwert $+\infty$ bzw. $-\infty$, je nachdem, wie groß man auch eine positive Zahl N wählen mag, stets unmittelbar $\left\{\begin{matrix}\text{vor}\\ \text{nach}\end{matrix}\right\}$ $x = a$ ein Intervall $\left\{\begin{matrix}a - h < x < a\\ a < x < a + h\end{matrix}\right\}$



vorhanden ist, innerhalb dessen $f(x)$ bzw. $-f(x)$ überall größer als N ist.

Fig. 12.

In dieser Definition entsprechen einander natürlich die Vorzeichen von ∞ und von $f(x)$.

Hier ist nun noch, wenn die Stelle $x = a$ *innerhalb* des Variabilitätsbereiches liegt, wie in Nr. 15 hinzuzufügen:

Definition: Die Funktion $f(x)$ hat an einer Stelle $x = a$ ihres Variabilitätsbereiches den Grenzwert $+\infty$ bzw. den Grenzwert $-\infty$, je nachdem, wie groß man auch eine positive Zahl N wählen mag, stets ein Intervall $a - h < x < a + h$ um die Stelle $x = a$ herum vorhanden ist, innerhalb dessen $f(x)$ bzw. $-f(x)$ überall größer als N ist.

1. Beispiel: Die Funktion $y = 1 : (x - a)$ ist für jedes x außer $x = a$ definiert. Siehe Fig. 12. Nähert sich x dem Werte a *wachsend*, so hat y für $x = a$ den Grenzwert $-\infty$, denn wenn N eine beliebig große positive Zahl und h eine positive Zahl kleiner als $1 : N$ bedeutet, so ist im Intervalle $a - h < x < a$ überall $a - x < h$, mithin $1 : (a - x)$ oder $-y > 1 : h$, d. h. $-y > N$. Wenn dagegen x *abnehmend* bis a gelangt, ist der Grenzwert $+\infty$. Denn für jedes x im Intervalle $a < x < a + h$ ist $x - a < h$ oder $y = 1 : (x - a) > 1 : h > N$. Für $x = a$ treten also die beiden Grenzwerte $\pm\infty$ auf.

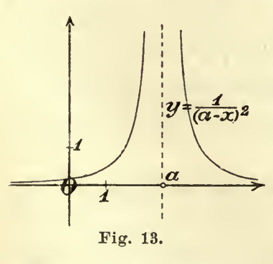


Fig. 13.

2. Beispiel: Die Funktion $y = 1 : (a - x)^2$ hat sowohl

bei zunehmendem als auch bei abnehmendem x für $x = a$ den Grenzwert $+\infty$. Denn wenn wir $h < 1 : |\sqrt{N}|$ wählen, so ist im Intervalle $a - h < x < a + h$ überall $(a - x)^2 < h^2 < 1 : N$, d. h. $y > N$. Siehe Fig. 13.

18. Endlicher Grenzwert bei unendlichem x. Es sei $y = f(x)$ für beliebig große *positive* Werte von x definiert. Es fragt sich dann, ob y einem Grenzwerte A zustrebt, wenn x über jede Zahl wächst. In diesem Falle fordern wir naturgemäß, daß y von A um beliebig wenig abweichen soll, wenn nur x hinreichend groß gewählt wird. Entsprechendes gilt, wenn $y = f(x)$ für zwar absolut genommen beliebig große, aber *negative* Werte von x definiert ist.

Definition: Die Funktion $f(x)$, die für beliebig große positive Werte von x oder aber für absolut genommen beliebig große, aber negative Werte von x definiert ist, hat für $x = +\infty$ bzw. für $x = -\infty$ den bestimmten endlichen Grenzwert A, wenn es stets, wie klein man auch eine positive Zahl σ wählen mag, einen positiven bzw. negativen Wert n derart gibt, daß $f(x)$ für jedes x größer bzw. kleiner als n von A um weniger als σ abweicht: $|f(x) - A| < \sigma$.

Beispiel: Es sei gegeben:

$$y = \frac{1}{1 + \frac{1}{x^2}}.$$

Wenn n positiv ist, so wird für jedes $x > n$, oder, wenn n negativ ist, für jedes $x < n$ auch $x^2 > n^2$, sobald $|n| > 1$ ist, folglich:

$$|y - 1| = \frac{1}{1 + x^2} < \frac{1}{1 + n^2}.$$

Bedeutet nun σ eine beliebig klein gewählte positive Zahl und wird im Falle $n > 0$:

$$n > \left|\sqrt{\frac{1}{\sigma} - 1}\right|,$$

im Falle $n < 0$:

$$n < -\left|\sqrt{\frac{1}{\sigma} - 1}\right|$$

gewählt, so ist für jedes $x > n$ bzw. für jedes $x < -n$ auch $|y - 1| < \sigma$, d. h. y hat für $x = +\infty$ und für $x = -\infty$

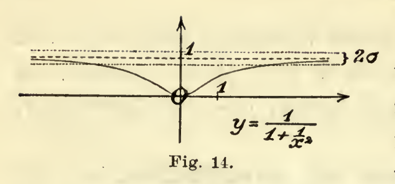


Fig. 14.

den Grenzwert 1. Siehe Fig. 14, wo dies bedeutet: Ziehen wir zur x-Achse parallele Geraden mit den Ordinaten $1 \pm \sigma$, so verläuft die Bildkurve stets, wie klein auch σ gewählt sein mag, für alle x, die absolut genommen größer als $|\sqrt{1 : \sigma - 1}|$ sind, in dem Streifen zwischen beiden Geraden.

19. Unendlicher Grenzwert bei unendlichem x. Gibt es keinen endlichen Grenzwert A wie in Nr. 18 für $x = +\infty$ oder $x = -\infty$, so kann es sein, daß die Funktion $f(x)$ nach $+\infty$ oder $-\infty$ strebt. Wir sagen nämlich:

Definition: Die Funktion $f(x)$ hat für $x = \begin{Bmatrix} +\infty \\ -\infty \end{Bmatrix}$ den Grenzwert $+\infty$ bzw. $-\infty$, wenn es stets, wie groß man auch eine positive Zahl N wählen mag, einen $\begin{Bmatrix} \text{positiven} \\ \text{negativen} \end{Bmatrix}$ Wert n derart gibt, daß $f(x)$ bzw. $-f(x)$ für jedes x $\begin{Bmatrix} \text{größer} \\ \text{kleiner} \end{Bmatrix}$ als n größer als N ist.

Aber ebenso, wie es vorkommen kann, daß eine Funktion $f(x)$ für ein endliches x weder einen endlichen Grenzwert A noch den Grenzwert $+\infty$ oder $-\infty$ hat, kann es auch sein, daß $f(x)$ für $x = +\infty$ oder $x = -\infty$ weder einen endlichen Grenzwert A noch den Grenzwert $+\infty$ oder $-\infty$ hat. Z. B. ist es so bei der Funktion $\sin x$, von der für $x = \pm\infty$ dasselbe gilt, wie von der Funktion $\sin(1:x)$ für $x = 0$ (vgl. 4. Beispiel, Nr. 13 und 14).

Da hier die Symbole $+\infty$ und $-\infty$ aufgetreten sind, ist hervorzuheben, daß sie *nicht* alle Rechenregeln erfüllen, die für Zahlen gelten. Ist z. B. a endlich, so folgt aus $a + b = a$ notwendig $b = 0$. Dies gilt jedoch nicht mehr, wenn $a = \pm\infty$ ist. *Wenn daher im folgenden Zahlen oder Buchstaben $a, b, \ldots$ benutzt werden, so sollen die Symbole $+\infty$ und $-\infty$ stets ausgeschlossen sein.*

§ 5. Stetigkeit.

20. Stetigkeit von Funktionen einer Veränderlichen. Wenn wir auch in Nr. 13 zunächst voraussetzten, daß

die betrachtete Funktion $f(x)$ für denjenigen Wert $x = a$, für den wir ihren Grenzwert untersuchten, nicht definiert sei, so können wir doch auch an *jeder* Stelle x, wo $f(x)$ definiert ist, nach dem Grenzwerte lim $f(x)$ fragen. Er braucht durchaus nicht mit dem Werte, den $f(x)$ selbst an der fraglichen Stelle hat, übereinzustimmen, da er sich ja nicht aus diesem Werte, sondern aus denjenigen Werten ergibt, die der Funktion in einem Intervalle *vor* bzw. *nach* der betrachteten Stelle zukommen.

Wir könnten z. B. eine Funktion $f(x)$ so definieren: Es soll für irgend ein x ihr Wert gleich x^3 sein, *nur für* $x = 0$ *soll ihr Wert gleich Eins sein.* Da dann für jedes x der Funktionswert definiert ist, so liegt tatsächlich eine Funktion vor. Nun ist aber lim $x^3 = 0$ für $x = 0$, vgl. Nr. 15, während die Funktion für $x = 0$ nach Definition den Wert Eins hat. Der Grenzwert der Funktion für $x = 0$ stimmt also *nicht* mit dem Funktionswerte für $x = 0$ überein.

Wenn wir wie in Nr. 15 unter dem Grenzwerte A von $f(x)$ an der Stelle $x = a$ denjenigen Grenzwert verstehen, der sich in gleicher Weise ergibt, ob x bis a zu- oder abnimmt, so werden wir nun die *Stetigkeit* der Funktion definieren, indem wir bedenken, daß durch sie der Zusammenhang der Werte der Funktion für verschiedene unmittelbar benachbarte Werte von x zum Ausdrucke gebracht werden soll. Wir sagen:

Definition: Die Funktion $f(x)$, die in einem Intervalle $b < x < c$ definiert ist, heißt an der Stelle $x = a$ innerhalb dieses Intervalles stetig, wenn sie erstens für $x = a$ einen bestimmten endlichen Grenzwert hat und wenn zweitens dieser Grenzwert übereinstimmt mit demjenigen Werte $f(a)$, der der Funktion an der Stelle $x = a$ vorgeschrieben ist:

$$\lim_{x=a} f(x) = f(a).$$

Erinnern wir uns an die in Nr. 15 gegebene Definition des Grenzwertes, so folgt:

Satz 3: Ist die Funktion $f(x)$ in dem Intervalle $b < x < c$ definiert, so ist sie an der Stelle $x = a$ innerhalb des Intervalles dann und nur dann stetig, wenn es stets, wie klein man auch eine positive Zahl σ wählen mag, ein Intervall $a - h < x < a + h$

[**20**

um a herum derart gibt, daß für jedes x innerhalb dieses Intervalles

$$|f(x) - f(a)| < \sigma$$

ist.

Umgekehrt kann man diesen Satz als Definition der Stetigkeit benutzen und alsdann die vorhin gegebene Definition als Folgerung hieraus ableiten. Aus diesem Satze folgt, daß die Bildpunkte der Funktion $f(x)$ in der Umgebung einer Stelle $x = a$, wo die Funktion stetig ist, so liegen: Wählen wir σ beliebig klein und ziehen wir diejenigen Parallelen zur x-Achse, deren Ordinaten gleich $f(a) + \sigma$ und $f(a) - \sigma$ sind, so gibt es stets eine positive Zahl h derart, daß *alle* Bildpunkte, die sich für $a - h < x < a + h$ ergeben, innerhalb des von jenen beiden Geraden bestimmten Streifens liegen, siehe Fig. 15. Anders ausgedrückt: Ziehen wir noch die Parallelen zur y-Achse mit den Abszissen $a - h$ und $a + h$, so erhalten wir ein *Rechteck* (in der Figur schraffiert), innerhalb dessen alle erwähnten Bildpunkte liegen.

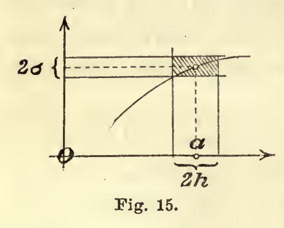


Fig. 15.

Wie klein man auch die Höhe 2σ des Rechtecks wählen mag, stets gehört dazu eine gewisse Breite $2h$ des Rechtecks.

21. Sätze über stetige Funktionen von einer Veränderlichen. Da σ in dem Satze der vorigen Nummer beliebig klein gewählt werden kann, so weicht $f(x)$ von $f(a)$ im Intervalle $a - h < x < a + h$ um beliebig wenig ab. Ist $f(a) \neq 0$, so können wir σ kleiner als den absoluten Betrag von $f(a)$ annehmen, so daß folglich $f(x)$ im Intervalle $a - h < x < a + h$ dasselbe Vorzeichen wie $f(a)$ hat. Daher:

Satz 4: Ist $f(x)$ an der Stelle $x = a$ stetig und überdies von Null verschieden, so gibt es ein solches Intervall $a - h < x < a + h$ um $x = a$ herum, innerhalb dessen $f(x)$ überall dasselbe Vorzeichen wie $f(a)$ hat.

Wenn nun $f(x)$ wieder in einem gewissen Intervalle stetig ist und an zwei Stellen x_0 und x_1 des Intervalles verschiedene Vorzeichen hat, so läßt sich beweisen, daß $f(x)$ zwischen x_0 und x_1 an mindestens einer Stelle gleich Null ist. Wenn wir nämlich das Intervall von x_0 bis x_1 halbieren, so kommen wir

zu einem Werte x_2, für den $f(x_2)$ positiv oder negativ oder gleich Null sein kann. Im dritten Falle wäre die Behauptung erfüllt; wir sehen daher von ihm ab. Alsdann folgt daraus, das $f(x_0)$, $f(x_2)$ und $f(x_1)$ sämtlich von Null verschieden sind, daß entweder $f(x_0)$ und $f(x_2)$ oder aber $f(x_1)$ und $f(x_2)$ verschiedene Vorzeichen haben. Eines der beiden Intervalle von x_0 bis x_2 und von x_2 bis x_1 ist also wieder so beschaffen, daß $f(x)$ an seinen Enden verschiedene Vorzeichen hat. Außerdem ist dies Intervall halb so groß wie das von x_0 bis x_1. In dem neuen Intervalle können wir nun dieselbe Betrachtung wie im ursprünglichen, von x_0 bis x_1 erstreckten, anstellen, d. h. durch Halbieren leiten wir aus ihm ein Intervall ab, an dessen Enden $f(x)$ wieder verschiedene Vorzeichen hat. Das neue Intervall ist nur $1/4$ so lang wie das ursprüngliche. So fahren wir fort; es ergibt sich, daß wir immer kürzere und kürzere Intervalle erhalten, an deren Enden $f(x)$ verschiedene Vorzeichen hat. Alle diese Intervalle, von denen jedes folgende im vorhergehenden eingeschlossen ist, haben nach Nr. 2 oder Nr. 3 *einen* Wert x' gemein, da sie, wie dort erläutert wurde, eine rationale oder irrationale Zahl x' definieren. Es gibt also ein beliebig kurzes und x' enthaltendes Intervall, an dessen Enden $f(x)$ verschiedene Vorzeichen hat. Es habe etwa die Länge $2k$. Da nun $f(x)$ in dem ganzen Gebiete von x_0 bis x_1 stetig ist, so läßt sich, wenn σ eine beliebig kleine positive Zahl ist, stets ein solches Intervall $x' - h < x < x' + h$ um x' herum abgrenzen, innerhalb dessen $f(x)$ von $f(x')$ um weniger als σ abweicht. Dies Intervall von der Länge $2h$ schließt aber das vorhin erwähnte von der Länge $2k$ in sich ein, weil letzteres ja beliebig kurz gemacht werden konnte. Also weichen $f(x' - k)$ und $f(x' + k)$ von $f(x')$ um weniger als σ ab. Wäre nun $f(x') \neq 0$, so könnten wir $\sigma < |f(x')|$ annehmen, so daß $f(x' - k)$ und $f(x' + k)$ dasselbe Vorzeichen wie $f(x')$ hätten. Aber sie haben verschiedene Vorzeichen. Die Annahme $f(x') \neq 0$ führt also zu einem Widerspruche. Daher ist $f(x') = 0$. Mithin:

Satz 5: Ist $f(x)$ in einem Intervalle $x_0 \leqq x \leqq x_1$ stetig und haben $f(x_0)$ und $f(x_1)$ verschiedene Vorzeichen, so gibt es mindestens einen Wert von x zwischen x_0 und x_1, für den $f(x)$ gleich Null ist.

[**21**

Es sei $y = f(x)$ wieder für x_0 und x_1 und im ganzen Intervalle von x_0 bis x_1 stetig. Ferner sei etwa $f(x_0) = A$ und $f(x_1) = B$. Es werde irgend eine Zahl C zwischen A und B herausgegriffen, d. h. es sei, wenn wir etwa $A < B$ annehmen:

$$A < C < B.$$

Betrachten wir nun die Funktion

$$F(x) = f(x) - C.$$

Sie ist wie $f(x)$ selbst stetig von x_0 bis x_1. Für x_0 hat sie den Wert $f(x_0) - C = A - C < 0$ und für x_1 den Wert $f(x_1) - C = B - C > 0$, d. h. $F(x)$ hat in x_0 und x_1 *verschiedene* Vorzeichen. Wenden wir auf $F(x)$ den letzten Satz an, so folgt, daß es mindestens einen Wert x im Intervalle $x_0 < x < x_1$ gibt, für den $F(x) = 0$, d. h. $f(x) = C$ ist. Da C beliebig zwischen A und B gewählt war, so folgt:

Satz 6: Ist $f(x)$ eine stetige Funktion von x im Intervalle $x_0 \leqq x \leqq x_1$, so nimmt sie jeden zwischen $f(x_0)$ und $f(x_1)$ gelegenen Wert mindestens einmal an, wenn x das Intervall durchläuft.

22. Stetigkeit von Funktionen von mehreren Veränderlichen. Die Definition der Stetigkeit läßt sich, vgl. Nr. 16 und 20, unmittelbar so verallgemeinern:

Definition: Eine Funktion $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$, die für alle Wertsysteme $x_1, x_2, \ldots x_n$ innerhalb eines gewissen Variabilitätsbereiches definiert ist, heißt an der Stelle $x_1 = a_1, x_2 = a_2, \ldots x_n = a_n$ innerhalb des Variabilitätsbereiches stetig, wenn sie dort erstens einen bestimmten endlichen Grenzwert hat und wenn zweitens dieser Grenzwert übereinstimmt mit demjenigen Werte $f(a_1, a_2, \ldots a_n)$, der der Funktion an dieser Stelle vorgeschrieben ist:

$$\lim f(x_1, x_2, \ldots x_n) = f(a_1, a_2, \ldots a_n) \quad \text{für } x_1 = a_1, x_2 = a_2, \ldots$$

Hieraus folgt:

Satz 7: Ist die Funktion $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ innerhalb eines gewissen Variabilitätsbereiches definiert, so ist sie an der Stelle $x_1 = a_1, x_2 = a_2, \ldots x_n = a_n$ innerhalb des Bereiches dann und nur dann stetig, wenn es stets, wie klein man auch eine positive Zahl σ wählen mag, Intervalle

$$a_1 - h < x_1 < a_1 + h, \quad a_2 - h < x_2 < a_2 + h \text{ usw.}$$

derart gibt, daß für jedes Wertsystem $x_1, x_2, \ldots x_n$ *innerhalb dieser Intervalle*

$$|f(x_1, x_2, \ldots x_n) - f(a_1, a_2, \ldots a_n)| < \sigma$$

ist.

Im Anschlusse hieran wollen wir den folgenden allgemeinen Satz beweisen:

Satz 8: Sind $f_1, f_2, \ldots f_m$ *Funktionen von* $x_1, x_2, \ldots x_n$, *die an der Stelle* $x_1 = a_1, x_2 = a_2, \ldots x_n = a_n$ *stetig sind und dort die Werte* $b_1, b_2, \ldots b_m$ *annehmen, und ist die Funktion* $F(y_1, y_2, \ldots y_m)$ *von* $y_1, y_2, \ldots y_m$ *an der Stelle* $y_1 = b_1, y_2 = b_2, \ldots y_m = b_m$ *stetig, so ist auch* $F(f_1, f_2, \ldots f_m)$ *eine Funktion von* $x_1, x_2, \ldots x_n$, *die an der Stelle* $x_1 = a_1, x_2 = a_2, \ldots x_n = a_n$ *stetig ist.*

Ist nämlich σ eine beliebig klein gewählte positive Zahl. so gibt es eine positive Zahl k derart, daß

$$|F(y_1, \ldots y_m) - F(b_1, \ldots b_m)| < \sigma$$

wird für jedes Wertsystem der y, das den Bedingungen genügt:

$$|y_1 - b_1| < k, \ldots |y_m - b_m| < k.$$

Aber jedes $y_i = f_i(x_1, \ldots x_n)$ ist an der Stelle $x_1 = a_1, \ldots x_n = a_n$ stetig und nimmt dort den Wert b_i an. Also gibt es eine positive Zahl h derart, daß

$$|f_i(x_1, \ldots x_n) - f_i(a_1, \ldots a_n)| < k$$

wird, sobald

$$|x_1 - a_1| < h, \ldots |x_n - a_n| < h$$

ist. Folglich gibt es zu jeder beliebig kleinen positiven Zahl σ eine positive Zahl h derart, daß:

$$|F(f_1(x), \ldots f_m(x)) - F(f_1(a), \ldots f_m(a))| < \sigma$$

wird für jedes Wertsystem der x, das den Bedingungen

$$|x_1 - a_1| < h, \ldots |x_n - a_n| < h$$

genügt. Hiermit ist der Satz bewiesen.

23. Beispiele von stetigen Funktionen.

Satz 9: Das Produkt von x *und einer Konstanten* C, *also* Cx, *ist für jeden Wert* x *eine stetige Funktion von* x.

Die Kurve $y = Cx$ ist eine im Winkel $\operatorname{arc\,tg} C$ gegen die positive Richtung der x-Achse geneigte gerade Linie, die an keiner Stelle eine Unstetigkeit aufweist. Der Beweis für den

Satz liegt darin, daß $\lim Cx = Ca$ für $\lim x = a$ ist. Um aber dies zu erkennen, braucht man nur eine positive Zahl h so zu finden, daß $|Cx - Ca| = |C(x-a)|$ kleiner wird als irgend eine vorgegebene positive Zahl σ, wenn nur $a - h < x < a + h$ ist. Eine solche Zahl h ist die Zahl $\sigma : |C|$.

Satz 10: Eine Konstante C ist für jeden Wert x eine stetige Funktion von x.

Die Bildkurve ist hier die Parallele zur x-Achse mit der Ordinate C.

Satz 11: $x_1 + x_2$ *ist an jeder Stelle eine stetige Funktion von* x_1 *und* x_2.

Geometrisch wird der Verlauf der Funktion $y = x_1 + x_2$ durch eine Ebene dargestellt, die durch den Anfangspunkt O hindurchgeht und gegen die Achsen in leicht zu bestimmender Weise geneigt ist. Die Anschauung läßt an keiner Stelle der Ebene eine Unstetigkeit erkennen. Zum Beweise des Satzes verstehen wir unter σ eine beliebig kleine vorgeschriebene positive Zahl und setzen $h = \frac{1}{2}\sigma$. Dann wird für jedes Wertsystem x_1, x_2, das den Bedingungen $|x_1 - a_1| < h$, $|x_2 - a_2| < h$ genügt, auch nach Satz 2 in Nr. 4:

$$|(x_1 + x_2) - (a_1 + a_2)| \leqq |x_1 - a_1| + |x_2 - a_2| < 2h = \sigma.$$

Satz 12: Sind $f_1(x_1, \ldots x_n)$ *und* $f_2(x_1, \ldots x_n)$ *an der Stelle* $x_1 = a_1, \ldots x_n = a_n$ *stetig, so gilt dasselbe von ihrer Summe:* $f_1(x_1, \ldots x_n) + f_2(x_1, \ldots x_n)$.

Setzt man nämlich:

$$y_1 = f_1(x_1, \ldots x_n), \quad y_2 = f_2(x_1, \ldots x_n),$$
$$b_1 = f_1(a_1, \ldots a_n), \quad b_2 = f_2(a_1, \ldots a_n)$$

und

$$F(y_1, y_2) = y_1 + y_2,$$

so sind laut Annahme f_1 und f_2 an der Stelle $x_1 = a_1, \ldots x_n = a_n$ stetig und nehmen dort die Werte b_1, b_2 an. $y_1 + y_2$ ist aber nach dem vorigen Satze an der Stelle $y_1 = b_1$, $y_2 = b_2$ stetig. Also gelten die Voraussetzungen von Satz 8 in Nr. 22, und es folgt, daß auch

$$F(f_1, f_2) = f_1 + f_2$$

an der Stelle $x_1 = a_1, \ldots x_n = a_n$ stetig ist.

Satz 13: Sind $f_1, f_2, \ldots f_m$ *an der Stelle* $x_1 = a_1, \ldots x_n = a_n$ *stetig, so gilt dasselbe von ihrer Summe:* $f_1 + f_2 + \ldots + f_m$.

Ist der Satz bereits für $f_1, f_2, \ldots f_{m-1}$ bewiesen, so weiß man, daß $f_1 + f_2 + \cdots + f_{m-1}$ an der Stelle $x_1 = a_1, \ldots x_n = a_n$ stetig ist. Dasselbe gilt von f_m, also nach Satz 12 auch von $f_1 + f_2 + \cdots + f_{m-1} + f_m$. Nun gilt der Satz für $m = 2$, also gilt er auch für $m = 3$, usw.

Satz 14: Das Produkt $x_1 x_2$ ist an jeder Stelle eine stetige Funktion von x_1 und x_2.

Zunächst nämlich ist unmittelbar klar, daß $x_1 x_2$ an der Stelle $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ stetig ist. Denn setzt man $h = |\sqrt{\sigma}|$, so wird $|x_1 x_2| < \sigma$ für jedes Wertepaar x_1, x_2, das den Bedingungen $|x_1| < h$, $|x_2| < h$ genügt. $x_1 x_2$ ist aber auch an jeder anderen Stelle $x_1 = a_1$, $x_2 = a_2$ stetig. Denn das Produkt $(x_1 - a_1)(x_2 - a_2)$ ist an dieser Stelle stetig; nach Satz 9 sind aber auch $a_1 x_2$ und $a_2 x_1$, nach Satz 10 auch $-a_1 a_2$ an derselben Stelle stetig. Also ist nach Satz 13 auch die Summe

$$x_1 x_2 = (x_1 - a_1)(x_2 - a_2) + a_1 x_2 + a_2 x_1 - a_1 a_2$$

an derselben Stelle stetig.

Mit Hilfe von Satz 8 in Nr. 22 schließt man wie nach Satz 12:

Satz 15: Sind $f_1(x_1, \ldots x_n)$ und $f_2(x_1, \ldots x_n)$ an der Stelle $x_1 = a_1, \ldots x_n = a_n$ stetig, so gilt dasselbe von ihrem Produkte $f_1(x_1, \ldots x_n) \cdot f_2(x_1, \ldots x_n)$.

Und durch den Schluß von m auf $m+1$ ergibt sich wie Satz 13:

Satz 16: Sind $f_1, f_2, \ldots f_m$ an der Stelle $x_1 = a_1, \ldots x_n = a_n$ stetig, so gilt dasselbe von ihrem Produkte $f_1 f_2 \ldots f_m$.

Da eine Konstante C ebenso wie $x_1, x_2, \ldots x_n$ für alle Stellen $x_1 = a_1, \ldots x_n = a_n$ stetig ist, so gilt dasselbe von einem Produkte von beliebig vielen dieser Funktionen:

$$C \cdot x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n},$$

wenn $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ positive ganze Zahlen bedeuten. Addiert man irgend eine endliche Anzahl von solchen Termen, so entsteht nach Satz 13 eine stetige Funktion der x und zwar nach Nr. 6 eine ganze rationale Funktion. Also:

Satz 17: Eine ganze rationale Funktion von mehreren Veränderlichen ist überall stetig.

Ferner gilt der

Satz 18: Die Funktion $1 : x$ ist überall mit Ausnahme der Stelle $x = 0$ stetig.

Wir brauchen diesen Satz nur für $x = a > 0$ zu beweisen, denn wenn a negativ ist, beweisen wir ihn zuerst für die Funktion $-1 : x$ und positives x. Ist nun $a > 0$ und bedeutet σ eine beliebig klein gewählte positive Zahl, so nehmen wir

$$h = \frac{a^2\sigma}{1 + a\sigma},$$

also positiv, an. Dann ist $a - h = a : (1 + a\sigma) > 0$, d. h. das Intervall $a - h < x < a + h$ enthält nur positive Werte von x. Deshalb ist in ihm auch

$$\frac{1}{x} < \frac{1}{a-h} \text{ und } \frac{1}{x} > \frac{1}{a+h}.$$

Wegen des gewählten Wertes von h folgt hieraus:

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{a} < \sigma \text{ und } \frac{1}{x} - \frac{1}{a} > \frac{-\sigma}{1 + 2a\sigma}.$$

Da $1 + 2a\sigma > 1$ ist, so wird der absolute Betrag des letzten Bruches kleiner als σ. Also ist für jedes x im Intervalle $a - h < x < a + h$:

$$\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{a}\right| < \sigma.$$

Für $a = 0$ dagegen versagt der Beweis.

Satz 19: Ist $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ an der Stelle $x_1 = a_1, \ldots x_n = a_n$ stetig und von Null verschieden, so gilt dasselbe von dem reziproken Werte $1 : f(x_1, x_2, \ldots x_n)$.

Der Satz folgt sofort aus Satz 18 und Satz 8 in Nr. 22.

Ist $f(x_1, \ldots x_n)$ eine ganze rationale Funktion, so ist daher $1 : f$ nach Satz 17 stetig an allen Stellen, an denen f nicht gleich Null ist. Ist $g(x_1, \ldots x_n)$ eine zweite ganze rationale Funktion, so ist diese überall stetig. Also ist nach Satz 15 das Produkt $g \cdot (1 : f)$, d. h. der Bruch $g : f$ stetig an allen Stellen, an denen f nicht verschwindet. Daher:

Satz 20: Eine rationale Funktion von mehreren Veränderlichen ist stetig an allen Stellen, an denen ihr Nenner nicht verschwindet.

Wir behaupten ferner:

Satz 21: Wenn die Funktion $f(x)$, während x alle Werte des Intervalles $a \leqq x \leqq b$ durchläuft, alle Werte von A bis B annimmt, dabei stets bestimmte endliche Werte hat und überdies stets zunimmt, so ist sie stetig an jeder Stelle innerhalb des Intervalles von a bis b.

23]

Ist nämlich $x = x_0$ irgend eine Stelle im Innern des Intervalles von a bis b und $x_1 > x_0$ eine zweite solche Stelle, so bilde man die nach Vorausssetzung positive Differenz

$$f(x_1) - f(x_0) = \tau.$$

Ist nun σ eine beliebig klein gewählte positive Zahl, so kann *erstens* $\tau \leqq \sigma$ sein. Alsdann ist bereits $0 < f(x) - f(x_0) < \sigma$ für jedes x im Intervalle $x_0 < x < x_1$. Ist dagegen *zweitens* $\tau > \sigma$, so wird nach Voraussetzung, während x alle Werte von x_0 bis x_1 durchläuft, $f(x) - f(x_0)$ beständig wachsend alle Zahlen von 0 bis τ passieren. Für eine bestimmte Stelle $x = x_0 + h_1$ zwischen x_0 und x_1 wird daher jene Differenz einmal den Wert σ annehmen, und für jedes x im Intervalle $x_0 < x < x_0 + h_1$ ist dann wieder $0 < f(x) - f(x_0) < \sigma$. Betrachtet man eine Stelle $x_2 < x_0$, so findet man ebenso: es gibt eine positive Zahl h_2, so daß $0 < f(x_0) - f(x) < \sigma$ ist für jedes x im Intervalle $x_0 - h_2 < x < x_0$.

Nimmt man nun h gleich der kleineren der beiden Zahlen h_1 und h_2 an, so ist folglich

$$|f(x) - f(x_0)| < \sigma$$

für jedes x im Intervalle $x_0 - h < x < x_0 + h$.

Ersetzt man $f(x)$ durch $-f(x)$, so ergibt sich sofort:

Satz 22: Wenn die Funktion $f(x)$, während x alle Werte von a bis b durchläuft, alle Werte von A bis B annimmt, dabei immer bestimmte endliche Werte hat und überdies beständig kleiner wird, so ist sie stetig an jeder Stelle innerhalb des Intervalles von a bis b.

Aus den letzten beiden Sätzen ergibt sich nach Nr. 8:

Satz 23: Die stets positive Funktion a^x ist stetig an jeder Stelle x, wenn a eine positive Zahl ist.

Ist nämlich $a = 1$, so ist die Funktion konstant, nämlich gleich Eins; wir kommen dann auf Satz 10 zurück.

Ist dagegen $a \neq 1$, so gilt für jedes noch so große Intervall, in dem man x variieren läßt, der Satz 21 oder 22. Denn für $a > 1$ wächst a^x beständig, es gilt also Satz 21; ist $a < 1$ so nimmt a^x beständig ab, es gilt also Satz 22.

Satz 24: Die Funktion $\sin x$ ist stetig an jeder Stelle x.

Denn im Intervalle von 0 bis $\frac{1}{2}\pi$ wächst der Sinus, es gilt Satz 21; von $\frac{1}{2}\pi$ bis π nimmt der Sinus ab, es gilt Satz 22.

Der Sinus ist also an jeder Stelle zwischen 0 und $\frac{1}{2}\pi$ und zwischen $\frac{1}{2}\pi$ und π stetig. Er ist aber auch an der Stelle $x = \frac{1}{2}\pi$ stetig, denn $\sin x$ hat den Grenzwert Eins sowohl, wenn x bis $\frac{1}{2}\pi$ wächst, als auch, wenn x bis $\frac{1}{2}\pi$ abnimmt, während auch $\sin \frac{1}{2}\pi = 1$ ist. Analog erkennt man, daß der Sinus für $x = 0$ und $x = \pi$ stetig ist. Die Formeln

$$\sin(2\pi - x) = -\sin x, \quad \sin x = \sin(x + 2k\pi),$$

in denen k eine ganze Zahl bedeutet, lehren jetzt, daß der Sinus auch für alle anderen, aus dem Intervalle $0 \leqq x \leqq \pi$ heraustretenden Werte x stetig ist.

Satz 25: Die Funktion $\cos x$ *ist stetig an jeder Stelle* x.

Denn es ist $\cos x = \sin(\frac{1}{2}\pi - x)$.

Satz 26: Die Funktion $\operatorname{tg} x$ *ist stetig an jeder Stelle, die von* $\frac{1}{2}\pi + k\pi$ *verschieden ist; die Funktion* $\operatorname{ctg} x$ *ist stetig an jeder Stelle, die von* $k\pi$ *verschieden ist. Dabei bedeutet* k *eine beliebige ganze Zahl.*

Denn es ist:

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}.$$

Der Bruch von zwei stetigen Funktionen ist nach Satz 15 und 19 stetig an jeder Stelle, an der der Nenner nicht gleich Null ist; $\cos x$ wird aber gleich Null für $x = \frac{1}{2}\pi + k\pi$ und $\sin x$ für $x = k\pi$.

Satz 27: Die Funktion ${}^a\log x$ *ist für jedes positive* x *stetig.*

Ist nämlich zunächst $a > 1$, so nimmt ${}^a\log x$ nach Nr. 11 wachsend alle reellen Zahlwerte an, wenn x von Null wachsend alle positiven Zahlen durchläuft. Es findet also Satz 21 Anwendung. Ist $a < 1$, so gilt Satz 22.

Satz 28: Die zyklometrischen Funktionen sind stetig für alle Werte x, *für die sie definiert sind.*

Dieser Satz ergibt sich sofort durch Anwendung der Sätze 21 und 22, wenn die zyklometrischen Funktionen zunächst im engeren Sinne so wie in Nr. 12 definiert werden. Da die übrigen Werte der zyklometrischen Funktionen aus diesen nach Nr. 12 durch Addition ganzer Vielfacher von π und eventuelle Multiplikation mit -1 hervorgehen, gilt der Satz folglich für jedes der Intervalle, die man den Funktionen nach Nr. 12 vorzuschreiben hat.

23]

§ 6. Das Rechnen mit Grenzwerten.

24. Rechenregeln für den Limes. Ist F eine Funktion von $y_1, y_2, \ldots y_m$, die an der Stelle $y_1 = b_1, \ldots y_m = b_m$ stetig ist, so ist an dieser Stelle nach Nr. 22:

$$\lim F(y_1, y_2, \ldots y_m) = F(b_1, b_2, \ldots b_m).$$

Sind nun die y ihrerseits solche Funktionen von $x_1, \ldots x_n$:

$$y_1 = f_1(x_1, \ldots x_n), \ldots y_m = f_m(x_1, \ldots x_n),$$

die an der Stelle $x_1 = a_1, \ldots x_n = a_n$ die Grenzwerte $b_1, b_2, \ldots b_m$ haben, so ist für alle f an dieser Stelle:

$$\lim f_i(x_1, \ldots x_n) = b_i$$

und daher:

$$\lim F(y_1, \ldots y_m) = F(\lim f_1, \ldots \lim f_m)$$

oder auch:

$$\lim F(f_1, \ldots f_m) = F(\lim f_1, \ldots \lim f_m).$$

Die Limites beziehen sich jetzt auf beiden Seiten darauf, daß die Stelle $(x_1, \ldots x_n)$ in die Stelle $(a_1, \ldots a_n)$ hineinrücken soll. Es gilt also der

Satz 29: Wenn die Funktionen $f_1(x_1, \ldots x_n), \ldots f_m(x_1, \ldots x_n)$ an der Stelle $x_1 = a_1, \ldots x_n = a_n$ bestimmte endliche Grenzwerte $b_1, \ldots b_m$ haben und $F(y_1, \ldots y_m)$ als Funktion der y an der Stelle $y_1 = b_1, \ldots y_m = b_m$ stetig ist, so ist an der Stelle $x_1 = a_1, \ldots x_n = a_n$ auch: $\lim F(f_1, \ldots f_m) = F(\lim f_1, \ldots \lim f_m)$.

Man kann also das Limes-Zeichen vor F durch die Limes-Zeichen vor $f_1, f_2, \ldots f_m$ ersetzen und umgekehrt.

Ist z. B. $F = y_1 + y_2$, so folgt:

$$\lim (f_1 + f_2) = \lim f_1 + \lim f_2,$$

in Worten:

Satz 30: Wenn $f_1(x_1, \ldots x_n)$ und $f_2(x_1, \ldots x_n)$ an der Stelle $x_1 = a_1, \ldots x_n = a_n$ bestimmte endliche Grenzwerte haben, so ist der Grenzwert der Summe von f_1 und f_2 gleich der Summe der Grenzwerte von f_1 und f_2.

Unter derselben Voraussetzung ergibt sich:

$$\lim (C \cdot f) = C \cdot \lim f,$$

wo C eine Konstante bedeutet, ferner:

$$\lim (f_1 \cdot f_2) = \lim f_1 \cdot \lim f_2,$$

in Worten:

Satz 31: Der Grenzwert eines Produktes ist gleich dem Produkte der Grenzwerte der Faktoren.

Und, wenn außerdem $\lim f_2 \neq 0$ ist:

$$\lim \frac{f_1}{f_2} = \frac{\lim f_1}{\lim f_2},$$

in Worten:

Satz 32: Der Grenzwert eines Quotienten ist gleich dem Quotienten der Grenzwerte von Dividend und Divisor.

Überhaupt gilt nach Satz 17 in Nr. 23:

Satz 33: Wenn $f_1, f_2, \ldots f_m$ an der Stelle $x_1 = a_1, \ldots x_n = a_n$ bestimmte endliche Grenzwerte haben und F eine ganze rationale Funktion von $f_1, f_2, \ldots f_m$ bedeutet, so ist

$$\lim F(f_1, \ldots f_m) = F(\lim f_1, \ldots \lim f_m).$$

25. Bestimmung des Grenzwertes durch Einengung. Von Wichtigkeit ist der folgende Satz, den wir der Bequemlichkeit halber nur für Funktionen von nur *einer* Veränderlichen aussprechen, obwohl es augenscheinlich ist, daß er ebenso für beliebig viele Veränderliche gilt.

Satz 34: Ist $\lim\limits_{x=a} f(x) = A$ und $\lim\limits_{x=a} g(x) = A$ und für alle Werte von x in einem Intervalle $a - h < x < a + h$ außerdem $f(x) \leqq \varphi(x) \leqq g(x)$, so ist auch $\lim\limits_{x=a} \varphi(x) = A$.

Nach Voraussetzung nämlich ist für ein beliebig kleines positives σ:

$$|f(x) - A| < \sigma, \qquad |g(x) - A| < \sigma$$

für *jedes* x innerhalb eines Intervalles $a - k < x < a + k$, wo $0 < k < h$ ist. Für jedes solche x ist also

$$-\sigma < f(x) - A < +\sigma, \qquad -\sigma < g(x) - A < +\sigma.$$

Aber aus

$$f(x) \leqq \varphi(x) \leqq g(x)$$

folgt:

$$f(x) - A \leqq \varphi(x) - A \leqq g(x) - A.$$

Demnach ist auch

$$-\sigma < \varphi(x) - A < +\sigma$$

oder:

$$\lim_{x=a} \varphi(x) = A.$$

26. Anwendung. Wie man durch Vergleichung der Inhalte des zu dem Bogen x gehörigen Kreissektors in Fig. 3, S. 15, und der von den Strecken $\sin x$ und $\operatorname{tg} x$ begrenzten rechtwinkligen Dreiecke erkennt, ist für $0 \leqq x < \frac{1}{2}\pi$:

$$\sin x \cos x \leqq x \leqq \operatorname{tg} x$$

und daher, weil $\sin x$ positiv ist:

$$\cos x \leqq \frac{x}{\sin x} \leqq \frac{1}{\cos x}.$$

Ist dagegen $-\frac{1}{2}\pi \leqq x \leqq 0$, so gelten die umgekehrten Zeichen.

Da aber $\lim\limits_{x=0} \cos x = 1$ und $\lim\limits_{x=0} \frac{1}{\cos x} = 1$ ist, so folgt:

$$\lim_{x=0} \frac{x}{\sin x} = 1 \quad \text{oder} \quad \lim_{x=0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Ferner ist

$$\frac{x}{\operatorname{tg} x} = \frac{x}{\sin x} \cdot \cos x$$

und daher:

$$\lim_{x=0} \frac{x}{\operatorname{tg} x} = \lim_{x=0} \frac{x}{\sin x} \cdot \lim_{x=0} \cos x,$$

woraus folgt:

$$\lim_{x=0} \frac{x}{\operatorname{tg} x} = 1 \quad \text{oder} \quad \lim_{x=0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1.$$

Zweites Kapitel.

Differentialquotient einer Funktion von einer Veränderlichen.

---

§ 1. Die abgeleitete Funktion.

27. Definition der Ableitung. Gegeben sei eine Funktion $f(x)$, die für alle Zahlen x in einem bestimmten Intervalle definiert ist. Fig. 16 mag den Verlauf der Funktion geometrisch versinnlichen. Ist x $(= OP)$ ein bestimmter Wert der unabhängigen Veränderlichen, so ist $f(x)$ $(= PM)$ der zugehörige Funktionswert. Lassen wir jetzt x um eine (positive oder negative) Zahl zunehmen, etwa um h $(= PP')$, so wird $f(x+h)$ $(= P'M')$ der zu $x + h$ $(= OP')$ gehörige Funktionswert sein. Der Zunahme h $(= MQ)$ der unabhängigen Veränderlichen x entspricht also die Zunahme $f(x+h) - f(x)$ $(= QM')$ des Funktionswertes. Der Quotient beider Zunahmen:

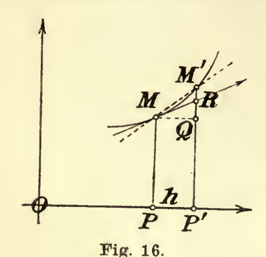


Fig. 16.

$$\frac{QM'}{MQ} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

ist eine gewisse Funktion $F(x, h)$ der beiden Veränderlichen x und h und bedeutet den Tangens des Winkels, den die Sehne MM' mit der positiven Richtung MQ der Abszissenachse bildet. Hat nun $F(x, h)$, als Funktion von h betrachtet, an der Stelle $h = 0$ einen bestimmten endlichen Grenzwert, so wird dieser eine Funktion von x allein:

$$\lim_{h=0} F(x, h) = f'(x).$$

Dieser Grenzwert heißt die *Ableitung* der Funktion $f(x)$ und wird allgemein einfach mit $f'(x)$ bezeichnet.

Geometrisch gibt er den Tangens des Winkels an, den *die Tangente MR* im Punkte M der Kurve mit der positiven Richtung der x-Achse bildet. Denn wenn sich h immer mehr der Null nähert, so rückt M' nach M; die Gerade, auf der die Sehne MM' liegt, dreht sich dabei um M, bis sie in eine Grenzlage MR kommt, die man die Tangente von M nennt.

Man definiert also:

Definition: Hat an einer bestimmten Stelle x der Quotient von $f(x+h)-f(x)$ und h für den Wert $h=0$ einen Grenzwert:

$$f'(x) = \lim_{h=0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h},$$

so heißt dieser die Ableitung der Funktion $f(x)$ an der Stelle x.

Nach dem, was in Nr. 15 über den Begriff des Grenzwertes gesagt wurde, ist es selbstverständlich, daß sowohl, wenn h von einem positiven Werte aus abnehmend zu Null wird, als auch, wenn h von einem negativen Werte aus wachsend zu Null wird, der Quotient einen bestimmten und jedesmal denselben Grenzwert haben soll. Dies läuft darauf hinaus, daß — unter h eine positive Zahl verstanden — die beiden Ausdrücke:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \quad \text{und} \quad \frac{f(x-h)-f(x)}{-h}$$

Fig. 17.

für bis Null abnehmendes h *denselben* Grenzwert haben sollen.

Liegt z. B. eine Linie vor, die etwa wie in Fig. 17 im Punkte M eine *Ecke* hat, so hat sie in diesem Punkte nicht *eine* bestimmte Tangente, vielmehr wird hier zu unterscheiden sein zwischen einer Tangente zur Rechten MR_1, die aus der Sehne MM_1 entsteht, wenn M_1 nach M hineinrückt, und einer Tangente zur Linken MR_2, die aus der Sehne MM_2 hervorgeht, wenn M_2 nach M hineinrückt.

Im folgenden werden nun, so lange nicht das Gegenteil ausdrücklich bemerkt ist, immer nur solche Funktionen von x betrachtet werden, die mindestens für ein Intervall $x_0 \leqq x \leqq X$ die folgende Forderung erfüllen:

[27

Forderung $\mathfrak{A}$: *Die Funktion* $f(x)$ *hat an jeder Stelle* x *des Intervalles* $x_0 \leqq x \leqq X$ *nicht nur selbst einen bestimmten endlichen Wert, sondern auch eine bestimmte endliche Ableitung.*

Wir werden sehen, daß für die einfacheren Funktionen wie x^n, $\sin x$ usw. die Forderung $\mathfrak{A}$ immer erfüllt ist. Ferner mag noch der folgende Satz angeknüpft werden:

Satz 1: In einem Intervalle, in dem eine Funktion $f(x)$ *die Forderung* $\mathfrak{A}$ *erfüllt, ist sie auch stetig.*

Denn wenn $f'(x)$ an der Stelle $x = a$ einen bestimmten endlichen Wert hat, so ist:

$$\lim_{h=0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a)$$

und mithin infolge des Satzes 29 in Nr. 24:

$$\lim_{h=0} \{f(a+h)-f(a)\} = \lim_{h=0} \left\{\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \cdot h\right\}$$

$$= \lim_{h=0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \cdot \lim_{h=0} h = f'(a) \cdot \lim_{h=0} h = 0.$$

Also kommt:

$$\lim_{h=0} f(a+h) = f(a),$$

und da $f(a)$ endlich sein soll, so ist $f(x)$ nach Nr. 20 an der Stelle $x = a$ auch stetig. Dies gilt für jeden Wert a im Intervalle $x_0 \leqq a \leqq X$.

Hieraus ergibt sich, daß man an einer *Unstetigkeitsstelle* gewiß nicht auf einen bestimmten endlichen Wert der Funktion und der Ableitung rechnen darf.

28. Der Mittelwertsatz. Betrachtet man in Fig. 18 den Kurvenzug m_0M und die Sehne m_0M, so sieht man, daß die Tangenten in den einzelnen Kurvenpunkten von der in m_0 vorhandenen Richtung schließlich in die Richtung der Tangente in M übergehen. Inzwischen wird einmal eine Lage der Tangente, etwa in m_1, eintreten, in der sie der Sehne m_0M parallel wird. Ist x_1 die Abszisse dieses Punktes m_1, sind ferner x_0 und X die Abszissen der Punkte m_0 und M und ist die Kurve das Bild

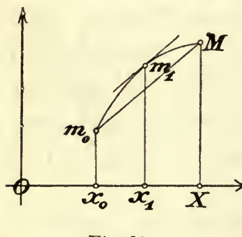


Fig. 18.

der Funktion $f(x)$, so bestimmt die Sehne $m_0 M$ mit der positiven x-Achse einen Winkel, dessen Tangens gleich

$$\frac{f(X) - f(x_0)}{X - x_0}$$

ist. Die Kurventangente in m_1 dagegen bildet mit der positiven x-Achse einen Winkel, dessen Tangens gleich dem Werte $f'(x_1)$ der Ableitung von $f(x)$ im Punkte m_1 ist. Mithin kommt:

$$\frac{f(X) - f(x_0)}{X - x_0} = f'(x_1).$$

Diese Überlegung, die noch kein strenger Beweis ist, führt zu der Vermutung, daß der folgende Satz gelten wird:

Satz 2 (Mittelwertsatz): Hat die Funktion $f(x)$ ebenso wie ihre Ableitung $f'(x)$ für jedes x im Intervalle $x_0 \leqq x \leqq X$ einen bestimmten endlichen Wert, so gibt es im Intervalle wenigstens einen von x_0 und X verschiedenen Wert x_1 von x, für den gilt:

$$\frac{f(X) - f(x_0)}{X - x_0} = f'(x_1).$$

Zum Beweise betrachten wir den Quotienten

$$\frac{f(X) - f(x_0)}{X - x_0},$$

der nach den Voraussetzungen des Satzes einen bestimmten endlichen Wert A hat, so daß

$$(1) \qquad [f(X) - AX] - [f(x_0) - Ax_0] = 0$$

ist. Wir betrachten ferner diejenige Funktion $\varphi(x)$, die durch die Formel:

$$(2) \qquad \varphi(x) = [f(x) - Ax] - [f(x_0) - Ax_0]$$

definiert ist. Nach den Voraussetzungen des Satzes hat sie im Intervalle $x_0 \leqq x \leqq X$ überall bestimmte endliche Werte. Da ferner nach (2):

$$\frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - A,$$

folglich:

$$\lim_{h=0} \frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h} = f'(x) - A$$

ist, so hat $\varphi(x)$ überall im Intervalle $x_0 \leqq x \leqq X$ auch eine bestimmte endliche Ableitung $\varphi'(x) = f'(x) - A$. Außerdem ist $\varphi(x)$ nach (2) gleich Null für $x = x_0$ und wegen (1) auch gleich Null für $x = X$.

Ist $\varphi(x)$, wenn x von x_0 bis X wächst, nicht stets positiv, so kann $\varphi(x)$ z. B. zuerst zunehmen, also positive Werte haben, und später bis zu negativen Werten abnehmen. Dann aber wird nach Satz 5 in Nr. 21 notwendig eine Stelle $x = \xi > x_0$ passiert, wo $\varphi(x)$ zum ersten Male wieder gleich Null wird. Es ist also doch im Intervalle $x_0 \leqq x \leqq X$ ein solches Intervall $x_0 \leqq x \leqq \xi$ enthalten, innerhalb dessen $\varphi(x)$ überall positiv ist. Wenn $\varphi(x)$ dagegen zuerst abnimmt, so beweisen wir ebenso, daß es ein derartiges Intervall gibt, innerhalb dessen $\varphi(x)$ überall negativ ist. Der dritte denkbare Fall ist der, daß $\varphi(x)$ beständig gleich Null bleibt.

Da $\varphi(x)$ stets endlich bleibt, so wird $\varphi(x)$ im ersten Falle im Intervalle $x_0 \leqq x \leqq \xi$ einen gewissen *größten* Betrag nicht überschreiten und im zweiten Falle nicht unter einen gewissen *kleinsten* Betrag hinuntergehen. Es sei x_1 ein solcher Wert von x im Intervalle $x_0 \leqq x \leqq \xi$, für den $\varphi(x)$ den größten bzw. kleinsten Betrag erreicht. Dabei ist x_1 von x_0 verschieden. Wenn nun h eine beliebig klein gewählte positive Zahl ist, so werden also $\varphi(x_1 - h)$ und $\varphi(x_1 + h)$ im ersten Falle beide kleiner als $\varphi(x_1)$ oder höchstens gerade so groß und im zweiten Falle beide größer als $\varphi(x_1)$ oder höchstens gerade so groß sein, so daß sich in beiden Fällen ergibt, daß die Quotienten

$$(3) \qquad \frac{\varphi(x_1 - h) - \varphi(x_1)}{-h} \quad \text{und} \quad \frac{\varphi(x_1 + h) - \varphi(x_1)}{h}$$

verschiedene Vorzeichen haben, wobei aber nicht ausgeschlossen ist, daß einer von ihnen oder alle beide gleich Null sind. Dies letztere tritt sicher in dem dritten Falle ein, in dem $\varphi(x)$ überall gleich Null ist. Unsere Folgerung gilt also in *allen* Fällen.

Die Quotienten (3) streben nun, wenn h nach Null hinstrebt, beide nach der Ableitung $\varphi'(x)$ von $\varphi(x)$ für $x = x_1$ hin, die, wie wir oben sahen, gleich $f'(x_1) - A$ ist. Da sie aber verschiedene Vorzeichen haben, so müssen sie notwendig

nach Null hinstreben. Folglich ist $f'(x_1) - A = 0$ oder $A = f'(x_1)$. Wegen der Bedeutung von A besagt dies:

$$\frac{f(X) - f(x_0)}{X - x_0} = f'(x_1).$$

Es war bewiesen worden, daß x_1 von x_0 verschieden ist. Ebenso ist x_1 von X verschieden, denn für $x = X$ ist ja $\varphi(X) = 0$, während $\varphi(x_1)$ im ersten Falle positiv, im zweiten Falle negativ ist. Im dritten Falle, wo $\varphi(x)$ stets gleich Null ist, kann als x_1 irgend ein Wert im Intervalle $x_0 < x < X$ gewählt werden. Der vorgenannte Mittelwertsatz ist also bewiesen.

Wir wollen ihm noch eine etwas andere Form geben: Da x_1 von x_0 und X verschieden und $x_0 < x_1 < X$ ist, so macht die Differenz $x_1 - x_0$ einen positiven echten Bruchteil der Differenz $X - x_0$ aus. Bezeichnen wir diese Differenz mit k, so kann also $x_1 - x_0 = \theta k$ gesetzt werden, wenn θ einen von Null und Eins verschiedenen positiven echten Bruch bedeutet. Alsdann ist $X = x_0 + k$ und $x_1 = x_0 + \theta k$, so daß der Satz so ausgesprochen werden kann:

Satz 3 (Mittelwertsatz): Hat die Funktion $f(x)$ ebenso wie ihre Ableitung $f'(x)$ für jedes x im Intervalle $x_0 \leqq x \leqq x_0 + k$ einen bestimmen endlichen Wert, so gibt es wenigstens einen positiven echten Bruch θ, der von Null und Eins verschieden ist und für den die Gleichung gilt:

$$f(x_0 + k) - f(x_0) = kf'(x_0 + \theta k).$$

Übrigens gilt dies auch, wenn k negativ ist, das Intervall also von $x_0 + k$ bis $x_0 > x_0 + k$ geht, da ja dann nur Anfang und Ende des Intervalles zu vertauschen sind.

29. Funktionen, deren Ableitungen gleich Null sind. Ist zunächst $f(x)$ konstant für alle Werte von x innerhalb eines gegebenen Intervalles, so folgt aus der Definition der Ableitung in Nr. 27 sofort:

Satz 4: Die Ableitung einer Funktion, die in einem Intervalle konstant bleibt, ist in dem Intervalle überall gleich Null.

Es gilt aber auch die Umkehrung:

Satz 5: Wenn die Ableitung $f'(x)$ einer Funktion $f(x)$ innerhalb eines gegebenen Intervalles überall gleich Null ist, so hat die Funktion $f(x)$ in diesem Intervalle einen konstanten Wert.

Denn wenn x_0 und $x_0 + k$ zwei Werte von x im Intervalle sind, so gibt es einen positiven echten Bruch θ derart, daß nach dem Mittelwertsatze:

$$f(x_0 + k) - f(x_0) = kf'(x_0 + \theta k)$$

ist. Die rechte Seite hat nach Voraussetzung den Wert Null; folglich ist $f(x_0 + k) = f(x_0)$, d. h. $f(x)$ hat überall im Intervalle den Wert $f(x_0)$.

Um hieraus weitere Sätze zu finden, schalten wir zunächst ein:

Satz 6: Die Ableitung der Summe oder Differenz zweier Funktionen ist gleich der Summe bzw. Differenz der Ableitungen beider Funktionen.

Ist nämlich

$$\varphi(x) = f(x) \pm F(x),$$

so ist auch

$$\varphi(x + h) = f(x + h) \pm F(x + h),$$

daher:

$$\frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \pm \frac{F(x+h) - F(x)}{h},$$

woraus sich beim Grenzübergange für $\lim h = 0$ in der Tat ergibt:

$$\varphi'(x) = f'(x) \pm F'(x).$$

Nun beweisen wir den

Satz 7: Wenn die Differenz zweier Funktionen $f(x)$ und $F(x)$ in einem Intervalle konstant ist, so ist überall im Intervalle die Ableitung von $f(x)$ gleich der von $F(x)$.

Denn wenn $\varphi(x) = f(x) - F(x)$ gesetzt wird, so ist nach Voraussetzung $\varphi(x) =$ konst., d. h. im ganzen Intervalle $\varphi'(x) = 0$ nach Satz 4, mithin $f'(x) = F'(x)$ nach Satz 6.

Es gilt aber auch der umgekehrte

Satz 8: Wenn überall in einem Intervalle die Ableitung der Funktion $f(x)$ gleich der Ableitung der Funktion $F(x)$ ist, so bleibt die Differenz $f(x) - F(x)$ im ganzen Intervalle konstant.

Denn hier ist nach Voraussetzung $\varphi'(x) = f'(x) - F'(x) = 0$, also nach Satz 5 auch $\varphi(x) = f(x) - F(x) =$ konst.

30. Das Wachsen und Abnehmen der Funktionswerte. Aus dem Mittelwertsatze fließt auch folgender

Satz 9: Hat die Funktion $f(x)$ ebenso wie ihre Ableitung $f'(x)$ im Intervalle $x_0 \leqq x \leqq X$ überall bestimmte endliche

Werte und ist $f'(x)$ dabei stets positiv bzw. stets negativ, so nimmt $f(x)$ im Intervalle mit wachsendem x stets zu bzw. ab.

Sind nämlich x und $x+k$ zwei Stellen im Intervalle, so ist nach Satz 3 in Nr. 28:

$$f(x+k)-f(x)=kf'(x+\theta k), \quad 0<\theta<1,$$

und $x+\theta k$ gehört ebenfalls dem Intervalle an. Ist nun $f'(x)$ positiv im Intervalle, so wird daher

$$f(x+k)>f(x)$$

für irgend zwei Stellen x, $x+k$ des Intervalles, wenn k positiv ist; $f(x)$ wächst also mit wachsendem x. Ist dagegen $f'(x)$ negativ im Intervalle, so wird

$$f(x+k)<f(x)$$

für positives k; daher nimmt $f(x)$ mit wachsendem x ab.

31. Verallgemeinerung des Mittelwertsatzes. Eine allgemeinere Form des Mittelwertsatzes ist der

Satz 10: Wenn die Funktionen $f(x)$ und $F(x)$ und ihre Ableitungen $f'(x)$ und $F'(x)$ überall in dem Intervalle $x_0 \leqq x \leqq X$ bestimmte endliche Werte haben, wenn ferner $F'(x)$ nirgends im Intervalle gleich Null und außerdem $F(X)$ von $F(x_0)$ verschieden ist, so wird für mindestens einen Wert x_1 im Intervalle:

$$\frac{f(X)-f(x_0)}{F(X)-F(x_0)}=\frac{f'(x_1)}{F'(x_1)};$$

dabei ist x_1 weder gleich x_0 noch gleich X.

Wir wenden dieselbe Überlegung an, die zum Beweise des Mittelwertsatzes diente. Setzen wir

$$\frac{f(X)-f(x_0)}{F(X)-F(x_0)}=A,$$

so ist

$$(1) \qquad [f(X)-f(x_0)]-A[F(X)-F(x_0)]=0.$$

Hieraus folgt, daß die Funktion

$$(2) \qquad \varphi(x)=[f(x)-AF(x)]-[f(x_0)-AF(x_0)],$$

die für $x=x_0$ verschwindet, auch für $x=X$ gleich Null wird. Ist also die Funktion $\varphi(x)$ nicht beständig gleich Null, so gibt es mindestens eine Stelle x_1 im Innern des Intervalles, an der sie ihren größten oder kleinsten Wert annimmt. An dieser Stelle haben

$$\frac{\varphi(x_1 - h) - \varphi(x_1)}{-h} \quad \text{und} \quad \frac{\varphi(x_1 + h) - \varphi(x_1)}{h}$$

entgegengesetzte Zeichen, also ist wie in Nr. 28:

$$\lim_{h=0} \frac{\varphi(x_1 + h) - \varphi(x_1)}{h} = 0,$$

d. h. nach Gleichung (2):

$$\lim_{h=0} \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h} - A \lim_{h=0} \frac{F(x_1 + h) - F(x_1)}{h} = 0,$$

oder:

$$f'(x_1) - AF'(x_1) = 0.$$

Der Wert x_1 ist weder gleich x_0 noch gleich X; der Voraussetzung nach wird $F'(x)$ nicht gleich Null für Werte von x zwischen x_0 und X; daher folgt

$$A = \frac{f'(x_1)}{F'(x_1)},$$

und deshalb ist wegen der Bedeutung von A:

$$\frac{f(X) - f(x_0)}{F(X) - F(x_0)} = \frac{f'(x_1)}{F'(x_1)}.$$

Hat das Intervall von x_0 bis X die Länge k, ist also $X = x_0 + k$, wo übrigens k positiv oder negativ sein kann, so läßt sich das Ergebnis analog dem Satze 3 in Nr. 28 etwas anders ausdrücken: Es gibt einen von Null und Eins verschiedenen positiven echten Bruch θ derart, daß die Gleichung gilt:

$$\frac{f(x_0 + k) - f(x_0)}{F(x_0 + k) - F(x_0)} = \frac{f'(x_0 + \theta k)}{F'(x_0 + \theta k)}.$$

32. Die Ableitung als Differentialquotient. Wir werden das Zeichen Δ, vor die Veränderliche gesetzt, benutzen, um eine positive oder negative Zunahme der Veränderlichen auszudrücken. So soll Δx eine Zunahme der Veränderlichen x bedeuten. In Nr. 27 hatten wir statt Δx das Zeichen h gebraucht. Wächst x um Δx, so wird die Zunahme, die eine Funktion $f(x)$ dabei erfährt, also die *zugehörige* Zunahme $\Delta f(x)$ dargestellt durch:

$$\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x).$$

Die Zunahmen Δx und $\Delta f(x)$ sind ihrer Natur nach *Differenzen;* infolgedessen ist ihr Quotient:

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

als *Differenzenquotient* zu bezeichnen. Nach der Definition in Nr. 27 ist *die Ableitung* $f'(x)$ *der Grenzwert des Differenzenquotienten für* $\lim \Delta x = 0$:

(1) $$f'(x) = \lim_{\Delta x = 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x = 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Ist z. B. die Kurve in Fig. 19 das Bild der Funktion $y = f(x)$ und hat M die Abszisse $x = OP$, so bedeutet PP' einen Zuwachs Δx von x und QM' den zugehörigen Zuwachs $\Delta f(x)$ oder Δy der Funktion. Der Grenzwert des Differenzenquotienten $\Delta y : \Delta x$ oder $QM' : MQ$ gibt nach Nr. 27 den Tangens des Winkels an, den die Kurventangente MR mit der positiven x-Achse bildet.

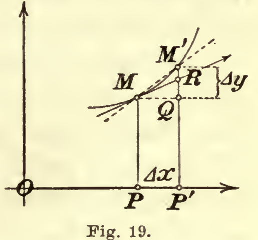


Fig. 19.

Diese gerade Linie MR ist selbst ebenfalls das Bild einer Funktion. Lassen wir jetzt x wieder wachsen, aber den zugehörigen Punkt M auf der Tangente weiterlaufen, so werden wir die Zunahmen der Abszisse und Ordinate zum Unterschiede nicht Δx und Δy, sondern dx und dy nennen, so daß in Fig. 19 z. B. $PP' = dx$ und $QR = dy$ ist. Alsdann ist $dy : dx$ der Wert der Ableitung von $f(x)$ für das betrachtete x, d. h.

$$\frac{dy}{dx} = f'(x).$$

Die Ableitung ist also hier nicht, wie vorhin, nur als Grenzwert eines Quotienten, sondern direkt als ein Quotient $dy : dx$ dargestellt. Man nennt dx und dy *Differentiale* und ihren Quotienten einen *Differentialquotienten.*

Sehen wir ganz von der geometrischen Veranschaulichung ab, so definieren wir mithin: *Unter dem Differential* dx *verstehen wir eine beliebige Zunahme von* x; *unter dem Differential* dy *soll alsdann eine solche Größe verstanden werden, die durch* dx *dividiert die Ableitung* $f'(x)$ *liefert.*

Die Formel (1) oder

(2) $$f'(x) = \lim_{\Delta x = 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

läßt sich so deuten: Die Ableitung $f'(x)$ gibt ein *Maß für diejenige Stärke des Wachsens der Funktion* $f(x)$ an, die

gerade dann vorhanden ist, wenn der betrachtete Wert x passiert wird. Wenn wir diese Ausdrucksweise benutzen, so können wir der Formel

$$\frac{dy}{dx} = f'(x)$$

die folgende Deutung geben: Würde sich die Funktion $f(x)$ von der betrachteten Stelle x an nicht mehr in wechselnder Stärke ändern, sondern von da an beständig so, wie es momentan der Fall ist, so würden die Differentiale dx und dy zusammengehörige Zunahmen von x und y bedeuten. Der Bildpunkt M nämlich würde dann nicht weiterhin die Kurve, sondern die Tangente MR durchlaufen.

Zwischen den Differenzen Δx und Δy und den Differentialen dx und dy besteht also ein wesentlicher Unterschied. Zwar hindert uns nichts, Δx gerade so groß wie dx zu wählen, etwa gleich PP' in Fig. 19, aber dann ist Δy der zugehörige Zuwachs der Funktion, gleich QM', und dy der zugehörige Zuwachs QR für die Tangente. Erst beim Grenzübergange, für $\lim \Delta x = 0$, werden dann Δy und dy dasselbe bedeuten. In der Tat ist ja nach Definition

$$dy = f'(x)\,dx,$$

also, wenn $dx = \Delta x$ gewählt und die Formel mit Δy dividiert wird:

$$\frac{dy}{\Delta y} = f'(x) \cdot \frac{\Delta x}{\Delta y} = f'(x) : \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Machen wir den Grenzübergang, so folgt nach Satz 32 in Nr. 24 und nach (2):

$$\lim_{\Delta x = 0} \frac{dy}{\Delta y} = f'(x) : f'(x) = 1, \quad \text{d. h.} \quad \lim_{\Delta x = 0} dy = \lim_{\Delta x = 0} \Delta y,$$

was bewiesen werden sollte.

Da $y = f(x)$ ist, so können wir das Differential dy auch mit $df(x)$ bezeichnen, so daß wir für die Ableitung $f'(x)$ die von *Leibniz* herrührenden Darstellungsweisen

$$(3) \qquad f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{df(x)}{dx}$$

haben. Diese Art der Darstellung der Ableitung als *Differentialquotienten* ist die am meisten gebrauchte. Den Bruch $df(x):dx$ kann man dabei von zwei verschiedenen Standpunkten aus auf-

fassen, entweder wirklich als Quotienten von $df(x)$ und dx oder als ein Symbol, das den Grenzwert des Quotienten $\Delta y : \Delta x$ oder $\Delta f(x) : \Delta x$ zusammengehöriger Zunahmen von y und x bedeutet. Auch schreibt man die Formel (3) oft so:

$$df(x) = f'(x)\,dx \quad \text{oder} \quad dy = f'(x)\,dx,$$

wenn man die Nenner vermeiden will.

Gelegentlich ist es bequem, noch eine andere Bezeichnung für die Ableitung $f'(x)$ zu benutzen. Ist nämlich $y = f(x)$, so soll auch y' die Ableitung bedeuten. So z. B. sollen u', v', w' die Ableitungen von Veränderlichen u, v, w sein, die Funktionen von x sind. Diese Bezeichnung darf jedoch nur dann angewandt werden, wenn kein Zweifel darüber besteht welche Größe die unabhängige Veränderliche ist. Ebenso stellt $(u + v)'$ die Ableitung oder den Differentialquotienten einer Summe von zwei Funktionen u und v von x vor, so daß wir z. B. den Satz 6 in Nr. 29 in den folgenden verschiedenen Weisen darstellen können:

$$(u \pm v)' = u' \pm v' \quad \text{oder} \quad \frac{d(u \pm v)}{dx} = \frac{du}{dx} \pm \frac{dv}{dx}.$$

Es gibt Funktionen, bei denen der Unterschied zwischen den Differentialen dx, dy und den Differenzen Δx, Δy nicht vorhanden ist. Es sind dies die sogenannten *linearen Funktionen*, d. h. die ganzen rationalen Funktionen ersten Grades, also die Funktionen von der Form

$$y = ax + b,$$

wo a und b konstant sind. Hier nämlich ist

$$y + \Delta y = a(x + \Delta x) + b, \text{ also } \Delta y = a\Delta x, \text{ daher } \Delta y : \Delta x = a,$$

also konstant. Daher ist hier $\Delta y : \Delta x$ nicht nur beim Grenzübergange zu $\lim \Delta x = 0$, sondern stets gleich a, so daß $\Delta y : \Delta x = dy : dx$ ist, mithin, wenn wir $\Delta x = dx$ annehmen, auch $\Delta y = dy$. In der Tat ist es ja bekannt, daß das Bild einer linearen Funktion $y = ax + b$ eine *gerade Linie* ist, die überall mit ihrer Tangente zusammenfällt.

Die Berechnung der Ableitung oder des Differentialquotienten einer Funktion heißt die *Differentiation* oder das *Differenzieren* der Funktion. Die Differentiationsregeln, die wir

in den folgenden Nummern aufstellen, bilden die Grundlage der *Differentialrechnung.*

§ 2. Differentiation entwickelter algebraischer Funktionen.

33. Differentialquotient einer Funktion von einer Funktion. Es sei u eine Funktion von x, etwa $u = f(x)$, und es sei y eine Funktion von u, etwa $y = F(u)$. Dann ist auch $y = F(f(x))$, d. h. y kann auch als Funktion von x aufgefaßt werden. Für ihre Differentiation gilt der grundlegende

Satz 11: Ist $u = f(x)$ und $y = F(u)$, so daß $y = F(f(x))$ auch eine Funktion von x ist, so findet man die Ableitung von y nach x nach dieser Regel:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \quad \textit{oder} \quad \frac{dy}{dx} = F'(u) \cdot f'(x).$$

Denn wenn x um Δx wächst, so wachse $u = f(x)$ um Δu. Wenn aber u um Δu zunimmt, möge $y = F(u)$ um Δy wachsen. Dann ist

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

und also nach Satz 31 in Nr. 24:

$$\lim_{\Delta x = 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x = 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x = 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}.$$

Der Grenzwert links ist der gesuchte Differentialquotient $dy : dx$, der zweite Grenzwert rechts ist der Differentialquotient $du : dx$. Da für $\lim \Delta x = 0$ auch der Grenzwert von $\Delta u = f(x + \Delta x) - f(x)$ gleich Null wird, so ist der erste Grenzwert rechts:

$$\lim_{\Delta x = 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} = \lim_{\Delta u = 0} \frac{\Delta y}{\Delta u}, \quad \text{d. h.} \quad \text{gleich } \frac{dy}{du}.$$

Mithin folgt in der Tat:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}.$$

Der Satz 11 ist eine Regel, die uns erlaubt, die Ableitung von $F(f(x))$ zu berechnen, wenn wir die Ableitungen von $F(u)$ und von $f(x)$ schon kennen. Beim Beweise ist natürlich stillschweigend vorausgesetzt worden, daß die beiden Funktionen $F(u)$ und $f(x)$ an der betrachteten Stelle bestimmte endliche Werte und bestimmte endliche Ableitungen haben.

Wir werden in den folgenden Nummern noch mehrere derartige Regeln aufstellen, wodurch eine neue Differentiation auf schon ausgeführt gedachte Differentiationen zurückgeführt wird. Und dabei gelten für diese Funktionen, aus denen die zu differenzierende Funktion zusammengesetzt ist, stillschweigend immer die analogen Voraussetzungen wie hier für $F(u)$ und $f(x)$.

34. Differentiation einer Summe. Dasselbe Beweisverfahren, das in Nr. 29 zum Satze 6 führte, ist auch für Summen und Differenzen von mehr als zwei Funktionen anwendbar. Daher:

Satz 12: Die Ableitung einer algebraischen Summe von Funktionen ist gleich der algebraischen Summe der Ableitungen der Funktionen, in Formel:

$$\frac{d(u_1 \pm u_2 \pm \cdots \pm u_n)}{dx} = \frac{du_1}{dx} \pm \frac{du_2}{dx} \pm \cdots \pm \frac{du_n}{dx}.$$

35. Differentiation eines Produktes. Ist zunächst $y = au$, wo a eine Konstante und u eine Funktion von x sei, so wachse x um Δx und infolge davon u um Δu und y um Δy. Dann ist:

$$\Delta y = a\Delta u, \quad \text{also} \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = a\frac{\Delta u}{\Delta x}.$$

Gehen wir zur Grenze über, so folgt:

Satz 13: Die Ableitung des Produktes aus einer Konstanten und einer Funktion ist gleich der Ableitung der Funktion, multipliziert mit der Konstanten, in Formel:

$$\frac{d(au)}{dx} = a\frac{du}{dx}, \quad \textit{wenn} \quad a = \textit{konst.}$$

Man sagt kurz dafür: *Konstante Faktoren bleiben beim Differenzieren stehen.* Anders verhält es sich mit konstanten Summanden. Ist nämlich $y = u + a$, so folgt aus Satz 6 und 4 in Nr. 29, daß $y' = u'$ ist, d. h. *konstante Summanden fallen beim Differenzieren fort.*

Jetzt betrachten wir ein Produkt $y = u \cdot v$ von zwei Funktionen u und v von x. Wächst x um Δx, so wachse u um Δu, v um Δv und y um Δy. Dann ist:

$$\Delta y = (u + \Delta u)(v + \Delta v) - uv = v \cdot \Delta u + u \cdot \Delta v + \Delta u \cdot \Delta v,$$

also:
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = v\frac{\Delta u}{\Delta x} + u\frac{\Delta v}{\Delta x} + \frac{\Delta u}{\Delta x}\cdot\frac{\Delta v}{\Delta x}\cdot\Delta x.$$

Beim Grenzübergange $\lim \Delta x = 0$ ergibt sich, da

$$\lim_{\Delta x=0}\frac{\Delta u}{\Delta x}\cdot\frac{\Delta v}{\Delta x}\cdot\Delta x = \lim_{\Delta x=0}\frac{\Delta u}{\Delta x}\cdot\lim_{\Delta x=0}\frac{\Delta v}{\Delta x}\cdot\lim_{\Delta x=0}\Delta x$$

und $\lim \Delta x$ selbst gleich Null ist, der

Satz 14: Die Ableitung eines Produktes von zwei Funktionen ist gleich der Summe der Produkte, die man erhält, wenn man jede Funktion mit der Ableitung der andern multipliziert; in Formel:

$$\frac{d(u\cdot v)}{dx} = v\cdot\frac{du}{dx} + u\cdot\frac{dv}{dx}.$$

Hierfür können wir auch schreiben:

$$(uv)' = vu' + uv'$$

oder, wenn wir durch uv dividieren:

$$\frac{(uv)'}{uv} = \frac{u'}{u} + \frac{v'}{v}.$$

Der Bau dieser Formel erinnert an eine Formel aus der Theorie der Logarithmen: Der Logarithmus eines Produktes ist gleich der Summe der Logarithmen der Faktoren. Wir wollen deshalb den Bruch, dessen Zähler die Ableitung einer Funktion und dessen Nenner die Funktion selbst ist, wie z. B. $u' : u$, die *logarithmische Ableitung der Funktion* nennen. Ein anderer Grund für diese Bezeichnung wird in Nr. 47 zutage treten. Wir können die gefundene Formel nun so aussprechen:

Satz 15: Die logarithmische Ableitung eines Produktes ist gleich der Summe der logarithmischen Ableitungen der Faktoren.

Wir haben in diesem Satze unterdrückt, daß das Produkt *zwei* Faktoren haben soll. Wir werden nämlich sogleich sehen, daß er auch für Produkte von mehreren Faktoren gilt: Es sei $u_1 u_2 \ldots u_n$ ein Produkt aus einer beliebigen Anzahl von Funktionen $u_1, u_2, \ldots u_n$ der Veränderlichen x. Nach der Regel für die logarithmische Ableitung eines Produktes von nur *zwei* Faktoren ist dann:

$$\frac{(u_1 u_2 \cdots u_n)'}{u_1 u_2 \cdots u_n} = \frac{u_1'}{u_1} + \frac{(u_2 u_3 \cdots u_n)'}{u_2 u_3 \cdots u_n},$$

ebenso:

$$\frac{(u_2 u_3 \cdots u_n)'}{u_2 u_3 \cdots u_n} = \frac{u_2'}{u_2} + \frac{(u_3 u_4 \cdots u_n)'}{u_3 u_4 \cdots u_n} \quad \text{usw.}$$

35]

Addition aller dieser n Gleichungen gibt:

$$\frac{(u_1 u_2 \cdots u_n)'}{u_2 u_2 \cdots u_n} = \frac{u_1'}{u_1} + \frac{u_2'}{u_2} + \cdots + \frac{u_n'}{u_n},$$

womit Satz 15 allgemein bewiesen ist. Multiplikation mit dem Nenner $u_1 u_2 \cdots u_n$ gibt die Formel für die Ableitung eines Produktes von n Faktoren:

$$(u_1 u_2 \cdots u_n)' = u_1' u_2 \cdots u_n + u_1 u_2' \cdots u_n + \cdots + u_1 u_2 \cdots u_n'.$$

Der Beweis für diese Formel setzte allerdings voraus, daß $u_1 u_2 \cdots u_n \neq 0$ ist. Es ist aber leicht zu sehen, daß sie von dieser Annahme unabhängig ist, da man sie auch direkt durch wiederholte Anwendung des Satzes 14 finden kann.

36. Differentiation eines Bruches. Sind u und v zwei Funktionen von x und ist y der Bruch $u : v$, so kommt

$$\Delta y = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v} - \frac{u}{v} = \frac{v \Delta u - u \Delta v}{v(v + \Delta v)}$$

und daher:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{v + \Delta v} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} - \frac{u}{v(v + \Delta v)} \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x}$$

für jedes x, für das v und $v + \Delta v \neq 0$ ist. Gehen wird zur Grenze über, so folgt für jedes x, für das $v \neq 0$ ist:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{v} \cdot \frac{du}{dx} - \frac{u}{v^2} \cdot \frac{dv}{dx} = \frac{v \frac{du}{dx} - u \frac{dv}{dx}}{v^2}. \tag{1}$$

Satz 16: Die Ableitung eines Bruches aus zwei Funktionen ist für solche Werte der unabhängigen Veränderlichen, für die der Nenner nicht gleich Null ist, gleich einem Bruche, dessen Zähler die Differenz aus dem Produkte des Nenners mit der Ableitung des Zählers und dem Produkte des Zählers mit der Ableitung des Nenners ist, während im Nenner das Quadrat des gegebenen Nenners steht; in Formel:

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{v u' - u v'}{v^2}.$$

Übersichtlicher wird die Formel, wenn wir sie durch y oder $u : v$ dividieren, da dann kommt:

Satz 17: Die logarithmische Ableitung eines Bruches $y = u : v$ ist gleich der Differenz der logarithmischen Ableitungen von Zähler und Nenner; in Formel:

$$\frac{y'}{y} = \frac{u'}{u} - \frac{v'}{v}.$$

Dies ist analog der Eigenschaft des Logarithmus eines Bruches.

37. Differentiation der inversen Funktion. Wenn man die Ableitung einer Funktion kennt, so kann man zeigen, daß auch die inverse Funktion (vgl. Nr. 10) eine Ableitung hat, und kann diese Ableitung leicht berechnen. In der Tat, nehmen wir an, daß $y = f(x)$ sei und die inverse Funktion die Form $x = F(y)$ habe. Wächst x um Δx, so wachse y um Δy. Alsdann ist die Ableitung von $y = f(x)$:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x = 0} \frac{\Delta y}{\Delta x},$$

dagegen die Ableitung der Funktion $x = F(y)$ von y:

$$F'(y) = \lim_{\Delta y = 0} \frac{\Delta x}{\Delta y}.$$

Ist nun die Ableitung $f'(x)$ wirklich vorhanden, so wird mit $\Delta x = 0$ auch $\Delta y = 0$. Ferner ist:

$$\lim_{\Delta x = 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \lim_{\Delta x = 0} \left(1 : \frac{\Delta y}{\Delta x}\right) = 1 : \lim_{\Delta x = 0} \frac{\Delta y}{\Delta x},$$

so daß in der Tat eine Ableitung $F'(y)$ vorhanden ist, für die sich ergibt:

$$F'(y) = 1 : f'(x).$$

Stellen wir die Ableitungen als Differentialquotienten dar, so drückt sich dies so aus:

$$\frac{dy}{dx} = 1 : \frac{dx}{dy}.$$

Satz 18: Hat y als Funktion von x an der Stelle x eine endliche und von Null verschiedene Ableitung $f'(x)$, so hat auch x als Funktion von y an der entsprechenden Stelle y eine endliche und von Null verschiedene Ableitung $F'(y)$. Diese Ableitung der inversen Funktion ist der reziproke Wert der Ableitung der ursprünglichen Funktion.

38. Differentiation von Potenzen mit konstanten Exponenten. Es sei $y = x^n$, wo n *zunächst* eine *positive ganzzahlige* Konstante bedeute. Dann ist y das Produkt von n gleichen Faktoren x, so daß die letzte Formel von Nr. 35 für $u_1 = u_2 = \cdots = u_n = x$ sofort gibt:

$$y' = nx^{n-1}. \tag{1}$$

Zweitens sei n eine *negative ganzzahlige* Konstante und m ihr absoluter Betrag, also $n = -m$. Dann ist $y = 1 : x^m$, so daß Satz 16, Nr. 36, anzuwenden ist, wobei $u = 1$ und $v = x^m$, folglich $u' = 0$ und nach (1), weil m eine *positive* ganze Zahl bedeutet, $v' = mx^{m-1}$ ist. So kommt:

$$y' = -\frac{mx^{m-1}}{x^{2m}} = -mx^{-m-1},$$

was, wenn wieder $m = -n$ eingesetzt wird, zur Formel (1) zurückführt, die also richtig ist, wenn der Exponent irgend eine *ganze* Zahl bedeutet.

Drittens sei n ein Stammbruch $1 : r$, so daß r eine positive ganze Zahl bedeutet. Alsdann ist $x = y^r$ die inverse Funktion. Da hier der Exponent eine ganze Zahl ist, so hat diese inverse Funktion nach (1) den Differentialquotienten:

$$\frac{dx}{dy} = ry^{r-1}.$$

Nach Satz 18 hat daher $y = x^{\frac{1}{r}}$ den Differentialquotienten:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{ry^{r-1}}.$$

Setzen wir hierin wieder $y = x^{\frac{1}{r}}$ ein, so kommt:

$$y' = \frac{1}{r} x^{\frac{1}{r}-1}.$$

Diese Formel ordnet sich der Formel (1) für die Annahme $n = 1 : r$ unter, so daß also die Formel (1) gilt, wenn der Exponent eine ganze Zahl oder ein Stammbruch ist.

Viertens sei jetzt n eine beliebige rationale, nämlich gebrochene Zahl $s : r$, wo s und r *ganze* Zahlen sind und $r > 0$ ist. Alsdann wird:

$$y = \left(x^{\frac{1}{r}}\right)^s.$$

Wenn wir $u = x^{\frac{1}{r}}$ setzen, so ist $y = u^s$. Da hier nach dem Vorhergehenden

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{r} x^{\frac{1}{r}-1}, \quad \frac{dy}{du} = su^{s-1}$$

wird, so folgt durch Anwendung des Satzes 11, Nr. 33,

$$\frac{dy}{dx} = su^{s-1} \cdot \frac{1}{r} x^{\frac{1}{r}-1}$$

oder, wenn $u = x^{\frac{1}{r}}$ wieder eingesetzt wird:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{s}{r} x^{\frac{s}{r} - 1},$$

d. h. die Formel (1) gilt auch, wenn $n = s : r$ ist.

Satz 19: Die Ableitung einer Potenz x^n mit konstantem rationalen Exponenten n ist gleich nx^{n-1}.

Daß dies auch dann richtig ist, wenn n eine irrationale Konstante bedeutet, wird in Nr. 47 bewiesen werden. —

Ist u irgend eine Funktion von x und $y = u^n$, so gibt die Anwendung des Satzes 11, Nr. 33, sofort:

Satz 20: Ist u eine Funktion von x, so hat die n^{te} Potenz von u die Ableitung:

$$\frac{d(u^n)}{dx} = nu^{n-1} \frac{du}{dx},$$

vorausgesetzt, daß n eine konstante rationale Zahl ist.

Dieser Satz erlaubt uns auch die *Differentiation von Wurzeln.* Wählen wir z. B. $n = \frac{1}{2}$, so folgt:

$$\frac{d\sqrt{u}}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{u}} \frac{du}{dx}.$$

§ 3. Anwendungen.

39. Rechenbeispiele. Eine *entwickelte algebraische Funktion* von x wird erhalten, wenn man mit der Veränderlichen x und mit Konstanten eine endliche Anzahl von algebraischen Operationen (vgl. Nr. 6) ausführt. Die Ableitung einer solchen Funktion kann man daher immer mittels der bisherigen Regeln berechnen. Wir geben einige Beispiele.

1. Beispiel: Ist $y = Ax^m + Bx^n + \ldots + Lx^r$, wo $A, B, \ldots L, m, n, \ldots r$ Konstanten und insbesondere $m, n, \ldots r$ rationale Zahlen bedeuten, so erhält man durch Anwendung der Sätze 12, 13 und 19 sofort:

$$y' = mAx^{m-1} + nBx^{n-1} + \cdots + rLx^{r-1}.$$

Ist z. B. insbesondere

$$y = a + b\sqrt{x} + \frac{c}{\sqrt{x}} + \frac{g}{x},$$

wo a, b, c, g Konstanten bedeuten, so läßt sich schreiben:

$$y = a + bx^{\frac{1}{2}} + cx^{-\frac{1}{2}} + gx^{-1},$$

so daß kommt:

$$y' = \tfrac{1}{2}bx^{-\frac{1}{2}} - \tfrac{1}{2}cx^{-\frac{3}{2}} - gx^{-2} = \tfrac{1}{2}\frac{b}{\sqrt{x}} - \tfrac{1}{2}\frac{c}{x\sqrt{x}} - \frac{g}{x^2}.$$

2. *Beispiel:* Ist $y = x^2(a^2 + x^2)\sqrt{a^2 - x^2}$ und a eine Konstante, so schreiben wir:

$$y = (a^2x^2 + x^4)\sqrt{a^2 - x^2}$$

und wenden hierauf die Produktregel in Satz 14 an, wobei $u = a^2x^2 + x^4$ und $v = \sqrt{a^2 - x^2}$, also

$$u' = 2a^2x + 4x^3$$

ist. Um v' zu berechnen, benutzen wir Satz 20, indem wir $v = \sqrt{w}$ und $w = a^2 - x^2$ setzen, so daß

$$v' = \frac{dv}{dx} = \frac{d\sqrt{w}}{dw} \cdot \frac{dw}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{w}}(-2x) = -\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

ist. Die Produktregel gibt jetzt:

$$y' = \sqrt{a^2 - x^2}(2a^2x + 4x^3) - (a^2x^2 + x^4)\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{(2a^4 + a^2x^2 - 5x^4)x}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

3. *Beispiel:* Ist $y = (ax^m + b)^n$, wo a, b, m, n konstant und m, n rational sind, so kommt nach Satz 20:

$$y' = n(ax^m + b)^{n-1}\frac{d(ax^m + b)}{dx} = mnax^{m-1}(ax^m + b)^{n-1}.$$

40. Geometrische Anwendungen. Die bisherigen Regeln reichen schon zur Lösung mancher Aufgaben aus; es wird nützlich sein, hierfür einige Beispiele zu geben. Wir entnehmen sie der analytischen Geometrie, und wir müssen zunächst an einige in der Kurventheorie gebräuchliche Bezeichnungen erinnern. Ist eine Kurve auf rechtwinklige Koordinaten x, y bezogen und konstruiert man wie in Fig. 20 die Tangente TM eines Kurvenpunktes M und die Senkrechte dazu durch M, d. h. die *Normale* MN, so heißen diejenigen Strecken dieser Geraden, die zwischen der x-Achse und dem Kurvenpunkte M liegen, schlechtweg die *Tangente* und die *Normale*; außerdem nennt man die Projektionen dieser Strecken

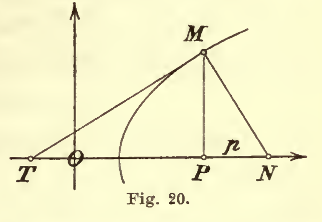


Fig. 20.

auf die x-Achse, also die Strecken PT und PN, die *Subtangente* und die *Subnormale*.

1. *Beispiel: Es sollen diejenigen Kurven gefunden werden, bei denen die Subnormale konstant, gleich p, ist.* Ist die Kurve das Bild einer Funktion y von x, so ist die Aufgabe die, diese Funktion zu bestimmen. Die Subnormale $PN = p$ ist gleich der Ordinate $y = PM$, multipliziert mit dem Tangens des Winkels PMN, der dem Winkel PTM der Tangente mit der positiven x-Achse gleich ist. Also ist $\operatorname{tg} PMN = y'$, der Ableitung der gesuchten Funktion, folglich $PN = yy'$. Die Bedingung der Aufgabe ist daher ausgedrückt durch die Gleichung $yy' = p$, wofür wir schreiben:

$$2yy' = 2p.$$

Hier steht links nach Satz 20, Nr. 38, die Ableitung von y^2, rechts die von $2px$. Also haben y^2 und $2px$ dieselbe Ableitung. Daher ist ihre Differenz nach Satz 8 in Nr. 29 konstant, gleich C, so daß folgt: $y^2 = 2px + C$ oder $y = \sqrt{2px + C}$. Wie man auch die Konstante C wählen mag, stets ist die gestellte Forderung $PN = p$ erfüllt. Die gesuchten Kurven sind daher alle diejenigen *Parabeln* mit dem Parameter p, deren Achse die x-Achse ist. Je nachdem man die Subnormale positiv oder negativ auffaßt, können sich die Parabeln nach der einen oder anderen Richtung der x-Achse hin erstrecken.

2. *Beispiel: Es sollen diejenigen Kurven gefunden werden, bei denen die Normale konstant, gleich a, ist.* Nach der Fig. 20 ist das Quadrat der Normale gleich der Summe der Quadrate von Subnormale und Ordinate, also gleich $y^2y'^2 + y^2$, so daß

$$(1) \qquad y^2y'^2 + y^2 = a^2$$

die Bedingung der Aufgabe ist. Sie kann so geschrieben werden:

$$(2) \qquad \frac{yy'}{\sqrt{a^2 - y^2}} = 1,$$

vorausgesetzt, daß $a^2 \neq y^2$ ist. Untersuchen wir daher zunächst, was sich für $a^2 = y^2$ ergibt. In diesem Falle ist $y = \pm a$, $y' = 0$, so daß (1) erfüllt ist. Daher sind die Parallelen zur x-Achse mit den Ordinaten $\pm a$ Lösungen der Aufgabe. Sehen wir von ihnen ab, so können wir die Bedingung

in der Form (2) benutzen. Die linke Seite von (2) bedeutet die Ableitung von $-\sqrt{a^2-y^2}$, die rechte die von x; nach Satz 8 in Nr. 29 muß also $-\sqrt{a^2-y^2}$ gleich $x-C$ sein, wo C konstant ist. Also kommt:

$$(x-C)^2+y^2=a^2,$$

d. h. alle *Kreise* mit dem Radius a und mit den Mittelpunkten auf der x-Achse sind außer den beiden erwähnten Geraden die Lösungen der Aufgabe.

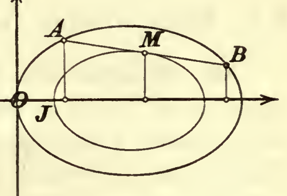


Fig. 21.

3. Beispiel: Es ist ein Kegelschnitt OAB, siehe Fig. 21, gegeben. Man soll eine Kurve JM so bestimmen, daß jede Tangente AMB dieser Kurve, die eine Sehne AB des Kegelschnittes ist, ihren Berührungspunkt M in der Mitte der Sehne AB hat. In den laufenden Koordinaten X, Y hat die Gleichung des Kegelschnittes, bezogen auf eine Kegelschnittsachse als Abszissenachse und eine zugehörige Scheiteltangente (in O) als Ordinatenachse, bekanntlich die Form:

$$Y^2=2pX+qX^2.$$

Ist (x, y) ein Punkt M der gesuchten Kurve, so hat seine Tangente AB, da y' der Tangens des Winkels ist, den sie mit der x-Achse bildet, in den laufenden Koordinaten X, Y die Gleichung:

$$\frac{Y-y}{X-x}=y' \quad \text{oder} \quad Y-y=y'(X-x).$$

Setzt man $Y=y+y'(X-x)$ in die Kegelschnittsgleichung ein, so ergibt sich eine quadratische Gleichung:

$$(y'^2-q)X^2+2(yy'-xy'^2-p)X+(y-xy')^2=0$$

für die Abszissen X der beiden Schnittpunkte A und B. Es genügt, zu fordern, daß die halbe Summe dieser Abszissen gleich der Abszisse x von M sei. Die halbe Summe der Wurzeln X der quadratischen Gleichung ist aber:

$$\frac{p-yy'+xy'^2}{y'^2-q}.$$

Also lautet die Bedingung der Aufgabe:

$$2yy'=2p+2qx.$$

Links steht die Ableitung von y^2, rechts die von $2px + qx^2$. Nach Satz 8 in Nr. 29 ist daher:

$$y^2 = 2px + qx^2 + C,$$

wo C eine beliebig wählbare Konstante bedeutet. Die gesuchte Kurve ist daher ein *Kegelschnitt*, der mit dem gegebenen Kegelschnitte ähnlich, ähnlich gelegen und konzentrisch ist.

§ 4. Differentiation von zusammengesetzten Funktionen.

41. Funktionen von zwei Funktionen. Die Ergebnisse des § 2 sind in einem allgemeineren Satze enthalten, den wir in diesem Paragraphen ableiten wollen. Wenn $u_1, u_2, u_3, \ldots$ Funktionen von x sind und $y = f(u_1, u_2, u_3, \ldots)$ eine Funktion von $u_1, u_2, u_3, \ldots$ ist, so wird y auch eine Funktion von x. Man sagt, daß diese Funktion y von x aus den Funktionen $u_1, u_2, u_3, \ldots$ von x *zusammengesetzt* sei. Zunächst wollen wir den Differentialquotienten einer Funktion

$$y = f(u, v)$$

berechnen, die aus nur *zwei* Funktionen u und v von x zusammengesetzt ist.

Wenn x um Δx wächst, so wachse u um Δu und v um Δv. Dann wird y um $\Delta y = f(u + \Delta u, v + \Delta v) - f(u, v)$ wachsen. Subtrahieren und addieren wir hier $f(u, v + \Delta v)$ und dividieren wir alsdann mit Δx, so kommt:

$$(1) \qquad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(u + \Delta u, v + \Delta v) - f(u, v + \Delta v)}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{f(u, v + \Delta v) - f(u, v)}{\Delta v} \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x}.$$

Ehe wir aus dieser Formel den Differentialquotienten $dy : dx$ berechnen, schicken wir einige Bemerkungen voraus.

Wir machen zunächst darauf aufmerksam, daß man rein formal von *zwei* Ableitungen der Funktion $f(u, v)$ sprechen kann. Denn wenn wir ganz davon absehen, daß u und v Funktionen von x sein sollen, vielmehr u und v als unabhängige Veränderliche betrachten, so können wir v einen bestimmten Wert erteilen und nur u um Δu ändern. Alsdann wird der Grenzwert

$$\lim_{\Delta u = 0} \frac{f(u + \Delta u, v) - f(u, v)}{\Delta u},$$

falls er überhaupt vorhanden ist, die *Ableitung von f nach u* zu nennen sein. Wir könnten ihn also mit $df : du$ bezeichnen. Um jedoch darauf aufmerksam zu machen, daß sich nur die eine Größe u ändern soll, bezeichnet man ihn mit $\partial f : \partial u$. Ebenso bezeichnet man mit $\partial f : \partial v$ denjenigen Differentialquotienten, der sich ergibt, wenn man u ungeändert läßt und nur v variiert. Es soll also sein:

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \lim_{\Delta u = 0} \frac{f(u + \Delta u, v) - f(u, v)}{\Delta u}, \quad \frac{\partial f}{\partial v} = \lim_{\Delta v = 0} \frac{f(u, v + \Delta v) - f(u, v)}{\Delta v}.$$

Die beiden Differentiale ∂f, die hier vorkommen, haben verschiedene Bedeutung, so daß man sie eigentlich verschieden bezeichnen müßte, z. B. mit $\partial_u f$ und $\partial_v f$; jedoch durch die zugehörigen Nenner ∂u und ∂v wird schon einer Verwechselung genügend vorgebeugt.

Wenn solche Grenzwerte vorhanden sind, so sind sie Funktionen der beiden Größen u und v. Um dies deutlich hervorzuheben, wollen wir sie daher in der nächsten Betrachtung mit $\varphi(u, v)$ und $\psi(u, v)$ bezeichnen. Es sei also:

$$(2) \quad \begin{cases} \lim\limits_{\Delta u = 0} \dfrac{f(u + \Delta u, v) - f(u, v)}{\Delta u} = \varphi(u, v), \\ \lim\limits_{\Delta v = 0} \dfrac{f(u, v + \Delta v) - f(u, v)}{\Delta v} = \psi(u, v). \end{cases}$$

Wenn wir alle Werte der ersten Veränderlichen in dem Intervalle von u bis $u + \Delta u$ und alle Werte der zweiten Veränderlichen in dem Intervalle von v bis $v + \Delta v$ ins Auge fassen, so können wir für alle Stellen in diesen Intervallen solche Ableitungen definieren, vorausgesetzt, daß überall die betreffenden Grenzwerte vorhanden sind. So z. B. können wir die Ableitung nach u auch dann bilden, wenn wir der zweiten Veränderlichen den bestimmten Wert $v + \Delta v$ geben. Nach der ersten Formel (2) ist sie:

$$(3) \quad \lim_{\Delta u = 0} \frac{f(u + \Delta u, v + \Delta v) - f(u, v + \Delta v)}{\Delta u} = \varphi(u, v + \Delta v).$$

Wir setzen nun folgendes voraus:

1. Die Funktionen u und v von x sollen an der betrach-

teten Stelle x bestimmte endliche Werte und bestimmte endliche Ableitungen haben:

$$\frac{du}{dx} = \lim_{\Delta x = 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}, \quad \frac{dv}{dx} = \lim_{\Delta x = 0} \frac{\Delta v}{\Delta x}.$$

2. Die Funktion $f(u, v)$ der beiden Veränderlichen u und v soll überall in den Intervallen von u bis $u + \Delta u$ und von v bis $v + \Delta v$ bestimmte endliche Werte haben.

3. Die Funktion $f(u, v)$, *betrachtet als Funktion von u allein*, soll in dem Intervalle von u bis $u + \Delta u$ überall eine bestimmte endliche Ableitung haben und zwar auch dann, wenn der Größe v *irgend ein* bestimmter Wert in dem Intervalle von v bis $v + \Delta v$ beigelegt wird. Wir setzen also nach der ersten Formel (2) voraus, daß die Funktion $\varphi(u, v)$ für jedes Wertepaar in den Intervallen von u bis $u + \Delta u$ und von v bis $v + \Delta v$ einen bestimmten endlichen Wert habe, so daß also auch der Wert (3) bestimmt und endlich ist.

4. Die Funktion $f(u, v)$, *betrachtet als Funktion von v allein*, soll für das Wertepaar u, v am Anfange jener öfters erwähnten Intervalle eine bestimmte endliche Ableitung haben, d. h. wir setzen nach der zweiten Formel (2) voraus, daß $\psi(u, v)$ dort einen bestimmten endlichen Wert habe.

5. Die Funktion $\varphi(u, v)$ soll für dies Wertepaar u, v am Anfange jener Intervalle eine stetige Funktion von u und v sein.

Die Voraussetzung 1. zieht nach Satz 1, Nr. 27, nach sich, daß u und v für den betrachteten Wert von x stetige Funktionen von x sind, woraus folgt, daß Δu und Δv für $\lim \Delta x = 0$ den Grenzwert Null haben. Aus (1) folgt demnach:

$$(4) \quad \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x = 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta u = 0,\, \Delta v = 0} \frac{f(u + \Delta u, v + \Delta v) - f(u, v + \Delta v)}{\Delta u} \cdot \frac{du}{dx}$$
$$+ \lim_{\Delta v = 0} \frac{f(u, v + \Delta v) - f(u, v)}{\Delta v} \cdot \frac{dv}{dx}.$$

Wir können nun den Mittelwertsatz in Nr. 28 in der in Satz 3 gegebenen Form anwenden auf die Funktion $f(u, v + \Delta v)$, *aufgefaßt als Funktion von u allein*, wegen der Voraussetzungen 2. und 3. Dabei ist x_0 durch u, h durch Δu und die Ableitung $f'(x)$ durch $\varphi(u, v + \Delta v)$ zu ersetzen, so daß also ein positiver echter Bruch θ vorhanden ist, für den

$$f(u + \Delta u, v + \Delta v) - f(u, v + \Delta v) = \Delta u \cdot \varphi(u + \theta \Delta u, v + \Delta v)$$

ist. Hieraus folgt:

$$\frac{f(u + \Delta u, v + \Delta v) - f(u, v + \Delta v)}{\Delta u} = \varphi(u + \theta \Delta u, v + \Delta v).$$

Nach der Voraussetzung 5. ist also:

$$(5) \qquad \lim_{\Delta u = 0, \Delta v = 0} \frac{f(u + \Delta u, v + \Delta v) - f(u, v + \Delta v)}{\Delta u} = \varphi(u, v).$$

Aus der Voraussetzung 4. folgt außerdem:

$$(6) \qquad \lim_{\Delta v = 0} \frac{f(u, v + \Delta v) - f(u, v)}{\Delta v} = \psi(u, v).$$

Setzen wir die Werte (5) und (6) in (4) ein, so kommt:

$$\frac{dy}{dx} = \varphi(u, v) \cdot \frac{du}{dx} + \psi(u, v) \cdot \frac{dv}{dx}.$$

Hierin bedeuten $\varphi(u, v)$ und $\psi(u, v)$ die Ableitungen von $f(u, v)$ nach u bzw. v, so daß wir — ihre oben erwähnte Bezeichnung benutzend — auch schreiben können:

$$\frac{df(u, v)}{dx} = \frac{dy}{dx} = \frac{\partial f(u, v)}{\partial u} \cdot \frac{du}{dx} + \frac{\partial f(u, v)}{\partial v} \cdot \frac{dv}{dx}.$$

Vorhin haben wir das geringste Maß an Voraussetzungen genau bezeichnet. Um jedoch das Ergebnis knapper auszusprechen, wollen wir die Voraussetzungen noch vermehren, obgleich es nicht nötig wäre: Wir wollen voraussetzen, daß es eine positive Zahl h so gebe, daß $f(u, v)$ für alle Werte in den Intervallen von $u - h$ bis $u + h$ und von $v - h$ bis $v + h$ stetig ist und Ableitungen nach u und nach v hat, die ebenfalls in diesen Intervallen stetig sind. Fügen wir dann noch die Voraussetzung 1. hinzu, so können wir $|\Delta x|$ so klein wählen, daß $u + \Delta u$ und $v + \Delta v$ in den bezeichneten Intervallen liegen, so daß dann die neuen Voraussetzungen sicher die Voraussetzungen 2. bis 5. in sich enthalten.

Ehe wir das Ergebnis formulieren, führen wir noch eine bequemere Bezeichnungsweise ein, die wir auch später öfters benutzen wollen:

Wir sagen, eine Funktion $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ habe eine gewisse Eigenschaft *in der Umgebung der Stelle* $x_1 = a_1$, $x_2 = a_2$, ... $x_n = a_n$, wenn es eine positive Zahl h derart gibt, daß f jene Eigenschaft für alle Stellen $(x_1, x_2, \ldots x_n)$ hat, die den

Bedingungen $|x_1 - a_1| < h$, $|x_2 - a_2| < h$, $\cdots |x_n - a_n| < h$ genügen. Alsdann können wir den folgenden Satz aussprechen:

Satz 21: Sind u und v zwei Funktionen von x, die in der Umgebung einer Stelle x bestimmte endliche Werte und bestimmte endliche Ableitungen $du:dx$ und $dv:dx$ haben, und bedeutet $f(u, v)$ eine Funktion von u und v, die in der Umgebung der zugehörigen Stelle (u, v) nebst ihren beiden Ableitungen nach u und v stetig ist als Funktion der beiden Veränderlichen u und v, so hat die Funktion f, aufgefaßt als Funktion von x, an der betrachteten Stelle x die Ableitung:

$$\frac{df(u, v)}{dx} = \frac{\partial f(u, v)}{\partial u} \cdot \frac{du}{dx} + \frac{\partial f(u, v)}{\partial v} \cdot \frac{dv}{dx}.$$

42. Funktionen von mehreren Funktionen. Dies Ergebnis kann leicht verallgemeinert werden. Es seien u, v, w, ... Funktionen von x, und es sei $y = f(u, v, w, \ldots)$ eine aus ihnen zusammengesetzte Funktion von x. Ersetzen wir hierin v, w, ..., aber nicht u, durch ihre Werte in x, so ist y ausgedrückt durch u und x, also aus u und x zusammengesetzt. Man kann daher die letzte Formel, in der x statt v zu schreiben ist, in Anwendung bringen. Dadurch ergibt sich, weil $dx:dx = 1$ ist:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\partial y}{\partial u} \cdot \frac{du}{dx} + \frac{d'y}{dx}.$$

wobei $d'y:dx$ diejenige Ableitung von y bedeuten soll, bei deren formaler Berechnung u als Konstante betrachtet wird. Man hat dann ebenso:

$$\frac{d'y}{dx} = \frac{\partial y}{\partial v} \cdot \frac{dv}{dx} + \frac{d''y}{dx},$$

wobei $d''y:dx$ diejenige Ableitung von y bedeuten soll, bei deren formaler Berechnung u und v als Konstanten betrachtet werden, usw. Man sieht, daß man so schließlich aus allen diesen Gleichungen die folgende gewinnt:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\partial y}{\partial u} \cdot \frac{du}{dx} + \frac{\partial y}{\partial v} \cdot \frac{dv}{dx} + \frac{\partial y}{\partial w} \cdot \frac{dw}{dx} + \cdots.$$

Erinnert man sich noch an den Satz 11 in Nr. 33, nach dem die Funktion $y = f(u, v, w, \ldots)$, aufgefaßt z. B. als Funktion von u allein, die Ableitung

$$\frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{du}{dx}$$

haben würde, so können wir das Ergebnis so aussprechen:

Satz 22: Die Ableitung einer Funktion f von x, die aus mehreren Funktionen u, v, w, ... von x zusammengesetzt ist, ist gleich der Summe aus allen denjenigen Ableitungen, die sich ergeben, wenn man nach und nach jede der zusammensetzenden Funktionen u, v, w, ... als allein veränderlich auffaßt, so daß

$$\frac{df}{dx} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{du}{dx} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{dv}{dx} + \frac{\partial f}{\partial w} \cdot \frac{dw}{dx} + \cdots$$

wird. Vorausgesetzt ist dabei, daß die zusammensetzenden Funktionen u, v, w, ... in der Umgebung der betrachteten Stelle x bestimmte endliche Werte und bestimmte endliche Ableitungen haben und daß die zusammengesetzte Funktion f, aufgefaßt als eine Funktion von unabhängigen Veränderlichen u, v, w, ..., nebst ihren Ableitungen nach u, nach v, nach w usw. in der Umgebung der jenem betrachteten x entsprechenden Stelle (u, v, w, ...) stetig ist.

43. Anwendungen. *1. Beispiel:* Ist $y = u_1 \pm u_2 \pm \cdots \pm u_n$, so hat man die Ableitung $\partial y : \partial u_1$ unter der Annahme zu berechnen, daß $u_2, u_3, \ldots u_n$ bloß Konstanten bedeuten. Daher ist $\partial y : \partial u_1 = 1$; entsprechendes gilt von $\partial y : \partial u_2$ usw., so daß kommt:

$$\frac{d(u_1 \pm u_2 \pm \cdots \pm u_n)}{dx} = \frac{du_1}{dx} \pm \frac{du_2}{dx} \pm \cdots \pm \frac{du_n}{dx},$$

womit Satz 12 in Nr. 34 von neuem bewiesen ist.

2. Beispiel: Ist $y = u_1 u_2 \ldots u_n$, so sind $u_2, u_3 \ldots u_n$ bei der Berechnung von $\partial y : \partial u_1$ als konstante Faktoren aufzufassen. Daher ist $\partial y : \partial u_1 = u_2 u_3 \ldots u_n$, ebenso $\partial y : \partial u_2 = u_1 u_3 \ldots u_n$ usw., so daß sich ergibt:

$$(u_1 u_2 \ldots u_n)' = u_1' u_2 \ldots u_n + u_1 u_2' \ldots u_n + \cdots + u_1 u_2 \ldots u_n',$$

womit die Produktformel in Nr. 35 von neuem bewiesen ist.

3. Beispiel: Ist $y = u : v = uv^{-1}$, so ist, wenn v nicht gerade den Wert Null hat, $\partial y : \partial u = v^{-1}$ und $\partial y : \partial v = -uv^{-2}$, dies nach Satz 19 in Nr. 38. Also kommt:

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = v^{-1} u' - uv^{-2} v' = \frac{vu' - uv'}{v^2}$$

wie in Satz 16, Nr 36.

44. Folgerungen aus dem Satze über Funktionen von mehreren Funktionen. Eine Funktion y von einer Veränderlichen x ergibt sich, wenn man mit x und Konstanten nacheinander eine Reihe von Rechenoperationen ausführt. Die Anzahl dieser Operationen sei jedoch *begrenzt* vorausgesetzt, gleich n. Ist es nicht nur eine Operation, so wird eine der Operationen die letzte sein. Sind durch die vorhergehenden Operationen schon Funktionen $u, v, w, \ldots$ gewonnen worden, so besteht diese letzte Operation darin, daß aus $u, v, w, \ldots$ die Funktion y zusammengesetzt wird:

$$y = f(u, v, w, \ldots).$$

Der Satz 22 in Nr. 42 zeigt nun, daß wir y differenzieren können, sobald wir die einfacheren Funktionen $u, v, w, \ldots$ sowie bie Funktion f, aufgefaßt als Funktion von u allein oder von v allein usw., differenzieren können. Nun sind die Funktionen $u, v, w, \ldots$ ihrerseits durch nur noch $n - 1$ Rechenoperationen hervorgegangen; auf sie können wir dieselbe Betrachtung wie soeben auf y anwenden, usw. So sieht man, daß die Aufgabe, irgend eine entwickelte Funktion y zu differenzieren, Schritt für Schritt auf lauter einzelne Aufgaben zurückgeführt wird, bei denen es sich nur noch darum handelt, gewisse Funktionen von *einer* Veränderlichen zu differenzieren, die durch eine *einzige* Rechenoperation hervorgegangen sind. Diese Funktionen können wir die *elementaren Funktionen* nennen, aus denen die andern zusammengesetzt sind. Es kommt nun ganz darauf an, in welchem Umfange man solche elementare Funktionen heranziehen will. Wir wollen nur die folgenden elementaren Funktionen betrachten:

1. *Die Funktionen, die durch eine einzige algebraische Operation hervorgehen,* nämlich $a \pm x$, ax, x^n. Wir können sie schon differenzieren, nach Nr. 35 und Nr. 38.

2. *Die Logarithmusfunktion* $^a\log x$ *und die Exponentialfunktion* a^x.

3. *Die goniometrischen und zyklometrischen Funktionen* $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$ und $\operatorname{arc} \sin x$, $\operatorname{arc} \cos x$, $\operatorname{arc} \operatorname{tg} x$, $\operatorname{arc} \operatorname{ctg} x$, die man auch zusammen die *Kreisfunktionen* nennt.

Wir haben demnach die Aufgabe, noch die unter 2. und 3. genannten Funktionen zu differenzieren.

§ 5. Differentiation des Logarithmus und der Exponentialfunktion.

45. Bestimmung von $\lim_{m=\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ für ganzes positives m. Die Bestimmung dieser Grenze ist unerläßlich für die Aufgaben, die wir uns gestellt haben. Wir nehmen zunächst an, daß die Zahl m nach einem positiven unendlich großen Werte strebe, *indem sie dabei nur die Werte der ganzen Zahlen durchlaufe.* Alsdann ist nach der Binomialformel in bezug auf einen ganzzahligen positiven Exponenten:

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m = 1 + \frac{m}{1}\cdot\frac{1}{m} + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}\cdot\frac{1}{m^2} + \frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{1}{m^3} + \cdots + \left(\frac{1}{m}\right)^m.$$

Ist nun n irgend eine ganze positive Zahl kleiner als m und bedeutet R_n die Summe aller derjenigen rechts stehenden Glieder, die auf das $(n+1)^{\text{te}}$ Glied folgen, so läßt sich schreiben:

$$(1)\quad \begin{cases} \left(1+\frac{1}{m}\right)^m = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1-\frac{1}{m}}{1\cdot 2} + \frac{\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)}{1\cdot 2\cdot 3} \\ \qquad + \cdots + \frac{\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{m}\right)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n} + R_n, \end{cases}$$

wo

$$R_n = \frac{\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{m}\right)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}$$

$$\times\left[\frac{1-\frac{n}{m}}{n+1} + \frac{\left(1-\frac{n}{m}\right)\left(1-\frac{n+1}{m}\right)}{(n+1)(n+2)} + \cdots + \frac{\left(1-\frac{n}{m}\right)\cdots\left(1-\frac{m-1}{m}\right)}{(n+1)(n+2)\cdots m}\right]$$

ist. Die eckige Klammer enthält $m-n$ Glieder. Sie sind positiv und kleiner als die entsprechenden ersten $m-n$ Glieder der endlosen geometrischen Progression:

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+1)^3} + \cdots.$$

Die Grenze, der sich die Summe der $m-n$ ersten Glieder dieser Reihe immer mehr nähert, je größer m wird, ist $1:n$; folglich ist die Summe in der eckigen Klammer gleich einem positiven echten Bruchteile von $1:n$, also $\theta:n$, wenn θ einen

positiven echten Bruch bedeutet. Es ist daher, wie groß auch immer die ganze Zahl m gewählt sein mag:

$$(2) \qquad R_n = \frac{\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{m}\right)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}\cdot\frac{\theta}{n}.$$

Die Zahl n können wir bestimmt wählen; lassen wir nun m immer weiter wachsen, wobei sich θ sehr wohl ändern kann, und bezeichnen wir mit $\mathfrak{R}_n$ den Grenzwert von R_n, so erhalten wir aus (1)

$$(3) \quad \lim_{m=\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^m = 1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1\cdot 2}+\cdots+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}+\mathfrak{R}_n,$$

und nach (2) ist

$$(4) \qquad \mathfrak{R}_n = \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}\cdot\frac{\theta}{n}.$$

θ bedeutet dabei eine Zahl zwischen 0 und 1.

Die positive ganze Zahl n kann willkürlich gewählt werden. Lassen wir sie jetzt beliebig groß werden, so strebt $\mathfrak{R}_n$ nach Null. Es folgt hieraus, daß, je mehr Glieder der Summe

$$1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}+\cdots$$

addiert werden, um so genauer ein bestimmter Grenzwert erreicht wird. Denn durch Addition beliebig vieler Glieder erhält man Werte, die immer mehr wachsen, und die doch kleiner sind als der Wert

$$1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}\,\frac{1}{n},$$

weil $\mathfrak{R}_n$ nach (4) nicht größer als das letzte Glied dieser Summe ist.

Jenen bestimmten Grenzwert bezeichnet man mit dem Buchstaben e; es ist also

$$\lim_{m=\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^m = e,$$

wenn man

$$e = 1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\cdots$$

setzt. Bricht man die Reihe hinter dem $(n+1)^{\text{ten}}$ Gliede ab, so ist der Fehler, d. h. die Abweichung vom wahren Werte, gleich der Größe $\mathfrak{R}_n$, die man den *Rest der Reihe* nennt.

45]

Dieser Rest ist nach (4) kleiner als der n^{te} Teil des $(n+1)^{\text{ten}}$ Gliedes, hinter dem man die Reihe abgebrochen hat. Dies gestattet, den numerischen Wert der Zahl e mit einer beliebig großen Annäherung zu berechnen. Man findet:

$$e = 2{,}71828\,18284\,59045\ldots$$

46. Bestimmung von $\lim\limits_{m=\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ für beliebiges m. Nehmen wir ferner an, die Zahl m werde *positiv* unendlich, indem sie *alle* positiven Zahlenwerte durchläuft, und bezeichnen wir mit μ die ganze Zahl, die dem Werte m jedesmal am nächsten liegt und kleiner ist als m, so wird:

$$\left(1+\frac{1}{\mu+1}\right)^{\mu} < \left(1+\frac{1}{m}\right)^{m} < \left(1+\frac{1}{\mu}\right)^{\mu+1},$$

oder

$$\left(1+\frac{1}{\mu+1}\right)^{\mu+1} : \left(1+\frac{1}{\mu+1}\right) < \left(1+\frac{1}{m}\right)^{m} < \left(1+\frac{1}{\mu}\right)^{\mu}\left(1+\frac{1}{\mu}\right)\cdot$$

Wenn nun m über alle Grenzen wächst, so gilt dasselbe von der ganzen Zahl μ. Dann werden die Grenzwerte (vgl. Nr. 45):

$$\lim\left(1+\frac{1}{\mu}\right)^{\mu} = \lim\left(1+\frac{1}{\mu+1}\right)^{\mu+1} = e,$$

$$\lim\left(1+\frac{1}{\mu+1}\right) = \lim\left(1+\frac{1}{\mu}\right) = 1.$$

Mithin ist die Größe $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ zwischen zwei Werten eingeschlossen, die beide die Grenze e haben; man hat folglich nach Satz 34 in Nr. 25:

$$\lim_{m=+\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m} = e.$$

Nehmen wir schließlich an, daß m *negativ* unendlich werde, und setzen wir $m = -\mu$, so ist:

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m} = \left(1-\frac{1}{\mu}\right)^{-\mu} = \left(\frac{\mu}{\mu-1}\right)^{\mu} = \left(1+\frac{1}{\mu-1}\right)^{\mu},$$

also

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m} = \left(1+\frac{1}{\mu-1}\right)^{\mu-1}\cdot\left(1+\frac{1}{\mu-1}\right)\cdot$$

Wächst μ über alle Grenzen, d. h. nimmt m beliebig weit ab, so kommt nach dem Vorhergehenden:

$$\lim\left(1+\frac{1}{\mu-1}\right)^{\mu-1} = e, \quad \lim\left(1+\frac{1}{\mu-1}\right) = 1;$$

also ist auch in diesem Falle

$$\lim_{m=-\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^m = e.$$

Satz 23: Es ist

$$\lim_{m=\pm\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^m = e,$$

und e bedeutet den bestimmten positiven Wert der unendlichen Reihe:

$$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \cdots.$$

47. Die Ableitung von $\log x$. Die Basis der Logarithmen sei irgend eine gegebene positive Zahl a; die Veränderliche x kann nach Nr. 11 alle positiven Werte annehmen. Erteilt man ihr den Zuwachs $\varDelta x$, so wird

$$\varDelta \log x = \log(x+\varDelta x) - \log x = \log\left(1+\frac{\varDelta x}{x}\right),$$

also

$$\frac{\varDelta \log x}{\varDelta x} = \frac{\log\left(1+\frac{\varDelta x}{x}\right)}{\varDelta x}.$$

Setzt man $\frac{x}{\varDelta x} = m$ oder $\varDelta x = \frac{x}{m}$, so folgt:

$$\frac{\varDelta \log x}{\varDelta x} = \frac{m}{x}\log\left(1+\frac{1}{m}\right) = \frac{1}{x}\log\left(1+\frac{1}{m}\right)^m.$$

Wenn nun $\varDelta x$ nach Null strebt, so wird m unendlich für jeden positiven Wert von x. Nach Satz 23 kommt also:

Satz 24: Die Ableitung des Logarithmus von x mit der Basis a ist für jedes positive x:

$$\frac{d\log x}{dx} = \frac{1}{x}\log e.$$

Sind die Logarithmen in bezug auf die Basis e gebildet, so heißen sie die *natürlichen Logarithmen* (auch Nepersche Logarithmen). Hier ist $\log e = 1$ zu setzen. Daher:

Satz 25: Die Ableitung des natürlichen Logarithmus von x ist gleich $1:x$, *in Formel:*

$$\frac{d\log\mathrm{nat}\, x}{dx} = \frac{1}{x}.$$

Ersetzt man x durch eine Funktion u von x, so kommt nach Satz 11 in Nr. 33:

$$\frac{d\log\mathrm{nat}\, u}{dx} = \frac{d\log\mathrm{nat}\, u}{du}\cdot\frac{du}{dx} = \frac{1}{u}\cdot\frac{du}{dx} = \frac{u'}{u}.$$

Hierdurch rechtfertigt sich der Name *logarithmische Ableitung*, der in Nr. 35 eingeführt wurde. Sie ist in der Tat die Ableitung des natürlichen Logarithmus der betreffenden Funktion.

Eine Anwendung dieser Formel machen wir auf den Fall der Potenz $y = x^n$ mit beliebigem *irrationalen*, aber *konstanten* Exponenten. Dabei ist x nach Nr. 5 *positiv* anzunehmen. Alsdann ist

$$\log y = n \log x,$$

so daß die Differentiation gibt:

$$\frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{n}{x}, \quad \text{d. h.} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{ny}{x} = n x^{n-1}.$$

Der Satz 19 in Nr. 38 läßt sich also so verallgemeinern:

Satz 26: Die Ableitung einer Potenz x^n mit konstantem Exponenten n ist gleich nx^{n-1}.

48. Die Ableitung von a^x. Die Basis a muß nach Nr. 5 *positiv* angenommen werden, weil ja die unabhängige Veränderliche x irrationale Werte haben kann. Alsdann hat a^x einen *positiven* Wert. Es kommt nun:

$$\Delta(a^x) = a^{x+\Delta x} - a^x = a^x(a^{\Delta x} - 1),$$

also:

$$(1) \qquad \frac{\Delta(a^x)}{\Delta x} = a^x \cdot \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x}.$$

Führen wir m ein durch die Formel:

$$(2) \qquad a^{\Delta x} = 1 + \frac{1}{m},$$

so ist, wenn wir hier beiderseits den Logarithmus bilden:

$$\Delta x \cdot \log a = \log\left(1 + \frac{1}{m}\right) \quad \text{oder} \quad \Delta x = \frac{\log\left(1 + \frac{1}{m}\right)}{\log a}.$$

Setzen wir diesen Wert von Δx und den Wert (2) von $a^{\Delta x}$ in (1) ein, so kommt:

$$\frac{\Delta(a^x)}{\Delta x} = a^x \frac{\log a}{m \log\left(1 + \frac{1}{m}\right)} = a^x \frac{\log a}{\log\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m}.$$

Strebt Δx nach Null, so wächst m nach (2) über alle Grenzen. Nach Satz 23, Nr. 46, kommt also:

$$\frac{d(a^x)}{dx} = a^x \frac{\log a}{\log e}.$$

Die Basis der Logarithmen ist dabei irgend eine. Wählt man das natürliche System, so ist $\log e = 1$ und demnach

$$\frac{d(a^x)}{dx} = a^x \log \operatorname{nat} a.$$

Insbesondere ergibt sich für $a = e$, daß e^x die Ableitung e^x hat.

Satz 27: Die Ableitung von a^x ist $a^x \log \operatorname{nat} a$, die von e^x ist e^x selbst.

49. Eine Verifikation. Wir haben die Bestimmung der Ableitungen von $\log x$ und a^x direkt ausgeführt. Sobald aber die Ableitung von einer dieser Funktionen bekannt ist, kann man hieraus die Ableitung der anderen berechnen. Denn setzen wir $y = a^x$, so ist $\log y$ (mit der Basis a) nach Nr. 11 die inverse Funktion x. Nach Satz 18 in Nr. 37 ist also die Ableitung von a^x gleich dem reziproken Werte der Ableitung von $\log y$ nach y. Diese Ableitung aber ist nach Satz 24, Nr. 47, gleich $\log e : y$. Folglich kommt:

$$\frac{d(a^x)}{dx} = \frac{y}{\log e} = \frac{a^x}{\log e}.$$

Wir haben aber $e = a^{\log e}$, also, wenn wir beiderseits den *natürlichen* Logarithmus nehmen:

$$1 = \log e \log \operatorname{nat} a, \quad \text{d. h.} \quad \frac{1}{\log e} = \log \operatorname{nat} a.$$

Demnach kommt wie in Nr. 48 aufs neue:

$$\frac{d(a^x)}{dx} = a^x \log \operatorname{nat} a.$$

Wir merken hier an, *daß wir den natürlichen Logarithmus künftig kurz mit* ln *bezeichnen wollen.*

50. Anwendungen.

1. Beispiel: Ist

$$y = \ln \sqrt{\frac{1-x}{1+x}},$$

so ist auch:

$$y = \tfrac{1}{2} \ln (1-x) - \tfrac{1}{2} \ln (1+x),$$

daher:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\,\frac{(1-x)'}{1-x} - \frac{1}{2}\,\frac{(1+x)'}{1+x} = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x}\right)$$

oder:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x^2-1}.$$

2. Beispiel: Ist

$$y = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + a}\right)$$

und a eine Konstante, so hat man

$$y' = \frac{\left(x + \sqrt{x^2 + a}\right)'}{x + \sqrt{x^2 + a}} = \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + a}}}{x + \sqrt{x^2 + a}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + a}}.$$

3. Beispiel: Ist

$$y = u^v$$

und sind u und v gegebene Funktionen von x, so wird

$$\ln y = v \ln u,$$

also:

$$\frac{d \ln y}{dx} = v \frac{d \ln u}{dx} + \ln u \frac{dv}{dx}$$

oder:

$$\frac{y'}{y} = v \frac{u'}{u} + v' \ln u,$$

also:

$$y' = v u^{v-1} u' + u^v v' \ln u.$$

Man hätte auch die Regel für die Differentiation zusammengesetzter Funktionen anwenden können, in Verbindung mit der Regel für die Ableitung der Funktion a^x.

Setzt man $u = x$, $v = 1 : x$, so gibt die obige Formel

$$\frac{d\left(x^{\frac{1}{x}}\right)}{dx} = x^{\frac{1}{x} - 2}(1 - \ln x).$$

Nach Satz 9 in Nr. 30 erkennt man hieraus, daß die Funktion $x^{\frac{1}{x}}$ wächst, solange x kleiner als e bleibt, denn die Ableitung ist dann positiv, und daß sie abnimmt, wenn x größer als e wird. Folglich erlangt die Funktion ihren größten Wert für $x = e$. Für negative Werte von x ist die Funktion überhaupt nicht definiert, nach Nr. 5.

4. Beispiel: In welchen Logarithmensystemen gibt es Zahlen, die gleich ihren Logarithmen sind?

Es handelt sich darum zu bestimmen, bei welchen Werten von a sich Größen x nachweisen lassen, für die

$$y = a^x - x$$

den Wert Null annimmt. Es ist:

$$\frac{dy}{dx} = a^x \ln a - 1.$$

Nach Nr. 8 nimmt a^x von $+\infty$ bis Null ab, wenn x von $-\infty$ bis $+\infty$ wächst, sobald $a < 1$ ist. Ist $a > 1$, so nimmt a^x dagegen von 0 bis $+\infty$ zu, wenn x von $-\infty$ bis $+\infty$ geht. Also folgt:

Im Falle $0 < a < 1$ ist die Ableitung von y stets negativ, so daß y nach Satz 9 in Nr. 30 mit wachsendem x stets abnimmt. Für $x = 0$ ist y noch positiv, nämlich gleich Eins, für $\lim x = +\infty$ wird $\lim y = -\infty$. Es gibt also einen und nur einen und zwar positiven Wert x, für den $y = 0$ wird.

Im Falle $a > 1$ nimmt y so lange ab, als x kleiner bleibt als derjenige Wert x_1, für den die Ableitung gleich Null, d. h., wenn man die Logarithmen bildet, für den $x_1 \ln a + \ln \ln a = 0$ wird. Dies ist der Wert

$$x_1 = -\frac{\ln \ln a}{\ln a}.$$

Ist $x > x_1$, so wächst y. Für $\lim x = -\infty$ ist $\lim y = +\infty$; für hinreichend großes x wird, wie wir in Nr. 131 (4. Beisp.) zeigen, $a^x > x$, also $y > 0$. Da y bis $x = x_1$ abnimmt, nachher wächst, so erreicht y für $x = x_1$ den kleinsten Wert. Wegen $a = e^{\ln a}$ ist er gleich $(1 + \ln \ln a) : \ln a$. Es sind jetzt drei Fälle möglich: Ist erstens dieser kleinste Wert negativ, so wird y für zwei Werte von x gleich Null, der eine ist kleiner als x_1, der andere größer als x_1. Ist zweitens dieser kleinste Wert positiv, so bleibt y stets positiv. Ist drittens dieser kleinste Wert gleich Null, so wird $y = 0$ nur für $x = x_1$. In diesem Falle ist $\ln \ln a = -1$, also $\ln a = 1 : e$ und $a = e^{1:e}$.

§ 6. Differentiation der Kreisfunktionen.

51. Die goniometrischen Funktionen. Wir betrachten zuerst die Funktionen $\sin x$ und $\cos x$. Erteilen wir der Veränderlichen x den Zuwachs Δx, so ist:

$$\Delta \sin x = \sin(x + \Delta x) - \sin x = 2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right),$$

$$\Delta \cos x = \cos(x + \Delta x) - \cos x = -2 \sin \frac{\Delta x}{2} \sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right),$$

also:

$$\frac{\Delta \sin x}{\Delta x} = \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right),$$

$$\frac{\Delta \cos x}{\Delta x} = -\frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right).$$

Nach Nr. 26 ist der Grenzwert von $\sin \frac{\Delta x}{2} : \frac{\Delta x}{2}$ gleich Eins. Also kommt:

$$\frac{d \sin x}{dx} = \cos x, \quad \frac{d \cos x}{dx} = -\sin x.$$

Da die Funktionen $\operatorname{tg} x$ und $\operatorname{ctg} x$ gleich den Quotienten

$$\frac{\sin x}{\cos x} \quad \text{und} \quad \frac{\cos x}{\sin x}$$

sind, so kann man ihre Ableitungen mittels der Regel für die Differentiation eines Bruches aus den Ableitungen von $\sin x$ und $\cos x$ berechnen. Es wird:

$$\frac{d \operatorname{tg} x}{dx} = \frac{\cos x \frac{d \sin x}{dx} - \sin x \frac{d \cos x}{dx}}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x},$$

$$\frac{d \operatorname{ctg} x}{dx} = \frac{\sin x \frac{d \cos x}{dx} - \cos x \frac{d \sin x}{dx}}{\sin^2 x} = -\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

Es hat sich mithin ergeben:

Satz 28: Die Ableitungen der goniometrischen Funktionen sind:

$$\frac{d \sin x}{dx} = \cos x, \quad \frac{d \cos x}{dx} = -\sin x,$$

$$\frac{d \operatorname{tg} x}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad \frac{d \operatorname{ctg} x}{dx} = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

Die rechts stehenden Formeln hätten wir auch aus den links stehenden ableiten können. Denn wenn $u = \frac{1}{2}\pi - x$ ist, so folgt aus den Formeln links nach Satz 11 in Nr. 33:

$$\frac{d \sin u}{dx} = -\cos u, \quad \frac{d \operatorname{tg} u}{dx} = -\frac{1}{\cos^2 u}.$$

Es ist aber $\sin u = \cos x$, $\cos u = \sin x$, $\operatorname{tg} u = \operatorname{ctg} x$, so daß sich in der Tat ergibt:

$$\frac{d \cos x}{dx} = -\sin x, \quad \frac{d \operatorname{ctg} x}{dx} = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

52. Eine Anwendung. Verbindet man die vorstehenden Regeln mit der Regel für die Differentiation der Logarithmen, so erhält man unmittelbar die Ableitungen der Funktionen

$$\ln \sin x, \quad \ln \cos x, \quad \ln \operatorname{tg} x.$$

Es wird:

$$\frac{d \ln \sin x}{dx} = \frac{1}{\sin x} \frac{d \sin x}{dx} = \frac{\cos x}{\sin x} = \operatorname{ctg} x,$$

$$\frac{d \ln \cos x}{dx} = \frac{1}{\cos x} \frac{d \cos x}{dx} = -\frac{\sin x}{\cos x} = -\operatorname{tg} x,$$

$$\frac{d \ln \operatorname{tg} x}{dx} = \frac{1}{\operatorname{tg} x} \frac{d \operatorname{tg} x}{dx} = \frac{1}{\operatorname{tg} x \cos^2 x} = \frac{2}{\sin 2x}.$$

Wenn man in der letzten Formel x durch $u = \frac{1}{2}x$ bzw. $u = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\pi$ ersetzt und Satz 11 in Nr. 33 benutzt, so erhält man:

$$\frac{d \ln \operatorname{tg} \frac{1}{2}x}{dx} = \frac{1}{\sin x}, \qquad \frac{d \ln \operatorname{tg}(\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\pi)}{dx} = \frac{1}{\cos x}.$$

53. Die zyklometrischen Funktionen. Sie sind nach Nr. 12 zu den goniometrischen Funktionen invers, so daß ihre Differentialquotienten nach Satz 18, Nr. 37, die reziproken Werte der Differentialquotienten der goniometrischen Funktionen sind. Im einzelnen kommt:

a) Ist $y = \operatorname{arc} \sin x$, so wird $x = \sin y$, also nach Nr. 51 auch $dx : dy = \cos y$. Folglich kommt $dy : dx = 1 : \cos y$. Da aber $\sin y = x$ ist, haben wir $\cos y = \sqrt{1 - x^2}$. Mithin ergibt sich

$$\frac{d \operatorname{arc} \sin x}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

für jedes x im Intervalle $-1 < x < +1$. Das Vorzeichen der Wurzel ist das von $\cos y$, also positiv, wenn $\operatorname{arc} \sin x$ einen im Intervalle von $-\frac{1}{2}\pi$ bis $+\frac{1}{2}\pi$ gelegenen Bogen bedeutet. (Vgl. c in Nr. 12.)

b) Ist $y = \operatorname{arc} \cos x$, so wird $x = \cos y$, also nach Nr. 51 auch $dx : dy = -\sin y$ und folglich $dy : dx = -1 : \sin y$, so daß wegen $\cos y = x$ kommt:

$$\frac{d \operatorname{arc} \cos x}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

für $-1 < x < +1$. Das Vorzeichen der Wurzel ist das von $\sin y$, daher positiv, wenn $\operatorname{arc} \cos x$ einen im Intervalle von 0 bis π gelegenen Bogen bedeutet. (Vgl. d in Nr. 12.)

c) Aus $y = \operatorname{arc} \operatorname{tg} x$ folgt $x = \operatorname{tg} y$, also $dx : dy = 1 : \cos^2 y$, d. h. $dy : dx = \cos^2 y$. Da $\operatorname{tg} y = x$ ist, so wird $\cos^2 y = 1 : (1 + x^2)$. Also kommt für jedes x:

$$\frac{d \operatorname{arc} \operatorname{tg} x}{dx} = \frac{1}{1 + x^2}.$$

d) Aus $y = \operatorname{arc} \operatorname{ctg} x$ folgt $x = \operatorname{ctg} y$, also $dx : dy = -1 : \sin^2 y$, d. h. $dy : dx = -\sin^2 y$, woraus für jedes x hervorgeht:

$$\frac{d \operatorname{arc} \operatorname{ctg} x}{dx} = -\frac{1}{1 + x^2}.$$

Satz 29: Für $-1 < x < +1$ *ist*

$$\frac{d \operatorname{arc} \sin x}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad \frac{d \operatorname{arc} \cos x}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Das Vorzeichen der ersten Quadratwurzel ist das gleiche wie das des zugehörigen Kosinus und das Vorzeichen der zweiten das gleiche wie das des zugehörigen Sinus. Insbesondere für

$$-\tfrac{1}{2}\pi < \operatorname{arc} \sin x < +\tfrac{1}{2}\pi$$

wird die Quadratwurzel im Differentialquotienten von $\operatorname{arc} \sin x$ *positiv und für*

$$0 < \operatorname{arc} \cos x < \pi$$

die Quadratwurzel im Differentialquotienten von $\operatorname{arc} \cos x$ *positiv. Außerdem ist für jedes* x:

$$\frac{d \operatorname{arc} \operatorname{tg} x}{dx} = \frac{1}{1 + x^2}, \quad \frac{d \operatorname{arc} \operatorname{ctg} x}{dx} = -\frac{1}{1 + x^2}.$$

Man möge beachten, daß die Ableitungen der zyklometrischen Funktionen ebenso wie die Ableitung des Logarithmus *algebraische* Funktionen sind. Es ist $\operatorname{arc} \operatorname{tg} x + \operatorname{arc} \operatorname{ctg} x$ stets ein ungerades Vielfaches von $\frac{1}{2}\pi$, also konstant, womit im Einklange steht, daß $\operatorname{arc} \operatorname{tg} x$ und $\operatorname{arc} \operatorname{ctg} x$ entgegengesetzt gleiche Ableitungen haben. Vgl. Satz 7, Nr. 29. Auch bemerkt man, daß entweder $\operatorname{arc} \sin x + \operatorname{arc} \cos x$ oder $\operatorname{arc} \sin x - \operatorname{arc} \cos x$ ein ungerades Vielfaches von $\frac{1}{2}\pi$ ist, was damit im Einklange steht, daß $\operatorname{arc} \sin x$ und $\operatorname{arc} \cos x$ Ableitungen haben, die sich entweder nur durch das Vorzeichen oder überhaupt nicht voneinander unterscheiden.

§ 7. Differentiation der unentwickelten Funktionen.

54. Eine Funktion definiert durch eine Gleichung. In diesem Paragraphen wollen wir zeigen, wie man *rein formal* die Differentialquotienten von Funktionen berechnen kann, die *implizite* (vgl. Nr. 6), nämlich durch unaufgelöste Gleichungen, gegeben sind. Dabei wollen wir die Frage, ob es wirklich solche Funktionen gibt und ob sie wirklich Ableitungen haben, ganz beiseite lassen. Auf solche Fragen nämlich werden wir erst im dritten Bande zurückkommen.

Es liege zunächst der Fall vor, daß eine Funktion y von einer unabhängigen Veränderlichen x durch eine nicht nach y aufgelöste Gleichung gegeben sei. Bringen wir die rechte Seite der Gleichung auf Null, so hat die Gleichung die Form:

$$f(x, y) = 0.$$

Nehmen wir an, sie definiere in der Tat innerhalb eines gewissen Intervalles von x die Veränderliche y als Funktion von x, etwa als die Funktion $v(x)$, so ist für *jedes* x innerhalb des Intervalles

$$f(x, v(x)) = 0,$$

d. h. $f(x, v(x))$ ist eine solche Funktion von x, die innerhalb des Intervalles den konstanten Wert Null und daher auch die Ableitung Null hat, nach Satz 4 in Nr. 29:

$$\frac{d f(x, v(x))}{dx} = 0. \tag{1}$$

Nun aber ist $f(x, v(x))$ als eine Funktion zu betrachten, die aus den beiden Funktionen x und $v(x)$ *zusammengesetzt* ist. Dies tritt noch klarer hervor, wenn wir die erste Funktion, nämlich x, zum Überfluß mit u bezeichnen, weil dann $f(x, v(x))$ die Form $f(u, v)$ hat. Wir kommen dann dazu, den Satz 21 in Nr. 41 anzuwenden. *Wenn die bei ihm angegebenen Voraussetzungen erfüllt sind,* so ergibt die Formel des Satzes wegen (1) und, weil wegen $u = x$ insbesondere $du : dx = 1$ ist:

$$0 = \frac{\partial f(u, v)}{\partial u} + \frac{\partial f(u, v)}{\partial v} \cdot \frac{dv}{dx}$$

oder, wenn wir wieder u durch x und v durch y ersetzen:

$$0 = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx}. \tag{2}$$

Hieraus folgt:

(3)
$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}}{\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}}.$$

Man kann durch genaueres Eingehen auf die bei Satz 21 in Nr. 41 angegebenen Voraussetzungen feststellen, unter welchen Voraussetzungen die Formel (3) gilt, die uns die Ableitung $dy : dx$ der implizite gegebenen Funktion y von x liefert. Jedoch wollen wir hier, wie gesagt, nur die *formale* Seite des Problems betrachten und deshalb dies Ergebnis (3) nicht als Satz formulieren. Die Formel (3) gibt uns eine *Methode* an, wie man die Ableitung der durch $f(x, y) = 0$ definierten Funktion y von x praktisch berechnen kann, wenn die Funktion existiert und eine Ableitung hat und wenn ferner die in (3) mit $f(x, y)$ gemachten Operationen erlaubt sind.

55. Beispiele.

1. Beispiel: Es sei gegeben:

$$a^2y^2 + b^2x^2 - a^2b^2 = 0.$$

Hier bedeutet $f(x, y)$ die links stehende Funktion. Für sie ist:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2b^2x, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2a^2y,$$

so daß die Formel (3) der vorigen Nummer gibt:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{b^2}{a^2}\frac{x}{y}.$$

Die vorgelegte Gleichung ist bekanntlich die einer *Ellipse*, und sie läßt sich nach y auflösen, so daß wir das Ergebnis bestätigen können. Die Auflösung nach y gibt nämlich:

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2},$$

woraus durch direkte Differentiation folgt:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{bx}{a\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

Da die Wurzel gleich $ay : b$ ist, so erhalten wir in der Tat dieselbe Formel wie oben.

2. Beispiel: Die Punkte, deren Koordinaten die Gleichung

$$(x^2 + y^2)^2 - 2a^2(x^2 - y^2) = 0$$

erfüllen, bilden die sogenannte *Lemniskate*. Bedeutet f die links stehende Funktion, so ist

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x(x^2 + y^2) - 4a^2x, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 4y(x^2 + y^2) + 4a^2y.$$

Nach (3) in Nr. 54 kommt also:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x^2 + y^2 - a^2}{x^2 + y^2 + a^2} \cdot \frac{x}{y}.$$

Nur für das Wertepaar $x = y = 0$, das die gegebene Gleichung erfüllt, versagt die Formel. Wiederum kann man das Ergebnis verifizieren, weil die gegebene Gleichung quadratisch in y^2 ist und daher y als *entwickelte* Funktion von x aus ihr berechnet werden kann. Wir überlassen diese Bestätigung dem Leser.

56. Zwei Funktionen definiert durch zwei Gleichungen. Sind zwei Gleichungen in x, y, z gegeben:

$$f(x, y, z) = 0, \quad F(x, y, z) = 0,$$

so können wir uns vorstellen, sie seien für einen gewissen Variabilitätsbereich von x nach y und z auflösbar. Dann sind y und z gewisse Funktionen von x. Würden wir sie in $f(x, y, z)$ und $F(x, y, z)$ einsetzen, so würden f und F Funktionen von x allein werden, aber für jedes x im Intervalle gleich Null sein, also auch ihre Ableitungen $df : dx$ und $dF : dx$. Andererseits wären dann $f(x, y, z)$ und $F(x, y, z)$ solche Funktionen von x allein, die aus x und zwei Funktionen y und z von x *zusammengesetzt* sind wie in Satz 22, Nr. 42, wo die Funktion f aus den Funktionen $u, v, w, \ldots$ von x allein zusammengesetzt ist. Wir wenden also diesen Satz an, indem wir darin unter f eine Funktion f bzw. F von drei Funktionen u, v, w verstehen, von denen u gleich x selbst ist dagegen v und w die gedachten Funktionen y und z bedeuten sollen. Dann ist $du : dx = 1$ und, wie schon gesagt, $df : dx$ und $dF : dx$ gleich Null, so daß kommt:

$$(1) \qquad \begin{cases} 0 = \dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial y} \cdot \dfrac{dy}{dx} + \dfrac{\partial f}{\partial z} \cdot \dfrac{dz}{dx}, \\[2ex] 0 = \dfrac{\partial F}{\partial x} + \dfrac{\partial F}{\partial y} \cdot \dfrac{dy}{dx} + \dfrac{\partial F}{\partial z} \cdot \dfrac{dz}{dx}. \end{cases}$$

Hieraus folgt:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dfrac{\partial f}{\partial z}\dfrac{\partial F}{\partial x} - \dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial F}{\partial z}}{\dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{\partial F}{\partial z} - \dfrac{\partial f}{\partial z}\dfrac{\partial F}{\partial y}}, \quad \frac{dz}{dx} = \frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial F}{\partial y} - \dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{\partial F}{\partial z} - \dfrac{\partial f}{\partial z}\dfrac{\partial F}{\partial y}}.$$

Die Voraussetzungen, unter denen diese Formeln gelten, könnten wir zum Teil aus den Voraussetzungen des benutzten Satzes 22 in Nr. 42 entnehmen. Wir wollen hier jedoch wie in Nr. 54 nur die rechnerische Seite des Problems betrachten.

Wir fügen hinzu: Die Auflösung der Gleichungen (1) nach $dy:dx$ und $dz:dx$, in denen sie ja linear sind, geschieht am bequemsten mit Hilfe von *Determinanten.* Es empfiehlt sich dabei eine Abkürzung: Es soll, wenn f und F Funktionen von mehreren Veränderlichen, z. B. x, y, z, sind, unter

$$\begin{pmatrix} f & F \\ x & y \end{pmatrix}$$

diejenige zweireihige Determinante verstanden werden, deren erste *Zeile* aus den Ableitungen von f nach x und y und deren zweite *Zeile* aus den Ableitungen von F nach x und y besteht. So soll allgemein sein:

$$\begin{pmatrix} f & F \\ x & y \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} \end{vmatrix}, \quad \begin{pmatrix} f & F \\ y & z \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \\ \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z} \end{vmatrix}, \quad \begin{pmatrix} f & F \\ z & x \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial z} & \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial F}{\partial z} & \frac{\partial F}{\partial x} \end{vmatrix}.$$

Man nennt diese Ausdrücke die *Funktionaldeterminanten* von f und F hinsichtlich x, y bzw. y, z bzw. z, x. Jetzt ist die Auflösung von (1) so zu schreiben:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\begin{pmatrix} f & F \\ z & x \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} f & F \\ y & z \end{pmatrix}}, \quad \frac{dz}{dx} = \frac{\begin{pmatrix} f & F \\ x & y \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} f & F \\ y & z \end{pmatrix}}.$$

57. Beispiel. Es seien y und z als Funktionen von x definiert durch die beiden Gleichungen:

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2, \quad \alpha x + \beta y + \gamma z = p,$$

wo $r, \alpha, \beta, \gamma, p$ Konstanten bedeuten. Sind x, y, z rechtwinklige Koordinaten im Raume, so ist die erste Gleichung die einer *Kugel*, die zweite die einer *Ebene;* beide zusammen stellen also den *Kreis* dar, in dem die Kugel die Ebene schneidet. Wir könnten hier y und z wirklich als Funktionen von x *explizite* berechnen und darauf ihre Differentialquotienten direkt finden. Da also Differentialquotienten wirklich vorhanden sind, finden wir sie jedoch nunmehr bequemer nach dem angegebenen Ver-

fahren. Dabei sind unter f und F die Funktionen zu verstehen:

$$f = x^2 + y^2 + z^2 - r^2, \quad F = \alpha x + \beta y + \gamma z - p.$$

Es ist hier:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 2z,$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \alpha, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = \beta, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = \gamma.$$

Also haben die Funktionaldeterminanten die Werte:

$$\binom{f\,F}{x\,y} = 2(\beta x - \alpha y), \quad \binom{f\,F}{y\,z} = 2(\gamma y - \beta z), \quad \binom{f\,F}{z\,x} = 2(\alpha z - \gamma x),$$

so daß kommt:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\alpha z - \gamma x}{\gamma y - \beta z}, \quad \frac{dz}{dx} = \frac{\beta x - \alpha y}{\gamma y - \beta z}.$$

58. n Funktionen definiert durch n Gleichungen. Es seien n Gleichungen in $n+1$ Veränderlichen $x, x_1, x_2, \ldots x_n$ gegeben:

$$f_1(x, x_1, x_2, \ldots x_n) = 0,$$
$$f_2(x, x_1, x_2, \ldots x_n) = 0,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$f_n(x, x_1, x_2, \ldots x_n) = 0.$$

Wir wollen voraussetzen, daß sie nach $x_1, x_2, \ldots x_n$ auflösbar seien, so daß sie also $x_1, x_2, \ldots x_n$ *implizite* als Funktionen von x allein definieren. Denken wir uns für $x_1, x_2, \ldots x_n$ wirklich diese Funktionen von x in alle n Funktionen f_i eingesetzt, so wird jedes f_i eine Funktion von x *allein*. Aber jedes f_i ist gleich Null für jeden Wert von x innerhalb des für x erlaubten Bereiches. Also wird die Ableitung $df_i : dx = 0$. Andererseits findet man diese Ableitung wieder nach der in Satz 22 von Nr. 42 angegebenen Regel, worin $u, v, w, \ldots$ durch $x, x_1, x_2, \ldots x_n$ zu ersetzen sind. Daher kommt, weil $u = x$, also $du : dx = 1$ ist, für $i = 1, 2, \ldots n$:

$$0 = \frac{\partial f_i}{\partial x} + \frac{\partial f_i}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dx} + \frac{\partial f_i}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dx} + \cdots + \frac{\partial f_i}{\partial x_n}\frac{dx_n}{dx}.$$

Es gehen so insgesamt n Gleichungen hervor, die linear hinsichtlich

$$\frac{dx_1}{dx}, \quad \frac{dx_2}{dx}, \quad \ldots \frac{dx_n}{dx}$$

sind. Sie lassen sich mit Hilfe von Determinanten leicht auflösen. Es soll wieder die in Nr. 56 benutzte Bezeichnung der *Funktionaldeterminanten* angewandt werden. So bedeute

$$\begin{pmatrix} f_1 & f_2 & \cdots & f_n \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix}$$

diejenige n-reihige Determinante, deren i^{te} *Zeile* aus den Ableitungen von f_i nach $x_1, x_2, \ldots x_n$ besteht. Alsdann kommt:

$$(1) \qquad \frac{dx_k}{dx} = -\frac{\begin{pmatrix} f_1 f_2 \cdots f_n \\ x_1 \ldots x_{k-1}\, x\, x_{k+1} \ldots x_n \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} f_1 & f_2 & \cdots & f_n \\ x_1 & x_2 & \ldots & x_n \end{pmatrix}} \qquad (k = 1, 2, \ldots n).$$

So ist insbesondere für $k = 1$:

$$\frac{dx_1}{dx} = -\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial f_n}{\partial x} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}.$$

Alle n Ableitungen drücken sich nach (1) als Brüche aus, deren Nenner die Funktionaldeterminante

$$\begin{pmatrix} f_1 & f_2 & \cdots & f_n \\ x_1 & x_2 & \ldots & x_n \end{pmatrix}$$

ist, und daher muß vorausgesetzt werden, *daß sie von Null verschieden sei.* Im übrigen wollen wir auch hier nicht näher auf die Voraussetzungen eingehen, unter denen die hier gemachte Anwendung des Satzes 22 von Nr. 42 statthaft ist.

Drittes Kapitel.

Höhere Differentialquotienten, partielle Differentialquotienten und vollständige Differentiale.

---

§ 1. Höhere Differentialquotienten von Funktionen einer Veränderlichen.

59. Definition der n^{ten} Ableitung. Ist $f(x)$ eine Funktion von x, die eine Ableitung $f'(x)$ hat, so kann es sein, daß die Funktion $f'(x)$ ebenfalls eine Ableitung hat. Diese Ableitung wird mit $f''(x)$ bezeichnet. Ebenso bedeutet $f'''(x)$ die Ableitung von $f''(x)$, falls sie vorhanden ist, usw. *Allgemein wird unter* $f^{(n)}(x)$ *die Ableitung der Funktion* $f^{(n-1)}(x)$ *verstanden,* wobei der Index n, der zur Unterscheidung von Potenzen in Klammern zu setzen ist, nach und nach die ganzzahligen positiven Werte $1, 2, 3, \ldots$ durchläuft. Die Funktion $f^{(n)}(x)$ wird auch die *Ableitung* n^{ter} *Ordnung oder die* n^{te} *Ableitung von* $f(x)$ *selbst* genannt. Die im vorigen Kapitel schlechtweg als Ableitung bezeichnete Funktion $f'(x)$ ist also die *erste* Ableitung von $f(x)$. Wenn wir künftig von der Ableitung einer Funktion $f(x)$ sprechen (also nicht von *den* Ableitung*en*), so ist damit immer diese erste Ableitung gemeint.

60. Die n^{te} Ableitung als n^{ter} Differentialquotient. Ist $y = f(x)$ eine gegebene Funktion von x, so wollen wir in dieser Nummer mit $d_h y$ dasjenige Differential von y bezeichnen, das zu dem Zuwachse $dx = h$ von x gehört, d. h. es soll dann nach Nr. 32

$$d_h y = f'(x)\,h$$

sein. Dies Differential ist eine Funktion von x und von h. Insbesondere wollen wir, da wir nachher der Veränderlichen x

verschiedene Zunahmen geben, zunächst x um h_1 wachsen lassen, so daß

$$(1) \qquad d_{h_1} y = f'(x) h_1$$

das zugehörige Differential ist. Dies Differential ist ebenfalls eine Funktion von x. Dasjenige Differential dieser Funktion, das dem Zuwachse h_2 von x entspricht, geht durch Multiplikation ihrer Ableitung $f''(x) h_1$ mit h_2 hervor, ist also gleich $f''(x) h_1 h_2$. Dies Differential heißt *das Differential zweiter Ordnung von y selbst;* es ist mit $d_{h_2} d_{h_1} y$ zu bezeichnen:

$$(2) \qquad d_{h_2} d_{h_1} y = f''(x) h_1 h_2.$$

Dies Differential zweiter Ordnung ist wieder eine Funktion von x. Lassen wir x um h_3 wachsen, so hat diese Funktion, da $f'''(x) h_1 h_2$ ihre Ableitung ist, das Differential:

$$d_{h_3} d_{h_2} d_{h_1} y = f'''(x) h_1 h_2 h_3;$$

es wird das *Differential dritter Ordnung* von y selbst gegenannt, usw.

Nach n solchen Schritten geht das *Differential* n^{ter} *Ordnung* von y hervor:

$$(3) \qquad d_{h_n} d_{h_{n-1}} \ldots d_{h_2} d_{h_1} y = f^{(n)}(x) h_1 h_2 \ldots h_{n-1} h_n.$$

Die rechte Seite bleibt bei Vertauschungen von $h_1, h_2, \ldots h_n$ ungeändert. Also ändert sich der Wert des Differentials n^{ter} Ordnung nicht, wenn man die Reihenfolge, in der man x nach und nach die Zunahmen $h_1, h_2, \ldots h_n$ erteilt, irgendwie wählt.

Sind insbesondere alle n Zunahmen $h_1, h_2, \ldots h_n$ gleich groß, etwa gleich dx, so brauchen wir die unteren Indizes $h_1, h_2, \ldots h_n$ nicht mehr anzugeben. Die Differentiale dy, ddy, $dddy, \ldots$ können wir alsdann kürzer mit dy, d^2y, $d^3y, \ldots$ bezeichnen, allgemein das n^{ter} Ordnung mit $d^n y$ (gelesen: *d-n-y*), so daß nach (3):

$$(4) \qquad d^n y = f^{(n)}(x)\, dx^n$$

ist, wo dx^n die n^{te} Potenz von dx bedeutet (während $d(x^n)$ das Differential der n^{ten} Potenz von x vorstellen würde, vgl. Nr. 38). Aus (4) folgt

$$(5) \qquad \frac{d^n y}{dx^n} = f^{(n)}(x).$$

Hiermit ist die n^{te} Ableitung als ein Bruch dargestellt, dessen Zähler das Differential n^{ter} Ordnung von y und dessen Nenner die n^{te} Potenz des Differentials von x ist, also als ein *Differentialquotient*, der insbesondere *der Differentialquotient* n^{ter} *Ordnung oder der* n^{te} *Differentialquotient* von y heißt. Ziehen wir die Erläuterungen in Nr. 32 heran, so können wir — weniger scharf, aber anschaulicher — so sagen: Das Differential $d^n y$ stellt den Zuwachs dar, den die Funktion $d^{n-1}y$ von x haben würde, wenn sie sich von dem zur betrachteten Stelle x gehörigen Werte an weiterhin *beständig* so ändern würde, wie sie es *momentan* tut.

Die Darstellung der n^{ten} Ableitung durch den n^{ten} Differentialquotienten wird sehr viel gebraucht. Nach (4) ist *das Differential* n^{ter} *Ordnung von* y *gleich der* n^{ten} *Ableitung von* y, *multipliziert mit der* n^{ten} *Potenz des Differentials von* x.

61. Beispiele. Es leuchtet ein, daß man die höheren Differentialquotienten einer Funktion durch wiederholte Anwendung der im vorigen Kapitel gefundenen Differentiationsregeln erhält. Hierzu einige Beispiele.

1. Beispiel: Ist $y = x^m$, so wird

$$\frac{dy}{dx} = mx^{m-1}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = m(m-1)x^{m-2} \quad \text{usw.},$$

$$\frac{d^ny}{dx^n} = m(m-1)\ldots(m-n+1)x^{m-n}.$$

2. Beispiel: Ist $y = \ln x$, so wird $dy:dx = x^{-1}$, daher für $n > 1$:

$$\frac{d^ny}{dx^n} = (-1)^{n-1}1\cdot 2\cdot 3\ldots(n-1)x^{-n}.$$

3. Beispiel: Ist $y = a^x$, wo a eine positive Konstante bedeutet, so wird:

$$\frac{dy}{dx} = a^x \ln a, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = a^x(\ln a)^2, \ldots \frac{d^ny}{dx^n} = a^x(\ln a)^n.$$

4. Beispiel: Ist $y = \sin(x+\alpha)$ und α konstant, so wird:

$$\frac{dy}{dx} = \cos(x+\alpha) = \sin(x+\alpha+\tfrac{1}{2}\pi).$$

Man erhält also die Ableitung von $\sin(x + \text{konst.})$, indem man die Konstante um $\frac{1}{2}\pi$ vergrößert. Also ist für jede positive ganze Zahl n:

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \sin(x + \alpha + \tfrac{1}{2}n\pi).$$

Setzt man für α Null oder $\frac{1}{2}\pi$, so kommt:

$$\frac{d^n \sin x}{dx^n} = \sin(x + \tfrac{1}{2}n\pi), \quad \frac{d^n \cos x}{dx^n} = \cos(x + \tfrac{1}{2}n\pi).$$

62. Differenzen höherer Ordnung. Der Zuwachs $f(x+h_1)-f(x)$, den die Funktion $y=f(x)$ erfährt, wenn die unabhängige Veränderliche x um h_1 wächst, heißt *Differenz erster Ordnung* von y und werde mit $\Delta_{h_1}y$ bezeichnet. Sie ist eine Funktion von x, so daß wir wiederum die Differenz erster Ordnung für sie bilden können, d. h. den Zuwachs, den sie erfährt, wenn x um eine Größe h_2 zunimmt. Diese Differenz $\Delta_{h_2}\Delta_{h_1}y$ heißt *Differenz zweiter Ordnung* von y. So können wir fortfahren und eine Reihe von Differenzen bilden:

$$\Delta_{h_1}y, \quad \Delta_{h_2}\Delta_{h_1}y, \quad \Delta_{h_3}\Delta_{h_2}\Delta_{h_1}y, \ldots \quad \Delta_{h_n}\Delta_{h_{n-1}}\ldots\Delta_{h_1}y.$$

Die zuletzt angegebene heißt *Differenz n^{ter} Ordnung* von y. Aus der Definition der Differenz erster Ordnung

$$\Delta_{h_1}y = f(x+h_1) - f(x)$$

folgt:

$$\Delta_{h_2}\Delta_{h_1}y = [f(x+h_1+h_2) - f(x+h_2)] - [f(x+h_1) - f(x)].$$

Da sich dieser Wert nicht ändert, wenn h_1 mit h_2 vertauscht wird, so folgt allgemein: Bei der Berechnung der Differenz n^{ter} Ordnung kann man, ohne ihren Wert zu ändern, die Reihenfolge zweier aufeinander folgender Zunahmen h und demnach überhaupt die Reihenfolge aller n Zunahmen h_1, h_2, $\ldots h_n$ beliebig ändern. Z. B. ist $\Delta_{h_3}\Delta_{h_2}\Delta_{h_1}y$ dasselbe wie $\Delta_{h_1}\Delta_{h_2}\Delta_{h_3}y$.

63. Neue Verallgemeinerung des Mittelwertsatzes. Zwischen der Differenz n^{ter} Ordnung und der Ableitung n^{ter} Ordnung besteht eine wichtige Beziehung, die wir ableiten wollen. Zunächst können wir den Mittelwertsatz in der in Nr. 28 als Satz 3 angegebenen Form, da $\Delta_h F(x) = F(x+h) - F(x)$ ist, so aussprechen:

Satz 1: Hat die Funktion $F(x)$ nebst ihrer ersten Ableitung $F'(x)$ für jedes x im Intervalle von x_0 bis $x_0 + h$ einen bestimmten endlichen Wert, so gibt es einen von Null und Eins

verschiedenen positiven echten Bruch θ *derart, daß die Gleichung besteht:*

$$\varDelta_h F(x_0) = h F'(x_0 + \theta h).$$

Außerdem schicken wir voraus: Aus

$$\frac{d\varDelta_h F(x)}{dx} = F'(x+h) - F'(x) = \varDelta_h \frac{dF(x)}{dx}$$

folgt, *daß die Operationen des Differenzenbildens und des Differenzierens hinsichtlich ihrer Reihenfolge vertauschbar sind.*

Wir wollen jetzt annehmen, daß die Funktion $f(x)$ und ihre Ableitungen bis zu der von der $(n-1)^{\text{ten}}$ Ordnung in dem Intervalle von x_0 bis $x_0 + h_1 + h_2 + \cdots + h_n$ der Forderung $\mathfrak{A}$ in Nr. 27 genügen. Alsdann genügt die Differenz $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung

$$\varDelta_{h_{n-1}} \varDelta_{h_{n-2}} \cdots \varDelta_{h_1} f(x)$$

im Intervalle von x_0 bis $x_0 + h_n$ der Forderung $\mathfrak{A}$, da bei ihrer Bildung x insgesamt den Zuwachs $h_1 + h_2 + \cdots + h_{n-1}$ erhalten hat. Wenden wir den Satz 1 statt auf $F(x)$ auf diese Differenz an, so kommt:

$$(1) \qquad \varDelta_{h_n} \varDelta_{h_{n-1}} \cdots \varDelta_{h_1} f(x_0) = h_n \frac{d\varDelta_{h_{n-1}} \varDelta_{h_{n-2}} \cdots \varDelta_{h_1} f(x_0 + \theta_n h_n)}{dx_0}$$

$$= h_n \varDelta_{h_{n-1}} \varDelta_{h_{n-2}} \cdots \varDelta_{h_1} f'(x_0 + \theta_n h_n),$$

da die Operationen des Differenzenbildens und Differenzierens hinsichtlich ihrer Reihenfolge vertauschbar sind.

Nunmehr genügt die Differenz $(n-2)^{\text{ter}}$ Ordnung von $f'(x + \theta_n h_n)$, nämlich

$$\varDelta_{h_{n-2}} \varDelta_{h_{n-3}} \cdots \varDelta_{h_1} f'(x + \theta_n h_n),$$

als Funktion von $x + \theta_n h_n$ der Forderung $\mathfrak{A}$ in einem gewissen Intervalle, da bei ihrer Bildung x insgesamt um $h_1 + h_2 + \cdots + h_{n-2}$ wächst, also die Größe $x + \theta_n h_n$ bis $x_0 + h_1 + h_2 + \cdots + h_{n-1} + \theta_n h_n$ zunimmt. Die Anwendung des Satzes 1 auf die Differenz $(n-2)^{\text{ter}}$ Ordnung gibt somit

$$\varDelta_{h_{n-1}} \varDelta_{h_{n-2}} \cdots \varDelta_{h_1} f'(x_0 + \theta_n h_n) =$$

$$= h_{n-1} \frac{d\varDelta_{h_{n-2}} \cdots \varDelta_{h_1} f'(x_0 + \theta_n h_n + \theta_{n-1} h_{n-1})}{dx_0}$$

$$= h_{n-1} \varDelta_{h_{n-2}} \cdots \varDelta_{h_1} f''(x_0 + \theta_n h_n + \theta_{n-1} h_{n-1}),$$

so daß die Formel (1) durch Einsetzen dieses Wertes in ihre rechte Seite gibt:

$$\Delta_{h_n}\Delta_{h_{n-1}}\cdots\Delta_{h_1}f(x_0)=h_n h_{n-1}\Delta_{h_{n-2}}\cdots\Delta_{h_1}f''(x_0+\theta_n h_n+\theta_{n-1}h_{n-1}).$$

Analog schließen wir weiter und erhalten endlich nach n Anwendungen des Satzes 1:

$$\Delta_{h_n}\Delta_{h_{n-1}}\cdots\Delta_{h_1}f(x_0)=h_n h_{n-1}\cdots h_1 f^{(n)}(x_0+\theta_n h_n+\theta_{n-1}h_{n-1}+\cdots+\theta_1 h_1).$$

Da die Reihenfolge der Differenzenbildungen beliebig ist, so folgt hieraus:

Satz 2 (Verallgemeinerter Mittelwertsatz): Hat die Funktion $f(x)$ ebenso wie jede ihrer Ableitungen $f'(x), \ldots f^{(n)}(x)$ bis zur n^{ten} Ordnung im Intervalle von x_0 bis $x_0+h_1+h_2+\cdots+h_n$ überall bestimmte endliche Werte, so gibt es n positive und von Null und Eins verschiedene echte Brüche $\theta_1, \theta_2, \ldots \theta_n$ derart, daß die Formel gilt:

$$\frac{\Delta_{h_1}\Delta_{h_2}\cdots\Delta_{h_n}f(x_0)}{h_1 h_2\ldots h_n}=f^{(n)}(x_0+\theta_1 h_1+\theta_2 h_2+\cdots+\theta_n h_n).$$

Der Zähler des links stehenden Bruches ist die Differenz n^{ter} Ordnung von $f(x_0)$ und der Nenner das Produkt der n bei der Bildung dieser Differenz benutzten Zunahmen $h_1, h_2, \ldots h_n$ von x. Deshalb heißt dieser Bruch der *allgemeine Differenzenquotient n^{ter} Ordnung von $f(x)$* an der Stelle x_0. Wählen wir insbesondere alle Zunahmen $h_1, h_2, \ldots h_n$ gleich Δx, so werden wir ihn kürzer so bezeichnen können:

$$\frac{\Delta^n f(x_0)}{\Delta x^n},$$

wo Δx^n die n^{te} Potenz von Δx bedeutet (während $\Delta(x^n)$ einen Zuwachs der n^{ten} Potenz von x vorstellen würde). In der Formel des Satzes steht alsdann rechts die Summe $(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n)\Delta x$, worin $\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n$ zwischen 0 und n liegt, also in der Form $n\theta$ darstellbar ist, wenn θ einen von Null und Eins verschiedenen positiven echten Bruch bedeutet. Wir haben jetzt:

$$\frac{\Delta^n f(x_0)}{\Delta x^n}=f^{(n)}(x_0+n\theta\Delta x).$$

Machen wir den Grenzübergang für $\lim \Delta x=0$, so kommt, wenn $f^{(n)}(x)$ an der Stelle x_0 stetig ist:

$$\lim_{\Delta x=0}\frac{\Delta^n f(x_0)}{\Delta x^n}=f^{(n)}(x_0).$$

[**63**

Die Ableitung n^{ter} Ordnung ergibt sich also als Grenzwert des Differenzenquotienten n^{ter} Ordnung.

§ 2. Partielle Differentialquotienten.

64. Partielle Ableitungen. Es sei $f(x, y)$ eine Funktion von *zwei* unabhängigen Veränderlichen x und y. Man kann, indem man der Veränderlichen y irgend einen gestatteten bestimmten Wert beilegt, diese Funktion als eine Funktion von x allein betrachten. Hat sie dann eine Ableitung, so nennt man die Ableitung die *partielle Ableitung erster Ordnung von f hinsichtlich oder nach x* und bezeichnet sie mit $f_x(x, y)$. Man kann sich aber auch denken, daß der Veränderlichen x ein bestimmter gestatteter Wert beigelegt sei, so daß dann $f(x, y)$ als eine Funktion von y allein erscheint. Hat sie als solche eine Ableitung, so heißt diese die *partielle Ableitung erster Ordnung von f hinsichtlich oder nach y*, und sie wird mit $f_y(x, y)$ bezeichnet. Die beiden Ableitungen

$$f_x(x, y) \quad \text{und} \quad f_y(x, y)$$

die man auch kurz die *ersten* partiellen Ableitungen von f nennt, sind ihrerseits wieder Funktionen von x und y. Genau so wie bei f selbst können wir also auch bei f_x und f_y von partiellen Ableitungen erster Ordnung sprechen, vorausgesetzt, daß es welche gibt. So kann f_x zwei partielle Ableitungen, eine nach x und eine nach y, haben, die so bezeichnet werden:

$$f_{xx}(x, y) \quad \text{und} \quad f_{xy}(x, y);$$

ebenso kann f_y zwei partielle Ableitungen, eine nach x und eine nach y, haben, die so bezeichnet werden:

$$f_{yx}(x, y) \quad \text{und} \quad f_{yy}(x, y).$$

Die so gebildeten Ableitungen heißen die *partiellen Ableitungen zweiter Ordnung von f selbst.* Da sie wiederum Funktionen von x und y sind, kann man die Betrachtung fortsetzen. So gelangt man nach n Differentiationen zu den *partiellen Ableitungen n^{ter} Ordnung von f selbst,* worunter eben die partiellen Ableitungen *erster* Ordnung aller partiellen Ableitungen $(n-1)^{ter}$ Ordnung von f zu verstehen sind. Sie werden in analoger Weise durch angehängte Indizes x und y bezeichnet,

die angeben, in welcher Reihenfolge nacheinander die partiellen Ableitungen zu nehmen sind oder, wie man auch sagt, in welcher Reihenfolge partiell nach x bzw. y zu differenzieren ist. So z. B. bedeutet $f_{xyxx}(x, y)$ eine partielle Ableitung vierter Ordnung, die folgendermaßen hervorgeht: Zuerst wird f partiell nach x, das Ergebnis partiell nach y, das neue Ergebnis partiell nach x und das so hervorgehende schließlich nochmals partiell nach x differenziert.

Eine entsprechende Betrachtung läßt sich bei Funktionen von mehr als zwei unabhängigen Veränderlichen anstellen. Dies ist so einleuchtend, daß wir die partiellen Ableitungen einer Funktion von n Veränderlichen gar nicht ausdrücklich zu definieren brauchen.

65. Gleichgültigkeit der Reihenfolge bei der Berechnung partieller Ableitungen. Nach dem Vorhergehenden hat eine Funktion $f(x, y)$ von zwei unabhängigen Veränderlichen *zwei* partielle Ableitungen erster Ordnung f_x und f_y, dagegen *vier* partielle Ableitungen zweiter Ordnung f_{xx}, f_{xy} und f_{yx}, f_{yy}, folglich *acht* von dritter Ordnung usw. In Wahrheit aber ist die Zahl der Ableitungen meistens geringer. Wir werden nämlich beweisen, daß die Reihenfolge der Bildung der partiellen Ableitungen unter gewissen Voraussetzungen gleichgültig ist, d. h. daß f_{xy} dasselbe wie f_{yx} ist.

Es möge dem x der Zuwachs h oder dem y der Zuwachs k erteilt werden. Das Zeichen Δ_x, vor eine Funktion von x und y gesetzt, soll den Zuwachs angeben, den die Funktion erfährt, wenn x um h wächst. Ebenso soll Δ_y, vor die Funktion gesetzt, ihren Zuwachs angeben für den Fall, daß y um k wächst. Es ist dann:

$$\Delta_x f(x, y) = f(x + h, y) - f(x, y), \tag{1}$$

folglich:

$$\Delta_y \Delta_x f(x, y) = [f(x + h, y + k) - f(x, y + k)] - [f(x + h, y) - f(x, y)].$$

Genau dasselbe — nur in anderer Reihenfolge der Summanden rechts — ergibt sich für $\Delta_x \Delta_y f(x, y)$. *Die Reihenfolge der sukzessiven Bildung von Differenzen Δ_x und Δ_y ist hiernach ohne Einfluß auf das schließliche Ergebnis.*

Nun sei $F(x, y_0)$ eine Funktion, die, *als Funktion von x aufgefaßt*, im Intervalle von x_0 bis $x_0 + h$ der Forderung $\mathfrak{A}$ in Nr. 27 genügt. Alsdann gibt der Mittelwertsatz, wie wir ihn in Nr. 63 als Satz 1 formuliert haben:

$$(2) \qquad \varDelta_{x_0} F(x_0, y_0) = h F_{x_0}(x_0 + \theta h, y_0),$$

wo θ einen gewissen positiven echten Bruch bedeutet. Wenn andererseits $F(x_0, y)$, *als Funktion von y aufgefaßt*, die Forderung $\mathfrak{A}$ im Intervalle von y_0 bis $y_0 + k$ erfüllt, so ergibt sich entsprechend:

$$(3) \qquad \varDelta_{y_0} F(x_0, y_0) = k F_{y_0}(x_0, y_0 + \vartheta k),$$

wo ϑ einen gewissen positiven echten Bruch bedeutet.

Insbesondere wollen wir die Formel (3) auf diejenige Funktion $F(x_0, y)$ anwenden, die gleich $\varDelta_{x_0} f(x_0, y)$ ist. Ihre partielle Ableitung nach y ist, wie (1) zeigt, gleich $f_y(x_0 + h, y) - f_y(x_0, y)$ oder $\varDelta_{x_0} f_y(x_0, y)$, so daß sich nach (3) ergibt:

$$(4) \qquad \varDelta_{y_0} \varDelta_{x_0} f(x_0, y_0) = k \varDelta_{x_0} f_{y_0}(x_0, y_0 + \vartheta k),$$

vorausgesetzt, daß $\varDelta_{x_0} f(x_0, y)$ im Intervalle von y_0 bis $y_0 + k$ die Forderung $\mathfrak{A}$ erfüllt. Hiernach wenden wir die Formel (2) auf diejenige Funktion $F(x, y_0)$ an, die gleich $f_{y_0}(x, y_0 + \vartheta k)$ ist, so daß kommt:

$$\varDelta_{x_0} f_{y_0}(x_0, y_0 + \vartheta k) = h f_{y_0 x_0}(x_0 + \theta h, y_0 + \vartheta k),$$

vorausgesetzt, daß $f_{y_0}(x, y_0 + \vartheta k)$ die Forderung $\mathfrak{A}$ im Intervalle von x_0 bis $x_0 + h$ erfüllt. Setzen wir diesen Wert in (4) auf der rechten Seite ein, so folgt:

$$(5) \qquad \frac{\varDelta_{y_0} \varDelta_{x_0} f(x_0, y_0)}{kh} = f_{y_0 x_0}(x_0 + \theta h, y_0 + \vartheta k).$$

Hätten wir in der vorhergehenden Betrachtung in bezug auf x und y die umgekehrte Reihenfolge beobachtet, so hätten wir ebenso erhalten:

$$\frac{\varDelta_{x_0} \varDelta_{y_0} f(x_0, y_0)}{hk} = f_{x_0 y_0}(x_0 + \theta' h, y_0 + \vartheta' k),$$

wo θ' und ϑ' positive echte Brüche bedeuten. Nach einer vorausgeschickten Bemerkung hat die *linke* Seite dieser Formel denselben Wert wie die *linke* Seite von (5), so daß auch

$$(6) \qquad f_{x_0 y_0}(x_0 + \theta' h, y_0 + \vartheta' k) = f_{y_0 x_0}(x_0 + \theta h, y_0 + \vartheta k)$$

ist, vorausgesetzt, daß die Funktionen von x:

$$f_{y_0}(x, y_0 + \vartheta k) \quad \text{und} \quad \Delta_{y_0} f(x, y_0)$$

im Intervalle von x_0 bis $x_0 + h$ und ebenso die Funktionen von y:

$$f_{x_0}(x_0 + \theta' h, y) \quad \text{und} \quad \Delta_{x_0} f(x_0, y)$$

im Intervalle von y_0 bis $y_0 + k$ die Forderung $\mathfrak{A}$ erfüllen. Wenn außerdem die Funktionen $f_{xy}(x, y)$ und $f_{yx}(x, y)$ an der Stelle (x_0, y_0) stetig sind, so geht aus (6) beim Grenzübergange, indem man h und k immer näher bei Null wählt, das Ergebnis hervor:

$$f_{x_0 y_0}(x_0, y_0) = f_{y_0 x_0}(x_0, y_0).$$

Die Voraussetzungen, unter denen diese Formel gilt, sind komplizierter Natur, und wir vereinfachen ihren Ausdruck dadurch, daß wir sie etwas erweitern, obwohl es nicht nötig wäre, so daß wir das Ergebnis aussprechen dürfen:

Satz 3: Hat die Funktion $f(x, y)$ an der Stelle (x, y) bestimmte endliche Ableitungen f_x, f_y, f_{xy} und f_{yx} und ist sie ebenso wie diese Ableitungen in der Umgebung der Stelle stetig, so hat f_{xy} an der Stelle denselben Wert wie f_{yx}.

Bedeutet f eine Funktion von m unabhängigen Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots x_m$, so ist dieser Satz immer noch anwendbar, sobald die Funktion nebst den in betracht kommenden Ableitungen in der Umgebung der Stelle $(x_1, x_2, \ldots x_m)$ stetig ist. Denn wenn wir, um eine höhere Ableitung zu berechnen, einmal von einer schon gefundenen Ableitung weiterhin die nach x_i und von dem Ergebnisse die nach x_k bilden, so werden bei diesen beiden Operationen alle übrigen $m - 2$ Veränderlichen als Konstanten behandelt, so daß eine Funktion von nur zwei Veränderlichen x_i und x_k vorliegt. Die Reihenfolge der beiden aufeinander folgenden Operationen ist daher nach Satz 3 ohne Einfluß auf das Ergebnis. Durch fortwährende Vertauschung zweier aufeinander folgender Operationen können wir aber *alle* auszuführenden Operationen in eine beliebige Reihenfolge bringen. Also:

Satz 4: Sobald die Funktion $f(x_1, x_2, \ldots x_m)$ von m Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots x_m$ nebst allen in betracht kommenden Ableitungen in der Umgebung der Stelle $(x_1, x_2, \ldots x_m)$ stetig ist, bleibt die Reihenfolge der Operationen, durch die man irgend eine partielle Ableitung der Funktion gewinnt, gleichgültig.

Die Funktion f hat m Ableitungen erster Ordnung und allgemein

$$\frac{m(m+1)\cdots(m+n-1)}{1\cdot 2\cdots n}$$

Ableitungen n^{ter} Ordnung, nämlich gerade so viele, als es verschiedene Kombinationen n^{ter} Klasse mit Wiederholung in den m Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots x_m$ gibt. Hiernach läßt sich auch die Bezeichnung der partiellen Ableitungen vereinfachen. Liegt nämlich z. B. eine Funktion $f(x, y, z)$ von drei Veränderlichen x, y, z vor, so möge irgend eine Ableitung berechnet worden sein, bei deren Bildung insgesamt α-mal nach x, β-mal nach y und γ-mal nach z abgeleitet worden ist, aber in irgend welchem Wechsel zwischen x, y und z. Dasselbe Ergebnis geht hervor, wenn wir zunächst α-mal nach x ableiten, darauf β-mal nach y und schließlich γ-mal nach z, so daß die berechnete Ableitung mit

$$f_{x^\alpha y^\beta z^\gamma}(x, y, z)$$

bezeichnet werden kann. Dabei ist $\alpha+\beta+\gamma$ die *Ordnung* der Ableitung.

66. Die partiellen Ableitungen als partielle Differentialquotienten. Es sei z. B. f eine Funktion von *drei* Veränderlichen x, y, z mit den drei partiellen Ableitungen erster Ordnung f_x, f_y, f_z. Wir wollen nun mit

$$\partial_x^{(h)} f$$

dasjenige Differential von f bezeichnen, das zu dem Zuwachs $dx = h$ von x allein gehört, wobei y und z unverändert gelassen werden, so daß nach Nr. 32

$$\partial_x^{(h)} f = f_x \cdot h$$

ist. Es heißt $\partial_x^{(h)} f$ *das partielle Differential erster Ordnung von f hinsichtlich x.* Analoges gilt von den partiellen Differentialen hinsichtlich y und z.

Nehmen wir an, daß h_1, k_1, l_1 die Zunahmen von x, y, z seien, so sind also

$$(1) \qquad \partial_x^{(h_1)} f = h_1 f_x, \quad \partial_y^{(k_1)} f = k_1 f_y, \quad \partial_z^{(l_1)} f = l_1 f_z$$

die drei partiellen Differentiale erster Ordnung von f. Sie sind Funktionen von x, y, z, können also ihrerseits partielle

Differentiale erster Ordnung haben, die hervorgehen, wenn wir x, y, z bzw. drei Zunahmen h_2, k_2, l_2 vorschreiben. So z. B. ist

$$\partial_z^{(l_2)} \partial_y^{(k_1)} f$$

dasjenige Differential der zweiten in (1) angegebenen Funktion, das hervorgeht, wenn dem z die Zunahme l_2 erteilt wird. Es ist also

$$\partial_z^{(l_2)} \partial_y^{(k_1)} f = \partial_z^{(l_2)} (k_1 f_y) = k_1 \partial_z^{(l_2)} f_y .$$

Nach der dritten Formel (1) aber ist, wenn wir darin f durch f_y und l_1 durch l_2 ersetzen:

$$\partial_z^{(l_2)} f_y = l_2 f_{yz} ,$$

so daß kommt:

$$\partial_z^{(l_2)} \partial_y^{(k_1)} f = k_1 l_2 f_{yz} .$$

Infolge des Satzes 4 in Nr. 65 hat dies Differential denselben Wert wie das andere:

$$\partial_y^{(k_1)} \partial_z^{(l_2)} = l_2 k_1 f_{zy} .$$

Die partiellen Differentiale erster Ordnung, die man von den partiellen Differentialen erster Ordnung (1) von f in dieser Weise bilden kann, heißen die *partiellen Differentiale zweiter Ordnung von f*. Von ihnen, die ja wieder Funktionen von x, y, z sind, kann man abermals partielle Differentiale erster Ordnung bilden, indem man je einer der Veränderlichen x, y, z eine Zunahme h_3 bzw. k_3 bzw. l_3 erteilt, wodurch man zu den *partiellen Differentialen dritter Ordnung von f* gelangt, usw.

Ein bestimmtes partielles Differential n^{ter} Ordnung von f entsteht also, wenn man in bestimmter Reihenfolge dem x etwa die α Zunahmen $h_1, h_2, \ldots h_\alpha$, dem y die β Zunahmen $k_1, k_2, \ldots k_\beta$ und dem z die γ Zunahmen $l_1, l_2, \ldots l_\gamma$ erteilt, wobei $\alpha + \beta + \gamma = n$ sein soll. In welcher Reihenfolge man auch vorgehen mag, immer nimmt dies Differential den Wert an:

$$h_1 h_2 \ldots h_\alpha \cdot k_1 k_2 \ldots k_\beta \cdot l_1 l_2 \ldots l_\gamma \cdot f_{x^\alpha y^\beta z^\gamma} .$$

Wählt man alle Zunahmen $h_1, h_2, \ldots h_\alpha$ des x gleich ∂x, alle Zunahmen $k_1, k_2, \ldots k_\beta$ des y gleich ∂y und alle Zunahmen $l_1, l_2, \ldots l_\gamma$ des z gleich ∂z, so können wir das partielle Differential n^{ter} Ordnung kürzer so bezeichnen:

$$\partial^n_{x^\alpha y^\beta z^\gamma} f,$$

wo $\alpha + \beta + \gamma = n$ ist, und es hat den Wert:

$$\partial^n_{x^\alpha y^\beta z^\gamma} f = \partial x^\alpha \cdot \partial y^\beta \cdot \partial z^\gamma \cdot f_{x^\alpha y^\beta z^\gamma}.$$

Hier bedeuten ∂x^α, ∂y^β, ∂z^γ Potenzen von ∂x, ∂y und ∂z, während links keine Potenz steht. Es folgt:

$$f_{x^\alpha y^\beta z^\gamma} = \frac{\partial^n_{x^\alpha y^\beta z^\gamma} f}{\partial x^\alpha \partial y^\beta \partial z^\gamma},$$

wo $n = \alpha + \beta + \gamma$ ist. Aber rechts brauchen im Zähler die Indizes x^α, y^β, z^γ gar nicht angegeben zu werden, da der Nenner ja deutlich zeigt, daß das Differential α-mal hinsichtlich x, β-mal hinsichtlich y und γ-mal hinsichtlich z zu bilden ist. Man schreibt daher einfacher:

$$f_{x^\alpha y^\beta z^\gamma} = \frac{\partial^{\alpha+\beta+\gamma} f}{\partial x^\alpha \partial y^\beta \partial z^\gamma}. \tag{2}$$

Dies ist eine für die partiellen Ableitungen sehr gebräuchliche Schreibweise; sie sind hier als Quotienten von partiellen Differentialen, als sogenannte *partielle Differentialquotienten von der Ordnung* $\alpha + \beta + \gamma$, dargestellt. Aus (2) folgt:

$$\partial^{\alpha+\beta+\gamma} f = f_{x^\alpha y^\beta z^\gamma} \partial x^\alpha \partial y^\beta \partial z^\gamma,$$

d. h. *das partielle Differential* $(\alpha + \beta + \gamma)^{ter}$ *Ordnung von* $f(x, y, z)$ *ist gleich der entsprechenden* $(\alpha + \beta + \gamma)^{ten}$ *partiellen Ableitung von* f, *multipliziert mit den zugehörigen Potenzen der Differentiale* ∂x, ∂y, ∂z.

Es braucht kaum bemerkt zu werden, daß Entsprechendes gilt, wenn die Funktion f nicht gerade von *drei* unabhängigen Veränderlichen abhängt. Wir erwähnen noch, daß, wenn f eine Funktion von nur *einer* Veränderlichen ist, statt des Zeichens ∂ das Zeichen d benutzt wird, — wie es ja im vorigen Kapitel geschah, — und daß man dann statt von partiellen von *gewöhnlichen Differentialen und Differentialquotienten* spricht.

67. Partielle Differentialquotienten als Grenzwerte von partiellen Differenzenquotienten. Wenn wir wieder der Einfachheit halber unter f eine Funktion von nur drei Veränderlichen x, y, z verstehen, so nennen wir *partielle Differenzen erster Ordnung der Funktion* f diejenigen Zunahmen,

die sie erfährt, sobald nur x oder nur y oder nur z um eine gewisse Größe h_1 bzw. k_1 bzw. l_1 wächst, und wir bezeichnen sie analog wie die partiellen Differentiale. So z. B. ist die auf die Zunahme h_1 von x bezügliche partielle Differenz diese:

$$\Delta_x^{(h_1)} f = f(x+h_1, y, z) - f(x, y, z).$$

Da die partiellen Differenzen erster Ordnung von f wieder Funktionen von x, y, z sind, können wir von ihnen abermals partielle Differenzen bilden, usw. So geht eine *partielle Differenz n^{ter} Ordnung von f* hervor, wenn wir insgesamt dem x nach und nach α Zunahmen $h_1, h_2, \ldots h_\alpha$, dem y insgesamt β Zunahmen $k_1, k_2, \ldots k_\beta$ und dem z insgesamt γ Zunahmen $l_1, l_2, \ldots l_\gamma$ erteilt haben, vorausgesetzt, daß $\alpha + \beta + \gamma = n$ ist. Dabei ist nach Nr. 62 und nach einer Bemerkung in Nr. 65 die Reihenfolge der $\alpha + \beta + \gamma$ Operationen ohne Belang für das Ergebnis.

Durch Betrachtungen wie in Nr. 63 und 65 findet man mit Hilfe des Mittelwertsatzes eine solche Darstellung dieser partiellen Differenz n^{ter} Ordnung:

$$\Delta_x^{(h_1)} \ldots \Delta_x^{(h_\alpha)} \Delta_y^{(k_1)} \ldots \Delta_y^{(k_\beta)} \Delta_z^{(l_1)} \ldots \Delta_z^{(l_\gamma)} f = h_1 \ldots h_\alpha \cdot k_1 \ldots k_\beta \cdot l_1 \ldots l_\gamma$$
$$\cdot f_{x^\alpha y^\beta z^\gamma}(x + \theta_1 h_1 + \cdots + \theta_\alpha h_\alpha,\ y + \vartheta_1 k_1 + \cdots + \vartheta_\beta k_\beta,\ z + \eta_1 l_1 + \cdots + \eta_\gamma l_\gamma),$$

wo die θ, ϑ und η positive echte Brüche sind. Vorausgesetzt ist dabei, daß die Funktion f nebst ihren Ableitungen bis zur Ordnung $\alpha+\beta+\gamma$ in den Intervallen von x bis $x+h_1+\cdots+h_\alpha$, von y bis $y+k_1+\cdots+k_\beta$ und von z bis $z+l_1+\cdots+l_\gamma$ bestimmte endliche Werte habe. Durch Division mit dem Produkte aller Zunahmen h, k und l von x, y und z geht ein *partieller Differenzenquotient* $(\alpha+\beta+\gamma)^{ter}$ Ordnung hervor:

$$\frac{\Delta_x^{(h_1)} \ldots \Delta_x^{(h_\alpha)} \Delta_y^{(k_1)} \ldots \Delta_y^{(k_\beta)} \Delta_z^{(l_1)} \ldots \Delta_z^{(l_\gamma)} f}{h_1 \ldots h_\alpha\, k_1 \ldots k_\beta\, l_1 \ldots l_\gamma} =$$
$$f_{x^\alpha y^\beta z^\gamma}(x + \theta_1 h_1 + \cdots + \theta_\alpha h_\alpha,\ y + \vartheta_1 k_1 + \cdots + \vartheta_\beta k_\beta,\ z + \eta_1 l_1 + \cdots + \eta_\gamma l_\gamma).$$

Wählen wir alle Zunahmen $h_1, \ldots h_\alpha$ von x gleich Δx, alle Zunahmen $k_1, \ldots k_\beta$ von y gleich Δy und alle Zunahmen $l_1, \ldots l_\gamma$ von z gleich Δz, so können wir dies Ergebnis kürzer schreiben. Es ist dann z. B. die Summe $\theta_1 h_1 + \cdots + \theta_\alpha h_\alpha$ zwischen Null und $\alpha \Delta x$ gelegen, so daß als Formel für den partiellen Differenzenquotienten diese hervorgeht:

$$\frac{\Delta^{\alpha+\beta+\gamma} f}{\Delta x^\alpha \Delta y^\beta \Delta z^\gamma} = f_{x^\alpha y^\beta z^\gamma}(x + \alpha\theta\Delta x,\, y + \beta\vartheta\Delta y,\, z + \gamma\eta\Delta z),$$

wo θ, ϑ, η positive echte Brüche sind. Ist die $(\alpha + \beta + \gamma)^{\text{te}}$ Ableitung von f insbesondere an der betrachteten Stelle (x, y, z) stetig, so ergibt der Grenzübergang für $\lim \Delta x = 0$, $\lim \Delta y = 0$, $\lim \Delta z = 0$, *daß der Grenzwert des Differenzenquotienten gleich dem entsprechenden Differentialquotienten ist.*

Dasselbe ergibt sich natürlich für Funktionen f, die nicht gerade von drei Veränderlichen abhängen.

§ 3. Differentiation der zusammengesetzten Funktionen.

68. Höhere Differentialquotienten zusammengesetzter Funktionen einer Veränderlichen. In diesem Paragraphen wollen wir ein für allemal voraussetzen, daß alle vorkommenden Funktionen für die gerade betrachteten Werte ihrer Veränderlichen die folgende Forderung erfüllen:

Forderung $\mathfrak{B}$: *Die Funktionen und alle ihre Ableitungen, soweit sie vorkommen, sind in der Umgebung der betrachteten Wertsysteme stetig.*

Es sei nun

$$y = f(u, v, w, \ldots)$$

eine Funktion der Größen $u, v, w, \ldots$, die ihrerseits Funktionen einer einzigen Veränderlichen x seien, so daß y ebenfalls eine Funktion von x ist. Wir stellen uns die Aufgabe, ihre Differentialquotienten zu berechnen. Wie in Nr. 32 bezeichnen wir die ersten Differentialquotienten von $u, v, w, \ldots$ kurz mit $u', v', w', \ldots$. Ebenso sollen $u'', v'', w'', \ldots$ ihre zweiten Differentialquotienten bedeuten, usw. Es sind dies *gewöhnliche* Differentialquotienten (vgl. Nr. 66). Nach Satz 22 in Nr. 42 kommt:

$$y' = \frac{\partial f}{\partial u} u' + \frac{\partial f}{\partial v} v' + \frac{\partial f}{\partial w} w' + \cdots.$$

Jedes Glied auf der rechten Seite ist ein Produkt von zwei Faktoren, gibt also bei nochmaliger Differentiation nach der Produktregel zwei Summanden. Ordnen wir die ersten Summanden in der oberen und die zweiten in der unteren Zeile zusammen, so kommt:

$$y'' = \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right) \cdot u' + \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right) \cdot v' + \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial w}\right) \cdot w' + \cdots$$
$$+ \frac{\partial f}{\partial u} \cdot u'' + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot v'' + \frac{\partial f}{\partial w} \cdot w'' + \cdots$$

oder kürzer:

$$(1) \qquad \begin{cases} y'' = \dfrac{df_u}{dx} \cdot u' + \dfrac{df_v}{dx} \cdot v' + \dfrac{df_w}{dx} \cdot w' + \cdots \\ \qquad + f_u \cdot u'' + f_v \cdot v'' + f_w \cdot w'' + \cdots \end{cases}$$

Wenden wir den Satz 22 in Nr. 42 auf $f_u, f_v, f_w, \ldots$ an, so ergibt sich einzeln:

$$\frac{df_u}{dx} = f_{uu}u' + f_{uv}v' + f_{uw}w' + \cdots,$$
$$\frac{df_v}{dx} = f_{vu}u' + f_{vv}v' + f_{vw}w' + \cdots,$$
$$\frac{df_w}{dx} = f_{wu}u' + f_{wv}v' + f_{ww}w' + \cdots$$

usw., so daß das Einsetzen dieser Werte in (1) liefert, weil $f_{uv} = f_{vu}$ usw. ist:

$$(2) \begin{cases} y'' = f_{uu}u'^2 + 2f_{uv}u'v' + f_{vv}v'^2 + 2f_{uw}u'w' + 2f_{vw}v'w' + f_{ww}w'^2 + \cdots \\ \quad + f_u u'' + f_v v'' + f_w w'' + \cdots. \end{cases}$$

Auf dieselbe Weise ergeben sich durch fortgesetzte Differentiation die höheren Ableitungen y''', y^{IV} usw.

69. Ein spezieller Fall. Es sei f eine Funktion, die aus x und einer Funktion v von x zusammengesetzt ist, so daß $f(x, v)$ eine Funktion von x allein ist. In diesem Falle gibt die einmalige Differentiation:

$$\frac{df(x,v)}{dx} = f_x + f_v v',$$

da x nach x differenziert Eins gibt. Jetzt steht rechts eine Funktion von x, v und v'. Nach der allgemeinen Formel:

$$\frac{dF(x,v,v')}{dx} = F_x + F_v \frac{dv}{dx} + F_{v'} \frac{dv'}{dx}$$
$$= F_x + F_v v' + F_{v'} v''$$

differenziert, liefert sie also:

$$\frac{d^2 f(x,v)}{dx^2} = f_{xx} + f_{xv}v' + (f_{xv} + f_{vv}v')v' + f_v v''$$
$$= f_{xx} + 2f_{xv}v' + f_{vv}v'^2 + f_v v''.$$

Jetzt steht rechts eine Funktion von x, v, v', v''. Nach der allgemeinen Formel

$$\frac{dF(x, v, v', v'')}{dx} = F_x + F_v \frac{dv}{dx} + F_{v'} \frac{dv'}{dx} + F_{v''} \frac{dv''}{dx}$$
$$= F_x + F_v v' + F_{v'} v'' + F_{v''} v'''$$

differenziert, gibt sie ferner:

$$\frac{d^3 f(x,v)}{dx^3} = f_{xxx} + 2 f_{xxv} v' + f_{xvv} v'^2 + f_{xv} v''$$
$$+ (f_{xxv} + 2 f_{xvv} v' + f_{vvv} v'^2 + f_{vv} v'') v'$$
$$+ (2 f_{xv} + 2 f_{vv} v') v'' + f_v v'''$$
$$= f_{xxx} + 3 f_{xxv} v' + 3 f_{xvv} v'^2 + f_{vvv} v'^3 + 3 (f_{xv} + f_{vv} v') v'' + f_v v'''.$$

Dasselbe Verfahren liefert Schritt für Schritt die höheren Differentialquotienten der Funktion $f(x, v)$.

70. Funktionen von ganzen linearen Funktionen von x. Wenn $u, v, w, \ldots$ *ganze lineare* Funktionen von x, d. h. ganze rationale Funktionen ersten Grades (vgl. Nr. 6) sind, also die Form haben:

$$u = a_1 x + b_1, \quad v = a_2 x + b_2, \quad w = a_3 x + b_3, \quad \ldots,$$

wo die a und b konstant sind, so ist $u' = a_1$, $v' = a_2$, $w' = a_3, \ldots$, ferner $u'' = v'' = w'' = \cdots = 0$, so daß die Formel (2) der vorletzten Nummer gibt:

$$\frac{d^2 f(u, v, w, \ldots)}{dx^2} = f_{uu} a_1^2 + 2 f_{uv} a_1 a_2 + f_{vv} a_2^2$$
$$+ 2 f_{uw} a_1 a_3 + 2 f_{vw} a_2 a_3 + f_{ww} a_3^2 + \cdots.$$

Die rechte Seite dieser Formel können wir auch durch folgendes mechanische Verfahren gewinnen, wie man sofort sieht:

Wir berechnen das *Quadrat* von $f_u a_1 + f_v a_2 + f_w a_3 + \cdots$ und ersetzen alsdann in den hervorgehenden Summanden die Produkte

$$f_u f_u, \quad f_u f_v, \quad f_v f_v, \quad f_u f_w, \quad f_v f_w, \quad f_w f_w, \quad \cdots$$

durch die zweiten partiellen Ableitungen:

$$f_{uu}, \quad f_{uv}, \quad f_{vv}, \quad f_{uw}, \quad f_{vw}, \quad f_{ww}, \quad \cdots.$$

Durch ein ähnliches Verfahren können wir auch die höheren Ableitungen von $f(u, v, w, \ldots)$ gewinnen, nämlich die n^{te}, indem wir zunächst die n^{te} Potenz

$$(f_u a_1 + f_v a_2 + f_w a_3 + \cdots)^n$$

ausrechnen und darauf in jedem Gliede das darin auftretende Produkt von der Form

$$f_u^\alpha f_v^\beta f_w^\gamma \ldots$$

durch die entsprechende höhere Ableitung

$$f_{u^\alpha v^\beta w^\gamma \ldots} \quad \text{oder} \quad \frac{\partial^{\alpha+\beta+\gamma+\cdots} f}{\partial u^\alpha \partial v^\beta \partial w^\gamma \ldots}$$

ersetzen. Da dies im Falle $n = 2$ schon bewiesen ist, können wir es allgemein so beweisen: Wir nehmen an, daß es für irgend ein n richtig sei, und zeigen, daß es dann auch für den nächstfolgenden Wert $n + 1$ stimmt.

Es möge ausgerechnet die Summe hervorgehen:

$$(1) \quad (f_u a_1 + f_v a_2 + f_w a_3 + \cdots)^n = \sum c f_u^\alpha f_v^\beta f_w^\gamma \ldots a_1^\alpha a_2^\beta a_3^\gamma \ldots,$$

wobei c den Koeffizienten eines allgemeinen Gliedes bedeute, so daß nach *Annahme:*

$$(2) \qquad \frac{d^n f}{dx^n} = \sum c f_{u^\alpha v^\beta w^\gamma \ldots} a_1^\alpha a_2^\beta a_3^\gamma \ldots$$

wird. Nun ist nach Satz 22 in Nr. 42 der Differentialquotient von

$$f_{u^\alpha v^\beta w^\gamma \ldots}$$

gleich:

$$f_{u^{\alpha+1} v^\beta w^\gamma \ldots} a_1 + f_{u^\alpha v^{\beta+1} w^\gamma \ldots} a_2 + f_{u^\alpha v^\beta w^{\gamma+1} \ldots} a_3 + \cdots,$$

so daß aus (2) durch Differentiation folgt:

$$\frac{d^{n+1} f}{dx^{n+1}} = \sum c \left(f_{u^{\alpha+1} v^\beta w^\gamma \ldots} a_1 + f_{u^\alpha v^{\beta+1} w^\gamma \ldots} a_2 + \cdots\right) a_1^\alpha a_2^\beta a_3^\gamma \cdots.$$

Dieser Ausdruck aber geht aus

$$\sum c \left(f_u^{\alpha+1} f_v^\beta f_w^\gamma \ldots a_1 + f_u^\alpha f_v^{\beta+1} f_w^\gamma \ldots a_2 + \cdots\right) a_1^\alpha a_2^\beta a_3^\gamma \ldots$$

dadurch hervor, daß man nach dem obigen Verfahren jedes Produkt von Ableitungen erster Ordnung durch die entsprechende Ableitung höherer Ordnung ersetzt. Der letzte Ausdruck ist nun gleich

$$\sum c f_u^\alpha f_v^\beta f_w^\gamma \ldots a_1^\alpha a_2^\beta a_3^\gamma \ldots (f_u a_1 + f_v a_2 + f_w a_3 + \cdots)$$

oder nach (1) gleich der $(n + 1)^{\text{ten}}$ Potenz von $f_u a_1 + f_v a_2 + f_w a_3 + \cdots$. Hiermit ist der Beweis beendet.

Satz 5: Ist f eine Funktion von ganzen linearen Funktionen

$$u = a_1 x + b_1, \quad v = a_2 x + b_2, \quad w = a_3 x + b_3, \ \ldots$$

von x, so kann man die allgemeine Formel für die n^{te} Ableitung von f nach x so finden: Man berechnet die n^{te} Potenz von

$$f_u a_1 + f_v a_2 + f_w a_3 + \cdots$$

und ersetzt alsdann jedes darin vorkommende Produkt

$$f_u^\alpha f_v^\beta f_w^\gamma \ldots \qquad (\alpha + \beta + \gamma + \cdots = n)$$

von Ableitungen erster Ordnung durch die entsprechende Ableitung n^{ter} Ordnung:

$$\frac{\partial^{\alpha+\beta+\gamma+\cdots} f}{\partial u^\alpha \partial v^\beta \partial w^\gamma \ldots}.$$

71. Differentiation eines Produktes von Funktionen von x. Zunächst bedeute y ein Produkt von *drei* Faktoren u, v, w, die ihrerseits Funktionen von x sein sollen. Um den n^{ten} Differentialquotienten dieser Funktion y von x zu berechnen, benutzen wir abermals einige Analogien, nämlich solche, die zwischen den Potenzen von Summen und den Differentialquotienten von Produkten bestehen.

Die erste Potenz der Summe $u + v + w$ kann so geschrieben werden:

$$(1) \qquad (u + v + w)^1 = u^1 v^0 w^0 + u^0 v^1 w^0 + u^0 v^0 w^1,$$

da ja $u^0 = v^0 = w^0 = 1$ ist. Andererseits ist der erste Differentialquotient des Produktes nach Nr. 35:

$$(uvw)' = u'vw + uv'w + uvw'.$$

Wenn wir allgemein mit $u^{(n)}$ den n^{ten} Differentialquotienten von u bezeichnen, so ist es sinngemäß, unter $u^{(0)}$ die gar nicht differenzierte Funktion u zu verstehen, d. h. die Funktion u selbst. Alsdann kann die letzte Formel so geschrieben werden:

$$(2) \qquad (uvw)' = u'v^{(0)}w^{(0)} + u^{(0)}v'w^{(0)} + u^{(0)}v^{(0)}w',$$

wodurch ihre völlige Analogie mit der Formel (1) hervortritt.

Nun findet man die zweite Potenz der Summe $u + v + w$, indem man rechts in (1) jedes Glied mit $u + v + w$ multipliziert. So gehen aus dem ersten Gliede rechts die Glieder hervor:

$$(3) \qquad u^2 v^0 w^0 + u^1 v^1 w^0 + u^1 v^0 w^1.$$

Andererseits findet man den zweiten Differentialquotienten des Produktes uvw, indem man rechts in (2) jedes Glied

differenziert. So gehen aus dem ersten Gliede rechts nach Nr. 35 die Glieder hervor:

(4) $$u''v^{(0)}w^{(0)} + u'v'w^{(0)} + u'v^{(0)}w',$$

die den Gliedern (3) analog sind. Dieselbe Analogie gilt bei den übrigen Gliedern. Während man bei der Berechnung der zweiten, dritten usw. Potenz der Summe $u+v+w$ jedes schon erhaltene Glied immer wieder mit $u+v+w$ multiplizieren muß, wodurch je drei Glieder hervorgehen, muß man bei der Berechnung des zweiten, dritten usw. Differentialquotienten des Produktes uvw jedes schon erhaltene Glied immer noch einmal differenzieren, wodurch ebenfalls je drei Glieder hervorgehen. *Die oben bemerkte Analogie gilt alsdann stets.*

Um dies zu beweisen, wollen wir annehmen, diese Analogie sei schon bis zur n^{ten} Potenz der Summe bzw. bis zum n^{ten} Differentialquotienten des Produktes festgestellt. Es sei also

(5) $$u^\alpha v^\beta w^\gamma, \quad \text{wo } \alpha+\beta+\gamma = n \text{ ist},$$

ein Glied der Entwicklung von $(u+v+w)^n$ und *analog*

(6) $$u^{(\alpha)}v^{(\beta)}w^{(\gamma)}$$

das entsprechende Glied des n^{ten} Differentialquotienten von uvw. Wenn wir nun das Produkt (5) mit $u+v+w$ multiplizieren, so kommt:

$$u^{\alpha+1}v^\beta w^\gamma + u^\alpha v^{\beta+1}w^\gamma + u^\alpha v^\beta w^{\gamma+1}.$$

Wenn wir andererseits das Glied (6) noch einmal differenzieren, so kommt nach Nr. 35:

$$u^{(\alpha+1)}v^{(\beta)}w^{(\gamma)} + u^{(\alpha)}v^{(\beta+1)}w^{(\gamma)} + u^{(\alpha)}v^{(\beta)}w^{(\gamma+1)},$$

womit die Behauptung bewiesen ist, weil die Analogie immer noch besteht.

Es leuchtet ein, daß dieselbe Analogie für die n^{te} Potenz einer Summe $u_1+u_2+\cdots+u_m$ von m Summanden und für den n^{ten} Differentialquotienten eines Produktes $u_1u_2\ldots u_m$ von m Faktoren ganz ebenso zu beweisen ist. Mithin folgt:

Satz 6: Die Formel für den n^{ten} Differentialquotienten eines Produktes von m Funktionen $u_1, u_2, \ldots u_m$ von x kann aus der Formel für die n^{te} Potenz der Summe $u_1+u_2+\cdots+u_m$ so gewonnen werden: Man rechnet die n^{te} Potenz vollständig aus, wodurch eine Summe hervorgeht. In dieser Summe

ersetzt man jede Potenz u_i^α durch denjenigen Differentialquotienten $u_i^{(\alpha)}$, dessen Index derselbe ist. Fehlt in einem Gliede der Entwicklung der n^{ten} Potenz eine Funktion u_i, so ist jedoch vor dem Ersetzen der Faktor u_i^0, der gleich Eins ist, hinzuzufügen. Alsdann ist unter $u_i^{(0)}$ die Funktion u_i selbst zu verstehen.

So folgt z. B. aus dem binomischen Satze

$$(u+v)^n = u^n + \frac{n}{1}u^{n-1}v + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}u^{n-2}v^2 + \cdots + v^n,$$

wofür man zunächst zu schreiben hat:

$$(u+v)^n = u^n v^0 + \frac{n}{1}u^{n-1}v^1 + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}u^{n-2}v^2 + \cdots + u^0 v^n,$$

sofort:

$$\frac{d^n(uv)}{dx^n} = u^{(n)}v + \frac{n}{1}u^{(n-1)}v' + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}u^{(n-2)}v'' + \cdots + uv^{(n)}.$$

72. Höhere partielle Differentialquotienten von zusammengesetzten Funktionen. Es sei f eine Funktion von $u, v, w, \ldots$, die ihrerseits nicht, wie in Nr. 68, von nur einer Veränderlichen, sondern von n Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots x_n$ abhängen. Alsdann ist f eine zusammengesetzte Funktion der n unabhängigen Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots x_n$. Will man ihre partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}, \cdots \frac{\partial f}{\partial x_n}$$

berechnen, so hat man alle Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots x_n$ außer je einer wie Konstanten zu behandeln. Nach Satz 22 in Nr. 42 ist also:

$$(1) \qquad \frac{\partial f}{\partial x_i} = f_u \frac{\partial u}{\partial x_i} + f_v \frac{\partial v}{\partial x_i} + f_w \frac{\partial w}{\partial x_i} + \cdots \quad (i = 1, 2, \ldots n).$$

Diese ersten partiellen Ableitungen von f sind wieder zusammengesetzte Funktionen von $x_1, x_2, \ldots x_n$. Sie sind nämlich zusammengesetzt aus $u, v, w, \ldots$ und den ersten partiellen Ableitungen von $u, v, w, \ldots$. Die partiellen Ableitungen *zweiter* Ordnung von f nach $x_1, x_2, \ldots x_n$ sind die partiellen Ableitungen *erster* Ordnung von diesen Funktionen (1). Also sind sie nach derselben Methode zu berechnen. So z. B. ergibt sich aus (1) durch partielle Differentiation nach x_k:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k} = \frac{\partial f_u}{\partial x_k}\frac{\partial u}{\partial x_i} + \frac{\partial f_v}{\partial x_k}\frac{\partial v}{\partial x_i} + \frac{\partial f_w}{\partial x_k}\frac{\partial w}{\partial x_i} + \cdots$$
$$+ f_u \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} + f_v \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_k} + f_w \frac{\partial^2 w}{\partial x_i \partial x_k} + \cdots,$$

und hierin sind die Werte einzutragen:

$$\frac{\partial f_u}{\partial x_k} = f_{uu}\frac{\partial u}{\partial x_k} + f_{uv}\frac{\partial v}{\partial x_k} + f_{uw}\frac{\partial w}{\partial x_k} + \cdots,$$
$$\frac{\partial f_v}{\partial x_k} = f_{vu}\frac{\partial u}{\partial x_k} + f_{vv}\frac{\partial v}{\partial x_k} + f_{vw}\frac{\partial w}{\partial x_k} + \cdots,$$
$$\frac{\partial f_w}{\partial x_k} = f_{wu}\frac{\partial u}{\partial x_k} + f_{wv}\frac{\partial v}{\partial x_k} + f_{ww}\frac{\partial w}{\partial x_k} + \cdots,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Es ergibt sich so, weil $f_{vu} = f_{uv}$ usw. ist:

$$(2)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k} = f_{uu}\dfrac{\partial u}{\partial x_i}\dfrac{\partial u}{\partial x_k} + f_{uv}\left(\dfrac{\partial u}{\partial x_i}\dfrac{\partial v}{\partial x_k} + \dfrac{\partial u}{\partial x_k}\dfrac{\partial v}{\partial x_i}\right) \\ \quad + f_{vv}\dfrac{\partial v}{\partial x_i}\dfrac{\partial v}{\partial x_k} + f_{uw}\left(\dfrac{\partial u}{\partial x_i}\dfrac{\partial w}{\partial x_k} + \dfrac{\partial u}{\partial x_k}\dfrac{\partial w}{\partial x_i}\right) \\ \quad + f_{vw}\left(\dfrac{\partial v}{\partial x_i}\dfrac{\partial w}{\partial x_k} + \dfrac{\partial v}{\partial x_k}\dfrac{\partial w}{\partial x_i}\right) + f_{ww}\dfrac{\partial w}{\partial x_i}\dfrac{\partial w}{\partial x_k} \\ \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \quad + f_u\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} + f_v\dfrac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_k} + f_w\dfrac{\partial^2 w}{\partial x_i \partial x_k} + \cdots. \end{cases}$$

In entsprechender Weise ergeben sich die höheren partiellen Ableitungen von f nach $x_1, x_2, \ldots x_n$.

Beispiel: Es sei f eine Funktion der rechtwinkligen Punktkoordinaten x, y, die ihrerseits durch die *Polarkoordinaten* ϱ, ω ausgedrückt seien:

$$x = \varrho \cos \omega, \quad y = \varrho \sin \omega.$$

Alsdann ist f eine zusammengesetzte Funktion von ϱ und ω. Hier spielen x, y die Rolle der $u, v, w, \ldots$ und ϱ, ω die der $x_1, x_2, \ldots x_n$. Es kommt also:

$$\frac{\partial f}{\partial \varrho} = f_x \cos \omega + f_y \sin \omega, \quad \frac{\partial f}{\partial \omega} = -f_x \varrho \sin \omega + f_y \varrho \cos \omega;$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial \varrho^2} = (f_{xx}\cos\omega + f_{xy}\sin\omega)\cos\omega + (f_{xy}\cos\omega + f_{yy}\sin\omega)\sin\omega$$
$$= f_{xx}\cos^2\omega + 2 f_{xy}\sin\omega\cos\omega + f_{yy}\sin^2\omega,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \varrho \partial \omega} = (f_{xx}\cos\omega + f_{xy}\sin\omega)(-\varrho\sin\omega) + (f_{xy}\cos\omega + f_{yy}\sin\omega)\varrho\cos\omega$$
$$- f_x \sin\omega + f_y \cos\omega$$
$$= - f_{xx}\varrho\sin\omega\cos\omega + f_{xy}\varrho(\cos^2\omega - \sin^2\omega) + f_{yy}\varrho\sin\omega\cos\omega$$
$$- f_x \sin\omega + f_y \cos\omega,$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial \omega^2} = (- f_{xx}\varrho \sin\omega + f_{xy}\varrho\cos\omega)(-\varrho\sin\omega)$$
$$+ (-f_{xy}\varrho\sin\omega + f_{yy}\varrho\cos\omega)\varrho\cos\omega - f_x\varrho\cos\omega - f_y\varrho\sin\omega$$
$$= f_{xx}\varrho^2\sin^2\omega - 2f_{xy}\varrho^2\sin\omega\cos\omega + f_{yy}\varrho^2\cos^2\omega$$
$$- f_x\varrho\cos\omega - f_y\varrho\sin\omega.$$

73. Funktionen von ganzen linearen Funktionen von mehreren Veränderlichen. Wenn f wie in Nr. 72 gegeben ist, aber $u, v, w, \ldots$ *ganze lineare* Funktionen von $x_1, x_2, \ldots x_n$ sind, also die Form haben:

$$u = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + c_1,$$
$$v = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + c_2,$$
$$w = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \cdots + a_{3n}x_n + c_3,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

so ist insbesondere

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = a_{1i}, \quad \frac{\partial v}{\partial x_i} = a_{2i}, \quad \frac{\partial w}{\partial x_i} = a_{3i}, \ \ldots,$$
$$\frac{\partial u}{\partial x_k} = a_{1k}, \quad \frac{\partial v}{\partial x_k} = a_{2k}, \quad \frac{\partial w}{\partial x_k} = a_{3k}, \ \ldots,$$

während die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung von $u, v, w, \ldots$ gleich Null sind. Dementsprechend vereinfacht sich die Formel (2) der vorigen Nummer. Man erkennt, daß ihre rechte Seite formal so gewonnen werden kann: Man rechnet das *Produkt*

$$(f_u a_{1i} + f_v a_{2i} + f_w a_{3i} + \cdots)(f_u a_{1k} + f_v a_{2k} + f_w a_{3k} + \cdots)$$

aus und ersetzt alsdann die vorkommenden Produkte:

$$f_u f_u, \quad f_u f_v, \quad f_v f_v, \quad f_u f_w, \quad f_v f_w, \quad f_w f_w, \ \cdots$$

durch die zweiten partiellen Ableitungen:

$$f_{uu}, \quad f_{uv}, \quad f_{vv}, \quad f_{uw}, \quad f_{vw}, \quad f_{ww}, \ \cdots$$

Man gelangt durch dieselbe Schlußweise wie in Nr. 70 zu dem

Satz 7: Ist f eine Funktion von ganzen linearen Funktionen

$$u = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + c_1,$$
$$v = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + c_2,$$
$$w = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \cdots + a_{3n}x_n + c_3,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

von n Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots x_n$, *so kann man die Formel für eine partielle Ableitung* m^{ter} *Ordnung*

$$\frac{\partial^m f}{\partial x_1^\alpha \partial x_2^\beta \cdots \partial x_n^\nu}, \quad \text{wo } \alpha + \beta + \cdots + \nu = m \text{ ist},$$

so finden: Man rechnet das Produkt

$$(f_u a_{11} + f_v a_{21} + \cdots)^\alpha (f_u a_{12} + f_v a_{22} + \cdots)^\beta \cdots (f_u a_{1n} + f_v a_{2n} + \cdots)^\nu$$

aus und ersetzt alsdann jedes darin vorkommende Produkt $f_u^p f_v^q \ldots$ *durch die entsprechende Ableitung* m^{ter} *Ordnung*

$$\frac{\partial^m f}{\partial u^p \partial v^q \cdots}.$$

§ 4. Vollständige Differentiale.

74. Das vollständige Differential erster Ordnung. Auch in diesem Paragraphen setzen wir voraus, *daß die vorkommenden Funktionen der in Nr. 68 angegebenen Forderung* $\mathfrak{B}$ *genügen.*

Es sei nunmehr f eine Funktion von n unabhängigen Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots x_n$. Wir haben in Nr. 66 ihre partiellen Differentiale (erster Ordnung) definiert. Erteilen wir $x_1, x_2, \ldots x_n$ bzw. die Zunahmen $dx_1, dx_2, \ldots dx_n$, so sind diese partiellen Differentiale die Größen:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2, \ldots \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n.$$

Unter dem *vollständigen Differentiale df* von f versteht man die Summe dieser partiellen Differentiale:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n. \tag{1}$$

Ist die Funktion f für alle Werte von $x_1, x_2, \ldots x_n$, die innerhalb eines gewissen Variabilitätsbereiches liegen, konstant, so ist einzeln nach Satz 4 in Nr. 29:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = 0, \cdots \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0, \tag{2}$$

also auch das vollständige Differential df gleich Null. *Umgekehrt:* wenn das vollständige Differential df innerhalb jenes Variabilitätsbereiches überall gleich Null ist, so müssen einzeln, da $dx_1, dx_2, \ldots dx_n$ willkürliche Größen sind, die Gleichungen (2) bestehen, die nach Satz 5 in Nr. 29 aussagen, daß sich f nicht ändert, wenn sich nur x_1 ändert, ebenso nicht, wenn sich nur x_2 ändert, usw.

Hieraus aber läßt sich folgern, daß f überhaupt im Variabilitätsbereiche konstant sein muß. Es werde dies im Falle einer Funktion $f(x, y)$ von nur zwei Veränderlichen x, y näher erläutert, wobei also im ganzen Bereiche der erlaubten Wertepaare x, y

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

sein soll. Sind a, b und a_1, b_1 irgend zwei solche Paare, so setzen wir zunächst $y = b$ und lassen x von a bis a_1 variieren. Dabei ist $f(x, b)$ eine Funktion von x allein und wegen $\partial f : \partial x = 0$ nach Satz 5, Nr. 29, konstant, so daß $f(a, b) = f(a_1, b)$ sein muß. Nunmehr setzen wir $x = a_1$ und lassen y von b bis b_1 variieren, wobei sich wegen $\partial f : \partial y = 0$ analog ergibt, daß $f(a_1, b) = f(a_1, b_1)$ sein muß. Aus $f(a, b) = f(a_1, b) = f(a_1, b_1)$ folgt also, daß die Funktion f an der Stelle (a, b) denselben Wert wie an der Stelle (a_1, b_1) hat.

Aber hierbei ist noch ein Einwand zu machen: Es ist fraglich, ob der Variabilitätsbereich wirklich *alle* diejenigen Wertepaare enthält, die sich ergeben, wenn $y = b$ gesetzt und x von a bis a_1 variiert wird, ebenso wie es fraglich ist, ob er wirklich *alle* diejenigen Wertepaare enthält, die sich ergeben, wenn $x = a_1$ gesetzt und y von b bis b_1 variiert wird. Ist dies nicht der Fall, so muß man passende im Bereiche enthaltene Wertepaare

$$a', b; \quad a', b'; \quad a'', b'; \quad a'', b''; \ldots$$

derart einschalten, daß erstens alle Wertepaare, für die $y = b$ ist und x von a bis a' variiert, im Bereiche enthalten sind, zweitens alle Wertepaare, für die $x = a'$ ist und y von b bis b' variiert, drittens alle Wertepaare, für die $y = b'$ ist und x von a' bis a'' variiert, usw. Genau dieselbe Schlußfolgerung liefert alsdann

$$f(a, b) = f(a', b) = f(a', b') = f(a'', b') = \cdots = f(a_1, b_1).$$

Das Entsprechende ist im Falle einer Funktion f von n Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots x_n$ zu sagen. Wir gelangen also stets zu dem

Satz 8: *Das vollständige Differential einer Funktion f von n Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots x_n$ ist innerhalb des Variabilitätsbereiches der Veränderlichen dann und nur dann überall gleich Null, wenn die Funktion f innerhalb des Bereiches überall ein und denselben Wert hat.*

Es seien nun u und v zwei Funktionen von $x_1, x_2, \ldots x_n$. Es bedeute f ihre Summe oder Differenz $u \pm v$. Da dann

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{\partial u}{\partial x_1} \pm \frac{\partial v}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = \frac{\partial u}{\partial x_2} \pm \frac{\partial v}{\partial x_2} \quad \text{usw.}$$

ist, so folgt aus (1):

$$df = du \pm dv.$$

Entsprechendes gilt, wenn f eine algebraische Summe von mehr als zwei Funktionen ist. Also:

Satz 9: *Das vollständige Differential einer algebraischen Summe ist gleich der algebraischen Summe der vollständigen Differentiale der Summanden.*

Dieser Satz ist dem Satze 6 in Nr. 29 analog. Wie dort folgt hier aus Satz 9 und Satz 8 sofort

Satz 10: *Die vollständigen Differentiale zweier Funktionen von n Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots x_n$ sind innerhalb des gemeinsamen Variabilitätsbereiches dann und nur dann überall einander gleich, wenn die Differenz beider Funktionen innerhalb des Bereiches überall denselben Wert hat.*

75. Vollständiges Differential einer zusammengesetzten Funktion. Es sei f eine Funktion von m Veränderlichen $u_1, u_2, \ldots u_m$. Diese selbst seien ihrerseits Funktionen von n Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots x_n$, so daß f eine *zusammengesetzte* Funktion von $x_1, x_2, \ldots x_n$ ist. Wir suchen ihr vollständiges Differential df, also die Summe der partiellen Differentiale

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2, \ldots \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n.$$

Nun ist allgemein:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_i} + \frac{\partial f}{\partial u_2}\frac{\partial u_2}{\partial x_i} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial u_m}\frac{\partial u_m}{\partial x_i}$$

$$(i = 1, 2, \ldots n).$$

Multiplizieren wir diese n Gleichungen bzw. mit $dx_1, dx_2, \ldots dx_n$ und addieren sie, so kommt:

$$\begin{aligned} df = \; & \frac{\partial f}{\partial u_1}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} dx_2 + \cdots + \frac{\partial u_1}{\partial x_n} dx_n\right) \\ & + \frac{\partial f}{\partial u_2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} dx_2 + \cdots + \frac{\partial u_2}{\partial x_n} dx_n\right) \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ & + \frac{\partial f}{\partial u_m}\left(\frac{\partial u_m}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial u_m}{\partial x_2} dx_2 + \cdots + \frac{\partial u_m}{\partial x_n} dx_n\right). \end{aligned}$$

In den Klammern stehen aber die vollständigen Differentiale $du_1, du_2, \ldots du_m$ von $u_1, u_2, \ldots u_m$. Also folgt:

Satz 11: Ist f eine Funktion von $u_1, u_2, \ldots u_m$ und sind $u_1, u_2, \ldots u_m$ ihrerseits Funktionen von $x_1, x_2, \ldots x_n$, so daß f eine zusammengesetzte Funktion von $x_1, x_2, \ldots x_n$ ist, so hat das vollständige Differential df dieser zusammengesetzten Funktion den Wert:

$$df = \frac{\partial f}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial f}{\partial u_2} du_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial u_m} du_m$$

und ist daher gerade so zu bilden, als ob $u_1, u_2, \ldots u_m$ die unabhängigen Veränderlichen wären.

Ist insbesondere

$$f = u_1 \pm u_2 \pm \cdots \pm u_m,$$

so folgt:

$$df = du_1 \pm du_2 \pm \cdots \pm du_m,$$

womit Satz 9 der vorigen Nummer von neuem bewiesen ist.

Ist $f = u_1 u_2 \ldots u_m$, so folgt:

$$df = u_2 u_3 \ldots u_m du_1 + u_1 u_3 \ldots u_m du_2 + \cdots + u_1 u_2 \ldots u_{m-1} du_m.$$

Ist $f = u : v$, so folgt:

$$df = \frac{1}{v} du - \frac{u}{v^2} dv = \frac{v du - u dv}{v^2}.$$

Ist $f = u^n$ und n konstant, so folgt:

$$df = nu^{n-1} du.$$

Also:

Satz 12: Die Regeln für die Differentiation von Summen, Differenzen, Produkten, Quotienten und Potenzen von Funktionen einer einzigen Veränderlichen gelten entsprechend auch für Funktionen von mehreren Veränderlichen, sobald man nur statt mit den Differentialquotienten mit den vollständigen Differentialen rechnet.

76. Vollständige Differentiale höherer Ordnung. Ist $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ eine Funktion der *unabhängigen* Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots x_n$, so ist ihr vollständiges Differential

$$(1) \qquad df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n$$

ebenfalls eine Funktion von $x_1, x_2, \ldots x_n$ (die außerdem die willkürlichen *Konstanten* $dx_1, dx_2, \ldots dx_n$ enthält), und daher können wir weiterhin das vollständige Differential von df bilden. Es heißt das *vollständige Differential zweiter Ordnung von f*, wird mit d^2f bezeichnet und ist wieder eine Funktion von $x_1, x_2, \ldots x_n$. Ihr vollständiges Differential heißt das vollständige Differential *dritter* Ordnung von f selbst und wird mit d^3f bezeichnet, usw.

Um d^2f zu berechnen, leiten wir aus (1) nach Satz 12 ab:

$$d^2f = d\frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot dx_1 + d\frac{\partial f}{\partial x_2} \cdot dx_2 + \cdots + d\frac{\partial f}{\partial x_n} \cdot dx_n.$$

Da nun allgemein:

$$d\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_1} dx_1 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_2} dx_2 + \cdots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_n} dx_n$$

ist, so folgt:

$$d^2f = f_{x_1x_1} dx_1^2 + 2 f_{x_1x_2} dx_1 dx_2 + f_{x_2x_2} dx_2^2 + \cdots + f_{x_nx_n} dx_n^2.$$

Derselbe Ausdruck entsteht so: Man rechnet das Quadrat

$$(f_{x_1} dx_1 + f_{x_2} dx_2 + \cdots + f_{x_n} dx_n)^2$$

aus und ersetzt darauf allgemein jedes Produkt $f_{x_i} f_{x_k}$ durch die entsprechende Ableitung zweiter Ordnung $f_{x_i x_k}$.

Es erinnert dies an eine Bemerkung in Nr. 70. In der Tat spielen hier die Differentiale $dx_1, dx_2, \ldots dx_n$, die zwar beliebig, aber doch *konstant* während der Differentiation sind, dieselbe Rolle wie damals die Konstanten $a_1, a_2, \ldots$. Genau

so wie dort finden wir durch Schluß von m auf $m+1$ den zum Satze 5 jener Nummer analogen

Satz 13: Ist f eine Funktion von n unabhängigen Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots x_n$, so kann man die Formel für das vollständige Differential m^{ter} Ordnung $d^m f$ von f so finden: Man berechnet die m^{te} Potenz von

$$df = f_{x_1} dx_1 + f_{x_2} dx_2 + \cdots + f_{x_n} dx_n$$

und ersetzt alsdann jedes darin vorkommende Produkt

$$f_{x_1}^{\alpha} f_{x_2}^{\beta} f_{x_3}^{\gamma} \ldots f_{x_n}^{\nu} \qquad (\alpha + \beta + \gamma + \cdots + \nu = m)$$

von Ableitungen erster Ordnung durch die entsprechende Ableitung m^{ter} Ordnung

$$\frac{\partial^{\alpha+\beta+\gamma+\cdots+\nu} f}{\partial x_1^{\alpha} \partial x_2^{\beta} \partial x_3^{\gamma} \ldots \partial x_n^{\nu}}.$$

Es muß aber betont werden, *daß dies durchaus nicht richtig ist, wenn $x_1, x_2, \ldots x_n$ nicht unabhängige Veränderliche sind.* Denn wäre z. B. x_2 eine Funktion $u(x_1)$ von x_1, so wäre $dx_2 = u'(x_1)\,dx_1$, d. h. das Differential dx_2 spielte nicht mehr die Rolle einer Konstanten wie vorhin.

Um den allgemeinsten Fall zu betrachten, der hier vorkommen kann, nehmen wir an, es sei f eine Funktion von $u_1, u_2, \ldots u_m$; dagegen seien $u_1, u_2, \ldots u_m$ keine unabhängigen Veränderlichen, sondern Funktionen von $x_1, x_2, \ldots x_n$, und diese Größen $x_1, x_2, \ldots x_n$ sollen wirklich unabhängig sein. Jetzt ist zwar nach Satz 11 in Nr. 75:

$$df = f_{u_1} du_1 + f_{u_2} du_2 + \cdots + f_{u_m} du_m,$$

aber hierin ist allgemein:

$$du_i = \frac{\partial u_i}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial u_i}{\partial x_2} dx_2 + \cdots + \frac{\partial u_i}{\partial x_n} dx_n.$$

Wollen wir $d^2 f$ bilden, so haben wir zu bedenken, daß nicht nur $f_{u_1}, f_{u_2}, \ldots f_{u_m}$, sondern auch $du_1, du_2, \ldots du_m$ Funktionen von $x_1, x_2, \ldots x_n$ sind. Also kommt:

$$\begin{aligned} d^2 f = {} & df_{u_1} \cdot du_1 + df_{u_2} \cdot du_2 + \cdots + df_{u_m} \cdot du_m \\ & + f_{u_1} d^2 u_1 \;\; + f_{u_2} d^2 u_2 \;\; + \cdots + f_{u_m} d^2 u_m. \end{aligned}$$

Man sieht, daß man hier zu Rechnungen gelangt, die nicht analog denen in Nr. 70, sondern analog denen in Nr. 68 sind.

Zweckmäßiger ist es, zur Berechnung des vollständigen Differentials r^{ter} Ordnung so zu verfahren: Da f als Funktion von $u_1, u_2, \ldots u_m$ auch eine Funktion der wirklich unabhängigen Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots x_n$ ist, so ist zunächst $d^r f$ nach dem in Satz 13 angegebenen Verfahren formal darzustellen. Man erhält eine Summe, in der die r^{ten} Ableitungen von f nach $x_1, x_2, \ldots x_n$ auftreten. Diese Ableitungen sind nun einzeln zu berechnen, worauf man ihre Werte in die Summe einträgt. Um z. B. die Ableitung

$$\frac{\partial^r f}{\partial x_1^\alpha \partial x_2^\beta \cdots}$$

zu berechnen, differenziert man die Funktion f von $u_1, u_2, \ldots u_m$ zunächst α-mal partiell nach x_1, das Ergebnis β-mal partiell nach x_2 usw.

Viertes Kapitel.

Differentiation unentwickelter Funktionen.

§ 1. Unabhängigkeit von Funktionen und Gleichungen.

77. Definition der Unabhängigkeit von Funktionen. Wir wollen jetzt eine Reihe von formalen Betrachtungen vorführen. Dabei ist es unerläßlich, die folgende Forderung zu stellen:

Forderung 𝔈: *Jede vorkommende Gleichung zwischen Veränderlichen ist so beschaffen, daß vermöge ihrer jede wirklich in ihr auftretende Veränderliche implizite als Funktion der übrigen definiert wird. Jede vorkommende Funktion, insbesondere auch jede implizite definierte, ist innerhalb eines gewissen Variabilitätsbereiches stetig und hat dort ebenfalls stetige partielle Ableitungen erster Ordnung.*

Wenn eine Gleichung $f(x_1, x_2, \ldots x_n) = 0$ zwischen n Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots x_n$ vorliegt, so kann man allerdings *beweisen*, daß sie z. B. x_1 implizite als stetige Funktion von $x_2, x_3, \ldots x_n$ mit stetigen partiellen Ableitungen definiert, sobald man über die Funktion f selbst gewisse Voraussetzungen macht. Wir wollen jedoch auf derartige Fragen, die uns erst im dritten Bande beschäftigen werden, hier gar nicht eingehen, ihre Beantwortung vielmehr durch die Forderung 𝔈 ersetzen. Ist x_1 durch die Gleichung $f(x_1, x_2, \ldots x_n) = 0$ als Funktion von $x_2, x_3, \ldots x_n$ definiert, so können wir diese Funktion symbolisch mit $\varphi(x_2, x_3, \ldots x_n)$ bezeichnen. Alsdann sagen wir: Die Gleichung $f = 0$ hat die *Auflösung* $x_1 = \varphi(x_2, x_3, \ldots x_n)$.

An die Spitze unserer Betrachtungen stellen wir nun die *Definition: Die m Funktionen:*

$$y_1 = f_1(x_1, x_2, \ldots x_n), \quad y_2 = f_2(x_1, x_2, \ldots x_n)$$
$$\ldots y_m = f_m(x_1, x_2, \ldots x_n)$$

von n unabhängigen Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots x_n$ heißen voneinander unabhängig, wenn es keine von allen Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots x_n$ freie Gleichung zwischen $y_1, y_2, \ldots y_m$ gibt, dagegen voneinander abhängig, wenn es mindestens eine derartige Gleichung gibt:

$$F(y_1, y_2, \ldots y_m) = 0,$$

die also erfüllt sein müßte, sobald man darin für $y_1, y_2, \ldots y_m$ die gegebenen Funktionen $f_1, f_2, \ldots f_m$ von $x_1, x_2, \ldots x_n$ einsetzte, und zwar erfüllt durch alle diejenigen Wertsysteme $x_1, x_2, \ldots x_n$, für die alle m Funktionen $f_1, f_2, \ldots f_m$ definiert sind.

Es braucht kaum bemerkt zu werden, daß natürlich nur von solchen Gleichungen $F = 0$ die Rede ist, die nicht *identisch* bestehen wie z. B. $y_1 - y_1 = 0$ oder dergl. Mit anderen Worten: Die Gleichung $F = 0$, die im Falle der Abhängigkeit vorhanden ist, muß mindestens eine der m Funktionen $y_1, y_2, \ldots y_m$ wirklich enthalten.

1. Beispiel: Zwei Funktionen $y_1 = f_1(x)$ und $y_2 = f_2(x)$ von nur einer Veränderlichen sind stets voneinander abhängig. Denn entweder sind beide Konstanten, a und b. Alsdann bestehen zwei Gleichungen $F = 0$, nämlich $y_1 - a = 0$ und $y_2 - b = 0$. Oder sie sind nicht beide konstant. Die erste etwa enthalte x wirklich. Es gibt dann eine zu ihr inverse Funktion $x = \varphi(y_1)$; setzen wir diese in die zweite für x ein, so folgt, daß zwischen y_1 und y_2 die Gleichung $y_2 - f_2(\varphi(y_1)) = 0$ besteht.

2. Beispiel: Die beiden Funktionen von x_1 und x_2:

$$y_1 = \frac{x_1}{x_2}, \quad y_2 = \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1^2 - x_2^2}$$

sind voneinander abhängig, denn es ist:

$$y_2(y_1^2 - 1) - y_1^2 - 1 = 0.$$

78. Umformung der Definition der Unabhängigkeit von Funktionen. Wenn m Funktionen von n unabhängigen Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots x_n$ vorliegen:

(1) $$y_k = f_k(x_1, x_2, \ldots x_n) \qquad (k = 1, 2, \ldots m),$$

so kann es sein, daß $x_1, x_2, \ldots x_n$ nirgends in $f_1, f_2, \ldots f_m$ wirklich auftreten, d. h. daß $y_1, y_2, \ldots y_m$ Konstanten $a_1, a_2, \ldots a_m$ sind. Weil dann die Gleichungen $y_1 - a_1 = 0, \ldots y_m - a_m = 0$ bestehen, sind diese Funktionen voneinander abhängig. Tritt dieser extreme Fall nicht auf, so wird eine der Funktionen eine der unabhängigen Veränderlichen wirklich enthalten. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit der Betrachtung dürfen wir annehmen, daß etwa x_1 wirklich vorkomme und zwar etwa in der ersten Gleichung (1), so daß die Auflösung dieser Gleichung nach x_1 ergebe:

(2) $$x_1 = \varphi_1(y_1, x_2, x_3, \ldots x_n).$$

Setzen wir diesen Wert in die übrigen $m-1$ Gleichungen (1) für x_1 ein, so werden $y_2, y_3, \ldots y_m$ durch y_1 und $x_2, x_3, \ldots x_n$ ausgedrückt. Kämen nun $x_2, x_3, \ldots x_n$ in Wahrheit rechts nicht mehr vor, so hätten die neuen Gleichungen die Formen $y_2 = F_2(y_1), \ldots y_m = F_m(y_1)$, d. h. die y wären voneinander abhängig. Ist dies nicht der Fall, so wird also etwa x_2 noch wirklich vorkommen, sagen wir etwa in der ersten der $m-1$ Gleichungen. Dann sind y_1 und y_2 gewiß voneinander unabhängig. Denn sonst bestände ja eine Gleichung zwischen y_1 und y_2, die nicht frei von y_2 wäre (da $y_1 \neq$ konst. ist), so daß y_2 eine Funktion von y_1 allein wäre und also die erste der $m-1$ durch die Substitution (2) hervorgehenden Gleichungen gegen die Voraussetzung doch frei von x_2 wäre. Die Auflösung dieser ersten der $m-1$ Gleichungen nach x_2 möge nun ergeben:

(3) $$x_2 = \varphi_2(y_1, y_2, x_3, \ldots x_n).$$

Dasselbe Schlußverfahren ist fortzusetzen: Nachdem wir in die Gleichungen (1) mit Ausnahme der ersten den Wert (2) von x_1 eingesetzt haben, setzen wir jetzt in alle hervorgehenden $m-1$ Gleichungen mit Ausnahme der ersten noch den Wert (3) von x_2 ein, so daß sich $y_3, y_4, \ldots y_m$ durch $y_1, y_2, x_3, x_4, \ldots x_n$ ausdrücken. Fallen $x_3, x_4, \ldots x_n$ dabei ganz heraus, so sind y_3, $y_4, \ldots y_m$ Funktionen von y_1 und y_2 allein, also mit anderen Worten $y_1, y_2, \ldots y_m$ voneinander abhängig. Fällt dagegen z. B. x_3 nicht heraus, sondern bleibt x_3 rechts etwa in der ersten

der $m-2$ Gleichungen stehen, so ist sie nach x_3 auflösbar und gibt etwa:

(4) $$x_3 = \varphi_3(y_1, y_2, y_3, x_4, \ldots x_n).$$

Auch ist dann y_3 von y_1 und y_2 unabhängig. Denn sonst bestände zwischen allen dreien eine Gleichung, die, weil y_1 und y_2 voneinander unabhängig sind, y_3 enthalten müßte, so daß y_3 eine Funktion von y_1 und y_2 allein und frei von x_3 wäre, was der Voraussetzung widerspricht.

Nunmehr machen wir in den $m-3$ letzten Gleichungen noch die Substitution (4), so daß sich $y_4, y_5, \ldots y_m$ durch $y_1, y_2, y_3, x_4, \ldots x_n$ ausdrücken, und schließen entsprechend weiter. Das Verfahren endet, sobald die noch übrigen Funktionen y durch die vorher benutzten y allein ausgedrückt sind, also eine Abhängigkeit besteht. Andernfalls endet es erst mit dem m^{ten} Schritte, d. h. wenn alle m Gleichungen (1) aufgebraucht worden sind. Zugleich folgt, daß dann $m \leq n$ ist. In diesem Falle haben wir nach und nach m Gleichungen gewonnen von der Form:

$$\begin{aligned}
x_1 &= \varphi_1(y_1, x_2, x_3, \ldots x_m, x_{m+1}, \ldots x_n), \\
x_2 &= \varphi_2(y_1, y_2, x_3, \ldots x_m, x_{m+1}, \ldots x_n), \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
x_m &= \varphi_m(y_1, y_2, y_3, \ldots y_m, x_{m+1}, \ldots x_n).
\end{aligned}$$

Setzen wir den Wert von x_m in alle $m-1$ vorhergehenden Gleichungen ein, darauf den von x_{m-1} in alle $m-2$ vorhergehenden usw., so ergeben sich m Gleichungen von der Form:

$$x_k = \psi_k(y_1, y_2, \ldots y_m, x_{m+1}, \ldots x_n) \qquad (k = 1, 2, \ldots m),$$

so daß die Gleichungen (1) *hierdurch nach* $x_1, x_2, \ldots x_m$ *aufgelöst sind.*

Nur der Bequemlichkeit des Ausdruckes halber nahmen wir an, daß nach und nach gerade $x_1, x_2, \ldots x_m$ berechenbar seien. Statt ihrer kann allgemein eine andere Reihe $x_\alpha, x_\beta, x_\gamma, \ldots$ von m der n Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots x_n$ auftreten. Es hat sich also ergeben:

Satz 1: Die m Funktionen

$$y_1 = f_1(x_1, x_2, \ldots x_n), \ldots y_m = f_m(x_1, x_2, \ldots x_n)$$

von n unabhängigen Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots x_n$ *sind dann*

und nur dann voneinander unabhängig, wenn erstens ihre Anzahl m höchstens gleich der Anzahl n der unabhängigen Veränderlichen ist und überdies zweitens die vorliegenden m Gleichungen nach gerade m der n Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots x_n$ *auflösbar sind.*

Sind sie etwa nach $x_\alpha, x_\beta, x_\gamma, \ldots$ auflösbar, so sagen wir, *daß die Funktionen* $y_1, y_2, \ldots y_m$ *hinsichtlich* $x_\alpha, x_\beta, x_\gamma, \ldots$ *voneinander unabhängig sind.*

Beispiel: Die beiden Funktionen $y_1 = x_1 + x_2 + x_3$ und $y_2 = (x_1 + x_2)\, x_3$ sind unabhängig voneinander, aber nicht hinsichtlich x_1 und x_2, sondern hinsichtlich x_1 und x_3 (oder x_2 und x_3).

79. Unabhängigkeit von Gleichungen zwischen Veränderlichen. Wir wollen jetzt annehmen, daß *m Gleichungen* zwischen *n* Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots x_n$ vorliegen:

$$(1) \qquad f_1(x_1, x_2, \ldots x_n) = 0, \ldots f_m(x_1, x_2, \ldots x_n) = 0.$$

Die Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots x_n$ sollen sonst keiner Bedingung unterworfen sein. Käme x_1 in keiner der Gleichungen vor, so hätten wir von dieser Veränderlichen x_1 völlig absehen können. Daher nehmen wir an, daß etwa x_1 wirklich in einer Gleichung, etwa in der ersten, auftrete, so daß sich durch Auflösung dieser Gleichung nach x_1 ergibt:

$$(2) \qquad x_1 = \varphi_1(x_2, x_3, \ldots x_n).$$

Wir setzen den Wert in alle $m-1$ übrigen Gleichungen (1) ein. Es kann sein, daß sie samt und sonders Identitäten werden. Wir sagen dann, daß alle Gleichungen (1) *Folgen* der ersten Gleichung sind. Es kann auch sein, daß *einige* Identitäten werden. Sie sind dann Folgen der ersten Gleichung, und wir können sie bei den ferneren Überlegungen beiseite lassen. Es kann auch sein, daß sich Widersprüche ergeben, wie es z. B. der Fall ist, wenn das System (1) die Form hat:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0, \quad (x_1 + x_2 + x_3)^2 = 1.$$

Alsdann sind die Gleichungen des Systems (1) *unverträglich* miteinander, und die Untersuchung wird gegenstandslos. Wir wollen bei der ferneren Betrachtung annehmen, daß sich nie Widersprüche ergeben. Dies verlangt ja auch schon unsere Forderung $\mathfrak{C}$, Nr. 77.

Die Substitution des Wertes (2) von x_1 in die $m-1$ letzten Gleichungen (1) gibt also *höchstens* $m-1$ Gleichungen in $x_2, x_3, \ldots x_n$ allein. Sie sind, wenn ihre Zahl nicht gleich Null ist, nicht frei von allen $x_2, x_3, \ldots x_n$. Nehmen wir also an, eine enthalte etwa x_2 wirklich und gebe

$$x_2 = \varphi_2(x_3, x_4, \ldots x_n).$$

Diesen Wert setzen wir in alle übrigen ein, so daß Gleichungen in $x_3, x_4, \ldots x_n$ allein hervorgehen, unter denen wieder Identitäten vorhanden sein können, usw. Das Verfahren endet etwa mit

$$x_\mu = \varphi_\mu(x_{\mu+1}, \ldots x_n),$$

wo $\mu \leqq m$ ist, wenn alle übrigen Gleichungen durch die angewandten Substitutionen identisch erfüllt werden. *Dann sind alle m Gleichungen* (1) *Folgen der μ Gleichungen:*

$$x_1 = \varphi_1(x_2, x_3, \ldots x_n), \quad x_2 = \varphi_2(x_3, \ldots x_n), \ldots x_\mu = \varphi_\mu(x_{\mu+1}, \ldots x_n).$$

Von diesen ist aber keine eine Folge der anderen, denn die erste enthält x_1, das in allen übrigen nicht vorkommt, die zweite enthält x_2, das in allen folgenden nicht vorkommt, usw. Wenn wir den Wert von x_μ in alle vorhergehenden, darauf den von $x_{\mu-1}$ in alle vorhergehenden usw. einsetzen, so gehen μ Gleichungen hervor von der Form:

$$(3) \qquad x_1 = \psi_1(x_{\mu+1}, \ldots x_n), \ldots x_\mu = \psi_\mu(x_{\mu+1}, \ldots x_n),$$

und alle m Gleichungen (1) *sind Folgen dieser μ* ($\leqq m$) *Gleichungen.* Wir sagen alsdann: *Die Gleichungen* (1) *sind nach $x_1, x_2, \ldots x_\mu$ auflösbar.*

Hier gilt nun wieder die Bemerkung, daß wir nur des bequemeren Ausdruckes halber diejenigen μ Veränderlichen, nach denen die Gleichungen (1) auflösbar sind, mit $x_1, x_2, \ldots x_\mu$ bezeichnet haben. Es können μ andere unter den n Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots x_n$ sein, aber sicher ist $\mu \leqq m$. *Es sind also m Gleichungen nach höchstens m Veränderlichen auflösbar.* Wenn nun insbesondere $\mu = m$ ist, so ist keine der m gegebenen Gleichungen eine Folge von weniger als m Gleichungen, d. h. keine ist dann überflüssig. Wir sagen:

Definition: m Gleichungen in n Veränderlichen heißen voneinander unabhängig, wenn sie nach gerade m Veränderlichen auflösbar sind. Insbesondere heißen sie dann voneinander unabhängig hinsichtlich dieser m Veränderlichen.

Alsdann ist $m \leqq n$. Sind die Gleichungen (1) etwa hinsichtlich $x_1, x_2, \ldots x_m$ voneinander unabhängig, so erhalten wir Auflösungen von der Form:

$$x_1 = \psi_1(x_{m+1}, \ldots x_n), \ldots x_m = \psi_m(x_{m+1}, \ldots x_n).$$

Anders gesagt: Die m Gleichungen (1) lassen sich auf die Form eines Systems von m Gleichungen

$$(4) \qquad x_k - \psi_k(x_{m+1}, \ldots x_n) = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots m)$$

bringen. Die linken Seiten dieser m Gleichungen sind *Funktionen*

$$(5) \qquad y_k = x_k - \psi_k(x_{m+1}, \ldots x_n) \qquad (k = 1, 2, \ldots m)$$

von $x_1, x_2, \ldots x_n$. Da sich die Gleichungen (5) nach $x_1, \ldots x_m$ auflösen lassen in der Form $x_k = y_k + \psi_k$, so folgt aus Satz 1 in Nr. 78, daß $y_1, y_2, \ldots y_m$ voneinander unabhängige *Funktionen* hinsichtlich $x_1, x_2, \ldots x_m$ sind. Hieraus ergibt sich allgemein:

Satz 2: Sind m Gleichungen in n Veränderlichen x_1, $x_2, \ldots x_n$ voneinander unabhängig hinsichtlich der m Veränderlichen $x_\alpha, x_\beta, x_\gamma, \ldots$, so lassen sich die Gleichungen auf eine solche Form

$$f_k(x_1, x_2, \ldots x_n) = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots m)$$

bringen, in der ihre linken Seiten voneinander unabhängige Funktionen hinsichtlich $x_\alpha, x_\beta, x_\gamma, \ldots$ sind.

Wenn umgekehrt ein System (1) vorliegt, in dem die linken Seiten $f_1, f_2, \ldots f_n$ voneinander unabhängige Funktionen, etwa hinsichtlich $x_1, x_2, \ldots x_m$, sind, so lassen sich die m Gleichungen

$$(6) \qquad y_i = f_i(x_1, x_2, \ldots x_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots m)$$

infolge von Satz 1 in Nr. 78 nach $x_1, x_2, \ldots x_m$ auflösen. Setzen wir in den Auflösungen $y_1 = y_2 = \cdots = y_m = 0$, so gehen die Auflösungen des Systems (1) nach $x_1, x_2, \ldots x_m$ hervor. Also:

Satz 3: Sind m Funktionen $f_1, f_2, \ldots f_m$ von m Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots x_n$ voneinander unabhängig hinsichtlich der m Veränderlichen $x_\alpha, x_\beta, x_\gamma, \ldots$, so sind auch die m Gleichungen $f_1 = 0, \ldots f_m = 0$ voneinander unabhängig hinsichtlich $x_\alpha, x_\beta, x_\gamma, \ldots$

Durch die Sätze 2 und 3 wird die Untersuchung der Unabhängigkeit von Gleichungen auf die Untersuchung der Unabhängigkeit von Funktionen zurückgeführt.

80. Die Funktionaldeterminante. Als analytisches Kennzeichen der Unabhängigkeit von Funktionen dient, wie wir zeigen werden, der Wert ihrer *Funktionaldeterminante* oder *Jacobischen Determinante,* von der wir schon in Nr. 56 und 58 sprachen. Unter der Funktionaldeterminante von m Funktionen

$$(1) \qquad y_i = f_i(x_1, x_2, \ldots x_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots m)$$

von $n\,(\geqq m)$ Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots x_n$ und zwar unter der Funktionaldeterminante hinsichtlich der m Veränderlichen $x_\alpha, x_\beta, \ldots x_\mu$ versteht man die m-reihige Determinante der m^2 partiellen Ableitungen erster Ordnung von $y_1, y_2, \ldots y_m$ nach $x_\alpha, x_\beta, \ldots x_\mu$. Wie schon gesagt, wird sie symbolisch mit

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \cdots y_m \\ x_\alpha & x_\beta \ldots x_\mu \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad \begin{pmatrix} f_1 & f_2 \cdots f_m \\ x_\alpha & x_\beta \ldots x_\mu \end{pmatrix}$$

bezeichnet. Z. B. die Funktionaldeterminante von $y_1, y_2, \ldots y_m$ hinsichtlich $x_1, x_2, \ldots x_m$ ist:

$$(2) \qquad \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \cdots y_m \\ x_1 & x_2 \ldots x_m \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_m} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_m} \end{vmatrix}.$$

Sind nun die m Funktionen $y_1, y_2, \ldots y_m$ voneinander *abhängig,* so besteht zwischen ihnen eine Gleichung; sie enthalte etwa y_1 wirklich, so daß ihre Auflösung nach y_1 gibt:

$$y_1 = \omega(y_2, y_3, \ldots y_m).$$

Dann ist also:

$$f_1 = \omega(f_2, f_3, \ldots f_m),$$

so daß f_1 hierdurch als *zusammengesetzte* Funktion von $x_1, x_2, \ldots x_n$ dargestellt wird. Nach Nr. 72 ist folglich für $i = 1, 2, \ldots n$:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_i} = \frac{\partial \omega}{\partial f_2}\frac{\partial f_2}{\partial x_i} + \frac{\partial \omega}{\partial f_3}\frac{\partial f_3}{\partial x_i} + \cdots + \frac{\partial \omega}{\partial f_m}\frac{\partial f_m}{\partial x_i}.$$

Die Determinante (2) ändert nun bekanntlich ihren Wert nicht, wenn wir von ihrer ersten Zeile die mit irgend welchen Größen multiplizierten übrigen Zeilen subtrahieren. Multiplizieren wir diese dabei insbesondere mit

$$\frac{\partial \omega}{\partial f_2}, \quad \frac{\partial \omega}{\partial f_3} \cdots \frac{\partial \omega}{\partial f_m},$$

so zeigt die letzte Gleichung, daß alle Glieder der ersten Zeile gleich Null werden. *Sobald also die m Funktionen $y_1, y_2, \ldots y_m$ von n Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots x_n$ $(n \geqq m)$ voneinander abhängig sind, ist die Funktionaldeterminante von $f_1, f_2, \ldots f_m$ hinsichtlich irgend welcher m Veränderlichen aus der Reihe der n Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots x_n$ gleich Null.*

Wir wollen jetzt beweisen, daß dagegen, wenn $y_1, y_2, \ldots y_m$ etwa hinsichtlich $x_1, x_2, \ldots x_m$ voneinander *unabhängig* sind, ihre Funktionaldeterminante hinsichtlich $x_1, x_2, \ldots x_m$ *nicht* gleich Null ist. Dazu bedienen wir uns des Schlusses von $m-1$ auf m, denn es ist sicher richtig für $m = 1$. In der Tat, ist $m = 1$, d. h. liegt *eine* Funktion $y = f(x_1, x_2, \ldots x_m)$ vor, so ist sie nach der allgemeinen Definition in Nr. 77 als unabhängig zu bezeichnen, wenn sie keine Konstante c ist, da ja sonst eine Gleichung in y allein vorhanden wäre, nämlich $y - c = 0$. Insbesondere ist sie dabei als unabhängig hinsichtlich x_1 zu bezeichnen, wenn die Gleichung $y = f$ nach x_1 auflösbar ist, d. h. wenn die Funktion f die Veränderliche x_1 wirklich enthält. Alsdann aber ist $\partial f : \partial x_1 \neq 0$. Aber für $m = 1$ reduziert sich die Funktionaldeterminante (2) gerade auf $\partial f : \partial x_1$.

Die Behauptung wird hiernach bewiesen sein, wenn wir, ausgehend von der Annahme, daß sie für $m-1$ Funktionen richtig ist, bewiesen haben, daß sie auch für m Funktionen gilt. Dieser Beweis ist wie folgt zu führen:

Nehmen wir an, die Funktionen (1) seien unabhängig hinsichtlich $x_1, x_2, \ldots x_m$. Dann sind die *Gleichungen* (1) nach Satz 1 in Nr. 78 nach $x_1, x_2, \ldots x_m$ auflösbar und zwar etwa die $m-1$ letzten gerade nach $x_2, x_3, \ldots x_m$, so daß also die $m-1$ Funktionen $y_2, y_3, \ldots y_m$ gerade hinsichtlich $x_2, x_3, \ldots x_m$ voneinander unabhängig sind. Nach *Annahme*

ist in diesem Falle die Funktionaldeterminante von $f_2, f_3, \ldots f_m$ hinsichtlich $x_2, x_3, \ldots x_m$ nicht gleich Null, also:

$$\left(\begin{matrix} f_2 & f_3 & \cdots & f_m \\ x_2 & x_3 & \ldots & x_m \end{matrix}\right) \neq 0. \tag{3}$$

Wenn wir die aus den $m-1$ letzten Gleichungen (1) durch Auflösung hervorgehenden Werte von $x_2, x_3, \ldots x_m$ in die erste einsetzen, so drückt diese y_1 durch $x_1, y_2, \ldots y_m$ aus:

$$y_1 = \varphi(x_1, y_2, y_3, \ldots y_m).$$

Diese Gleichung ist nicht frei von x_1, da sonst eine Gleichung zwischen $y_1, y_2, \ldots y_m$ bestände, was ihrer vorausgesetzten Unabhängigkeit widersprechen würde. Wir haben also

$$f_1 = \varphi(x_1, f_2, f_3, \ldots f_m), \tag{4}$$

wo

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \neq 0 \tag{5}$$

ist. Durch (4) wird f_1 als *zusammengesetzte* Funktion von x_1, $x_2, \ldots x_m$ dargestellt. Nach Nr. 72 sind ihre partiellen Ableitungen erster Ordnung diese:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f_1}{\partial x_1} &= \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + \frac{\partial \varphi}{\partial f_2}\frac{\partial f_2}{\partial x_1} + \cdots + \frac{\partial \varphi}{\partial f_m}\frac{\partial f_m}{\partial x_1}, \\
\frac{\partial f_1}{\partial x_2} &= \qquad\quad \frac{\partial \varphi}{\partial f_2}\frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \cdots + \frac{\partial \varphi}{\partial f_m}\frac{\partial f_m}{\partial x_2}, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\frac{\partial f_1}{\partial x_m} &= \qquad\quad \frac{\partial \varphi}{\partial f_2}\frac{\partial f_2}{\partial x_m} + \cdots + \frac{\partial \varphi}{\partial f_m}\frac{\partial f_m}{\partial x_m}.
\end{aligned}$$

Wenn wir nun in der Funktionaldeterminante (2) von der ersten Zeile die bzw. mit

$$\frac{\partial \varphi}{\partial f_2}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial f_3}, \quad \ldots \frac{\partial \varphi}{\partial f_m}$$

multiplizierten übrigen $m-1$ Zeilen abziehen, was ihren Wert nicht ändert, so zeigt sich, daß alle Glieder der ersten Zeile mit Ausnahme des ersten gleich Null werden. Die m-reihige Determinante (2) ist daher das Produkt dieses ersten Gliedes $\partial \varphi : \partial x_1$ mit der zugehörigen $(m-1)$-reihigen Unterdeterminante die ihrerseits nichts anderes als die in (3) angegebene Determinante ist. Nach (3) und (5) ist mithin die Determinante (2) von Null verschieden.

[80

Wenn wir jetzt wieder $x_1, x_2, \ldots x_m$ durch irgend welche m der n Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots x_n$ ersetzen, können wir das Ergebnis so aussprechen:

Satz 4: Die m Funktionen

$$f_1(x_1, x_2, \ldots x_n), \quad f_2(x_1, x_2, \ldots x_n), \quad \ldots f_m(x_1, x_2, \ldots x_n)$$

von $n\,(\geqq m)$ unabhängigen Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots x_n$ sind dann und nur dann hinsichtlich der m Veränderlichen $x_\alpha, x_\beta, \ldots x_\mu$ voneinander unabhängig, wenn ihre Funktionaldeterminante hinsichtlich $x_\alpha, x_\beta, \ldots x_\mu$ von Null verschieden ist:

$$\begin{pmatrix} f_1 & f_2 \cdots f_m \\ x_\alpha & x_\beta \ldots x_\mu \end{pmatrix} \neq 0.$$

Beispiel: Die schon in Nr. 78 betrachteten Funktionen

$$y_1 = x_1 + x_2 + x_3, \quad y_2 = (x_1 + x_2)\,x_3$$

haben hinsichtlich x_1 und x_2 bzw. hinsichtlich x_1 und x_3 die Funktionaldeterminanten

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_3 & x_3 \end{vmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_3 & x_1 + x_2 \end{vmatrix},$$

von denen die erste gleich Null, die zweite dagegen gleich $x_1 + x_2 - x_3$ ist. Sie sind also nicht hinsichtlich x_1 und x_2, wohl aber hinsichtlich x_1 und x_3 (ebenso hinsichtlich x_2 und x_3) voneinander unabhängig.

81. Analogien zwischen Differentialquotienten und Funktionaldeterminanten. In Nr. 80 bemerkten wir gelegentlich, daß sich die Funktionaldeterminante von $f_1, f_2, \ldots f_m$ hinsichtlich $x_1, x_2, \ldots x_m$ im speziellen Falle $m = 1$ auf eine erste Ableitung nach x_1 reduziert. Man kann Sätze aufstellen, die zeigen, daß die Funktionaldeterminante von m Funktionen in der Tat eine naturgemäße Verallgemeinerung des ersten Differentialquotienten einer Funktion von einer Veränderlichen für den Fall von m Funktionen von m Veränderlichen ist.

Es seien nämlich

$$y_k = f_k(x_1, x_2, \ldots x_m) \qquad (k = 1, 2, \ldots m) \tag{1}$$

m Funktionen von gerade m Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots x_m$. Ferner seien $z_1, z_2, \ldots z_m$ gerade m Funktionen von $y_1, y_2, \ldots y_m$:

$$z_l = \varphi_l(y_1, y_2, \ldots y_m) \qquad (l = 1, 2, \ldots m). \tag{2}$$

Da wir nach (1) auch:

$$z_l = \varphi_l(f_1, f_2, \ldots f_m) \qquad (l = 1, 2, \ldots m)$$

schreiben können, so sind $z_1, z_2, \ldots z_m$ *zusammengesetzte* Funktionen von $x_1, x_2, \ldots x_m$, und sie haben nach Nr. 72 die Ableitungen:

$$\frac{\partial z_l}{\partial x_i} = \frac{\partial \varphi_l}{\partial f_1}\frac{\partial f_1}{\partial x_i} + \frac{\partial \varphi_l}{\partial f_2}\frac{\partial f_2}{\partial x_i} + \cdots + \frac{\partial \varphi_l}{\partial f_m}\frac{\partial f_m}{\partial x_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots m),$$

wofür wir wegen (1) und (2) schreiben können:

$$(3) \qquad \frac{\partial z_l}{\partial x_i} = \frac{\partial z_l}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x_i} + \frac{\partial z_l}{\partial y_2}\frac{\partial y_2}{\partial x_i} + \cdots + \frac{\partial z_l}{\partial y_m}\frac{\partial y_m}{\partial x_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots m)$$

Wir wollen nun das *Produkt* der beiden Funktionaldeterminanten

$$\begin{pmatrix} z_1 & z_2 \ldots & z_m \\ y_1 & y_2 \ldots & y_m \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \ldots & y_m \\ x_1 & x_2 \ldots & x_m \end{pmatrix}$$

bilden. Dies kann nach dem bekannten Satze über die Multiplikation von Determinanten so geschehen, daß wir als i^{tes} Glied der l^{ten} Zeile das Produkt annehmen, das hervorgeht, wenn wir die Glieder der l^{ten} *Zeile* der ersten Determinante mit den Gliedern der i^{ten} *Reihe* der zweiten Determinante multiplizieren. Die dadurch hervorgehende Summe ist gerade der in (3) rechts stehende Ausdruck. Demnach ist:

$$(4) \qquad \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \ldots & z_m \\ y_1 & y_2 \ldots & y_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \ldots & y_m \\ x_1 & x_2 \ldots & x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \ldots & z_m \\ x_1 & x_2 \ldots & x_m \end{pmatrix}.$$

Satz 5: Sind $y_1, y_2, \ldots y_m$ Funktionen von $x_1, x_2, \ldots x_m$ und ferner $z_1, z_2, \ldots z_m$ Funktionen von $y_1, y_2, \ldots y_m$, so daß $z_1, z_2, \ldots z_m$ auch zusammengesetzte Funktionen von $x_1, x_2, \ldots x_m$ werden, so ist das Produkt der Funktionaldeterminante der z hinsichtlich der y und der Funktionaldeterminante der y hinsichtlich der x gleich der Funktionaldeterminante der z hinsichtlich der x.

Dieser Satz ist für den Fall $m = 1$ nichts anderes als der Satz 11 in Nr. 33 über Funktionen von Funktionen. Denn wenn $m = 1$, also

$$z = \varphi(y) \quad \text{und} \quad y = f(x)$$

gegeben ist, so kommt:

$$\frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx}.$$

Wenn ferner $y_1, y_2, \ldots y_m$ insbesondere voneinander *unabhängige* Funktionen

$$(5) \qquad y_k = f_k(x_1, x_2, \ldots x_m) \qquad (k = 1, 2, \ldots m)$$

sind, so lassen sich die Gleichungen (5) nach Satz 1 in Nr. 78 nach $x_1, x_2, \ldots x_m$ auflösen:

$$x_l = \varphi_l(y_1, y_2, \ldots y_m) \qquad (l = 1, 2, \ldots m).$$

Damit sind $x_1, x_2, \ldots x_m$ als Funktionen von $y_1, y_2, \ldots y_m$ dargestellt. Indem wir den in Nr. 10 aufgestellten Begriff verallgemeinern, werden wir diese neuen m Funktionen *die zu* $f_1, f_2, \ldots f_m$ *inversen Funktionen* nennen. Da nun

$$x_l = \varphi_l(y_1, y_2, \ldots y_m), \quad y_k = f_k(x_1, x_2, \ldots x_m)$$

ist, so liegt ein spezieller Fall zu den obigen Annahmen (1) und (2) vor, in denen nunmehr $z_1, z_2, \ldots z_m$ durch $x_1, x_2, \ldots x_m$ zu ersetzen sind. Aus (4) folgt also, weil die Funktionaldeterminante von $x_1, x_2, \ldots x_m$ hinsichtlich $x_1, x_2, \ldots x_m$ selbst gleich Eins ist:

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_m \\ y_1 & y_2 & \ldots & y_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \ldots & y_m \\ x_1 & x_2 & \ldots & x_m \end{pmatrix} = 1,$$

daher

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_m \\ y_1 & y_2 & \ldots & y_m \end{pmatrix} = \frac{1}{\begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \ldots & y_m \\ x_1 & x_2 & \ldots & x_m \end{pmatrix}}.$$

Satz 6: Die Funktionaldeterminante der zu m unabhängigen Funktionen von m Veränderlichen gehörigen inversen Funktionen ist gleich dem reziproken Werte der Funktionaldeterminante der ursprünglichen Funktionen.

Im Falle $m = 1$, wo also eine Funktion $y = f(x)$ von einer Veränderlichen x vorliegt, gibt die Auflösung $x = \varphi(y)$ die zu y inverse Funktion in dem früheren, beschränkteren Sinne. Man sieht also, daß Satz 6 die natürliche Verallgemeinerung des Satzes 18 in Nr. 37 vorstellt, wonach

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$$

ist.

Beispiel: Sind x, y rechtwinklige Punktkoordinaten in der Ebene und ϱ, ω die zugehörigen *Polarkoordinaten,* ist also:

$$\varrho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \omega = \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x},$$

so stellen ϱ und ω solche Funktionen von x und y vor, deren Funktionaldeterminante den von Null verschiedenen Wert hat:

$$\begin{pmatrix} \varrho & \omega \\ x & y \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ -\frac{y}{x^2+y^2} & \frac{x}{x^2+y^2} \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{1}{\varrho}.$$

Also sind ϱ und ω voneinander unabhängige Funktionen von x und y. Die zu ihnen inversen Funktionen sind die Funktionen

$$x = \varrho \cos \omega, \quad y = \varrho \sin \omega$$

von ϱ und ω. Ihre Funktionaldeterminante ist:

$$\begin{pmatrix} x & y \\ \varrho & \omega \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \omega & -\varrho \sin \omega \\ \sin \omega & \varrho \cos \omega \end{vmatrix} = \varrho.$$

§ 2. Differentiation unentwickelter Funktionen.

82. Differentialquotienten einer unentwickelten Funktion von einer Veränderlichen. Ist y als Funktion von x implizite gegeben durch die Gleichung:

$$f(x, y) = 0,$$

und verstehen wir unter y die hierdurch definierte Funktion von x, so ist f eine *zusammengesetzte* Funktion von x allein, die für alle Werte von x (innerhalb des Variabilitätsbereiches) gleich Null ist, so daß also bei dieser Auffassung auch alle Differentialquotienten von f gleich Null sind. Es liegt dann ein spezieller Fall zu Nr. 69 vor, indem hier y die Rolle der dort mit v bezeichneten Funktion spielt. Es ergibt sich daher durch wiederholte *vollständige* Differentiation nach x:

$$f_x + f_y y' = 0,$$

$$f_{xx} + 2 f_{xy} y' + f_{yy} y'^2 + f_y y'' = 0,$$

$$f_{xxx} + 3 f_{xxy} y' + 3 f_{xyy} y'^2 + f_{yyy} y'^3 + 3 (f_{xy} + f_{yy} y') y'' + f_y y''' = 0$$

usw. Die erste Formel hatten wir in Nr. 54 unter (2) aufgestellt. Aus ihr läßt sich y' berechnen, wenn $f_y \neq 0$ ist, darauf aus der zweiten y'' unter derselben Bedingung, alsdann aus der dritten y''' ebenfalls unter dieser Bedingung usw.

83. Differentialquotienten von mehreren unentwickelten Funktionen von einer Veränderlichen. Allgemeiner liege jetzt ein System von m Gleichungen zwischen den $m+1$ Veränderlichen $x, y_1, y_2, \ldots y_m$ vor:

$$(1)\qquad \begin{cases} f_1(x, y_1, y_2, \ldots y_m) = 0, \\ f_2(x, y_1, y_2, \ldots y_m) = 0, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ f_m(x, y_1, y_2, \ldots y_m) = 0. \end{cases}$$

Sind die Funktionen $f_1, f_2, \ldots f_m$ voneinander unabhängig hinsichtlich $y_1, y_2, \ldots y_m$, d. h. ist nach Satz 4 in Nr. 80 die Funktionaldeterminante

$$(2)\qquad \begin{pmatrix} f_1 & f_2 \cdots & f_m \\ y_1 & y_2 \cdots & y_m \end{pmatrix} \neq 0,$$

so können wir nach Satz 3 in Nr. 79 annehmen, daß die Gleichungen (1) die m Größen $y_1, y_2, \ldots y_m$ als Funktionen der einen unabhängigen Veränderlichen x definieren. Wir haben schon in Nr. 58 gezeigt, wie man bei dieser Auffassung ihre ersten Differentialquotienten berechnen kann, nämlich aus den n Gleichungen:

$$(3)\qquad \frac{\partial f_k}{\partial x} + \frac{\partial f_k}{\partial y_1} y_1' + \frac{\partial f_k}{\partial y_2} y_2' + \cdots + \frac{\partial f_k}{\partial y_m} y_m' = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots m),$$

die in der Tat unter der Bedingung (2) als *lineare* Gleichungen in $y_1', y_2', \ldots y_m'$ nach den gesuchten Differentialquotienten $y_1', y_2', \ldots y_m'$ auflösbar sind.

In (3) sind die linken Seiten Funktionen von

$$x, y_1, y_2, \ldots y_m, \quad y_1', y_2', \ldots y_m'.$$

Da $y_1, y_2, \ldots y_m$ Funktionen von x bedeuten, also auch y_1', $y_2', \ldots y_m'$, so sind die linken Seiten von (3) *zusammengesetzte* Funktionen von x, die laut (3) gleich Null sind für alle Werte von x (innerhalb des Variabilitätsbereiches). Also müssen auch diejenigen Funktionen gleich Null sein, die durch wiederholte Differentiation nach x aus den linken Seiten der Gleichungen (3) hervorgehen. Doch müssen wir dabei *vollständig*, nicht partiell, nach x differenzieren, d. h. beständig im Auge behalten, daß $y_1, y_2, \ldots y_m$ und $y_1', y_2', \ldots y_m'$ ebenfalls Funktionen von x

sind, die differenziert $y_1', y_2', \ldots y_m'$ und $y_1'', y_2'', \ldots y_m''$ ergeben. Einmalige Differentiation gibt also:

$$
(4)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 f_k}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f_k}{\partial x \partial y_1} y_1' + \cdots + \frac{\partial^2 f_k}{\partial x \partial y_m} y_m' \\
&+ \left(\frac{\partial^2 f_k}{\partial x \partial y_1} + \frac{\partial^2 f_k}{\partial y_1^2} y_1' + \frac{\partial^2 f_k}{\partial y_1 \partial y_2} y_2' + \cdots + \frac{\partial^2 f_k}{\partial y_1 \partial y_m} y_m'\right) y_1' \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&+ \left(\frac{\partial^2 f_k}{\partial x \partial y_m} + \frac{\partial^2 f_k}{\partial y_m \partial y_1} y_1' + \frac{\partial^2 f_k}{\partial y_m \partial y_2} y_2' + \cdots + \frac{\partial^2 f_k}{\partial y_m^2} y_m'\right) y_m' \\
&+ \frac{\partial f_k}{\partial y_1} y_1'' + \frac{\partial f_k}{\partial y_2} y_2'' + \cdots + \frac{\partial f_k}{\partial y_m} y_m'' = 0 \\
&\qquad\qquad (k = 1, 2, \ldots m).
\end{aligned}
\right.
$$

Man bemerkt, daß dies m in $y_1'', y_2'', \ldots y_m''$ *lineare* Gleichungen sind, deren Determinante die Funktionaldeterminante (2) ist Da sie nicht verschwindet, kann man hieraus $y_1'', y_2'', \ldots y_m''$ berechnen.

Abermalige *vollständige* Differentiation der m Gleichungen (4) nach x gibt noch umständlichere Gleichungen, von denen wir nur diejenigen Glieder angeben, die $y_1''', y_2''', \ldots y_m'''$ enthalten:

$$
\cdots + \frac{\partial f_k}{\partial y_1} y_1''' + \frac{\partial f_k}{\partial y_2} y_2''' + \cdots + \frac{\partial f_k}{\partial y_m} y_m''' = 0
$$
$$
(k = 1, 2, \ldots m).
$$

Sie sind in $y_1''', y_2''', \ldots y_m'''$ *linear* und wegen (2) nach diesen Ableitungen auflösbar, usw.

84. Partielle Differentialquotienten unentwickelter Funktionen von mehreren Veränderlichen. Noch allgemeiner sei jetzt ein System von m Gleichungen in $n + m$ Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots x_n, y_1, y_2, \ldots y_m$ gegeben:

$$
(1)\qquad f_k(x_1, x_2, \ldots x_n, y_1, y_2, \ldots y_m) = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots m).
$$

Wenn die m Funktionen $f_1, f_2, \ldots f_m$ unabhängig voneinander hinsichtlich $y_1, y_2, \ldots y_m$ sind, d. h. wenn nach Satz 4 in Nr. 80 die Funktionaldeterminante

$$
(2)\qquad \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & \cdots & f_m \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_m \end{pmatrix} \neq 0
$$

ist, so können wir nach Satz 3 in Nr. 79 annehmen, daß die

Gleichungen (1) die m Größen $y_1, y_2, \ldots y_m$ als Funktionen der n unabhängigen Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots x_n$ definieren. Sobald wir nun in (1) unter $y_1, y_2, \ldots y_m$ diese Funktionen von $x_1, x_2, \ldots x_n$ verstehen, sind die linken Seiten der Gleichungen (1) *zusammengesetzte* Funktionen von $x_1, x_2, \ldots x_n$, die für alle Werte von $x_1, x_2, \ldots x_n$ (innerhalb ihres Variabilitätsbereiches) gleich Null sind, so daß auch ihre Ableitungen erster Ordnung nach $x_1, x_2, \ldots x_n$ verschwinden. Bei der Berechnung der Ableitungen muß man aber im Auge behalten, daß $y_1, y_2, \ldots y_m$ bei dieser Auffassung auch $x_1, x_2, \ldots x_n$ enthalten. Die Differentiation nach x_i gibt daher die m Gleichungen:

$$(3) \qquad \frac{\partial f_k}{\partial x_i} + \frac{\partial f_k}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x_i} + \frac{\partial f_k}{\partial y_2}\frac{\partial y_2}{\partial x_i} + \cdots + \frac{\partial f_k}{\partial y_m}\frac{\partial y_m}{\partial x_i} = 0$$

$$(k = 1, 2, \ldots m).$$

Sie sind *linear* in

$$(4) \qquad \frac{\partial y_1}{\partial x_i}, \quad \frac{\partial y_2}{\partial x_i}, \ldots \frac{\partial y_m}{\partial x_i},$$

und ihre Determinante hinsichtlich dieser m Größen ist die Funktionaldeterminante (2), so daß sich die partiellen Ableitungen von $y_1, y_2, \ldots y_m$ nach x_i aus ihnen berechnen lassen.

Differenzieren wir die m Gleichungen (3) nach x_l, indem wir bedenken, daß x_l auch in $y_1, y_2, \ldots y_m$ und in den m Ableitungen (4) vorkommt, so ergibt sich weiterhin:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 f_k}{\partial x_i \partial x_l} + \frac{\partial^2 f_k}{\partial x_l \partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x_i} + \cdots + \frac{\partial^2 f_k}{\partial x_l \partial y_m}\frac{\partial y_m}{\partial x_i} \\
&+ \frac{\partial^2 f_k}{\partial x_i \partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x_l} + \frac{\partial^2 f_k}{\partial x_i \partial y_2}\frac{\partial y_2}{\partial x_l} + \cdots + \frac{\partial^2 f_k}{\partial x_i \partial y_m}\frac{\partial y_m}{\partial x_l} \\
&+ \left(\frac{\partial^2 f_k}{\partial y_1^2}\frac{\partial y_1}{\partial x_l} + \frac{\partial^2 f_k}{\partial y_1 \partial y_2}\frac{\partial y_2}{\partial x_l} + \cdots + \frac{\partial^2 f_k}{\partial y_1 \partial y_m}\frac{\partial y_m}{\partial x_l}\right)\frac{\partial y_1}{\partial x_i} \\
&\quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&+ \left(\frac{\partial^2 f_k}{\partial y_m \partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x_l} + \frac{\partial^2 f_k}{\partial y_m \partial y_2}\frac{\partial y_2}{\partial x_l} + \cdots + \frac{\partial^2 f_k}{\partial y_m^2}\frac{\partial y_m}{\partial x_l}\right)\frac{\partial y_m}{\partial x_i} \\
&+ \frac{\partial f_k}{\partial y_1}\frac{\partial^2 y_1}{\partial x_i \partial x_l} + \frac{\partial f_k}{\partial y_2}\frac{\partial^2 y_2}{\partial x_i \partial x_l} + \cdots + \frac{\partial f_k}{\partial y_m}\frac{\partial^2 y_m}{\partial x_i \partial x_l} = 0
\end{aligned}$$

$$(k = 1, 2, \ldots m).$$

Es sind dies m in bezug auf

$$\frac{\partial^2 y_1}{\partial x_i \partial x_l}, \quad \frac{\partial^2 y_2}{\partial x_i \partial x_l}, \ldots \frac{\partial^2 y_m}{\partial x_i \partial x_l}$$

lineare Gleichungen mit der Determinante (2), so daß sich aus ihnen die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung von $y_1, y_2, \ldots y_m$ nach x_i und x_l berechnen lassen, usw.

85. Vollständige Differentiale unentwickelter Funktionen von mehreren Veränderlichen. Wir betrachten denselben allgemeinsten Fall wie in voriger Nummer. Es seien also die m Gleichungen in $x_1, x_2, \ldots x_n, y_1, y_2, \ldots y_m$ vorgelegt:

$$(1) \qquad f_k(x_1, x_2, \ldots x_n, y_1, y_2, \ldots y_m) = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots m),$$

die unter der Voraussetzung

$$(2) \qquad \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & \cdots & f_m \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_m \end{pmatrix} \neq 0$$

die Größen $y_1, y_2, \ldots y_m$ implizite als Funktionen von $x_1, x_2, \ldots x_n$ definieren. Wenn wir unter $y_1, y_2, \ldots y_m$ diese Funktionen von $x_1, x_2, \ldots x_n$ verstehen, so sind $f_1, f_2, \ldots f_m$ gleich Null für alle $x_1, x_2, \ldots x_n$ (innerhalb ihres Variabilitätsbereiches), so daß auch ihre *vollständigen Differentiale* nach Satz 8 in Nr. 74 verschwinden. So kommt zunächst:

$$(3) \qquad \frac{\partial f_k}{\partial x_1} dx_1 + \cdots + \frac{\partial f_k}{\partial x_n} dx_n + \frac{\partial f_k}{\partial y_1} dy_1 + \cdots + \frac{\partial f_k}{\partial y_m} dy_m = 0$$
$$(k = 1, 2, \ldots m).$$

Diese m Gleichungen sind linear in bezug auf $dy_1, dy_2, \ldots dy_m$, und zwar haben sie in bezug auf diese m Größen die von Null verschiedene Determinante (2), so daß ihre Auflösung die gesuchten vollständigen Differentiale erster Ordnung $dy_1, dy_2, \ldots dy_m$ liefert.

In (3) stehen links Funktionen von

$$x_1, x_2, \ldots x_n, \quad y_1, y_2, \ldots y_m, \quad dy_1, dy_2, \ldots dy_m,$$

die außerdem die als willkürliche Konstanten zu betrachtenden Differentiale $dx_1, dx_2, \ldots dx_n$ der unabhängigen Veränderlichen enthalten.

Verstehen wir unter $y_1, y_2, \ldots y_m$ die durch (1) definierten Funktionen von $x_1, x_2, \ldots x_n$ und unter $dy_1, dy_2, \ldots dy_m$ die aus (3) zu berechnenden Funktionen von $x_1, x_2, \ldots x_n$ und $y_1, y_2, \ldots y_m$, so sind die linken Seiten der Gleichungen (3) *zusammengesetzte* Funktionen von $x_1, x_2, \ldots x_n$, die nach (3) für alle Werte von $x_1, x_2, \ldots x_n$ (innerhalb des Variabilitätsbereiches) gleich Null sind und deren vollständige Differentiale also nach Satz 8 in Nr. 74 verschwinden. Um diese vollständigen Differentiale aufzustellen, differenziert man nach jedem x_i und multipliziert mit dx_i, ferner differenziert man nach jedem y_l und multipliziert mit dy_l, außerdem differenziert man nach jedem dy_l und multipliziert mit d^2y_l. Aus allen so hervorgehenden Ausdrücken ist die Summe zu bilden. So kommt:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 f_k}{\partial x_1^2} dx_1^2 + 2\frac{\partial^2 f_k}{\partial x_1 \partial x_2} dx_1 dx_2 + \cdots + \frac{\partial^2 f_k}{\partial x_n^2} dx_n^2 \\
&+ 2\left(\frac{\partial^2 f_k}{\partial x_1 \partial y_1} dx_1 dy_1 + \frac{\partial^2 f_k}{\partial x_2 \partial y_1} dx_2 dy_1 + \cdots + \frac{\partial^2 f_k}{\partial x_n \partial y_m} dx_n dy_m\right) \\
&+ \frac{\partial^2 f_k}{\partial y_1^2} dy_1^2 + 2\frac{\partial^2 f_k}{\partial y_1 \partial y_2} dy_1 dy_2 + \cdots + \frac{\partial^2 f_k}{\partial y_m^2} dy_m^2 \\
&+ \frac{\partial f_k}{\partial y_1} d^2 y_1 + \frac{\partial f_k}{\partial y_2} d^2 y_2 + \cdots + \frac{\partial f_k}{\partial y_m} d^2 y_m = 0 \\
&\qquad\qquad (k = 1, 2, \ldots m).
\end{aligned}$$

Dies sind m in $d^2y_1, d^2y_2, \ldots d^2y_m$ *lineare* Gleichungen mit der Determinante (2), so daß sich die vollständigen Differentiale zweiter Ordnung von $y_1, y_2, \ldots y_m$ aus ihnen berechnen lassen. Entsprechend gehen die vollständigen Differentiale höherer Ordnung hervor.

Man kann aber auch folgenden Weg einschlagen: Zuerst stellt man, indem man bedenkt, daß y_l eine Funktion von $x_1, x_2, \ldots x_n$ ist, das gesuchte vollständige Differential r^{ter} Ordnung $d^r y_l$ von y_l nach Satz 13 in Nr. 76 als eine Summe dar, in der die partiellen Ableitungen von y_l nach $x_1, x_2, \ldots x_n$ auftreten. Hierin setzt man dann die nach Nr. 84 zu berechnenden Werte dieser Ableitungen ein.

Beispiel: Es sei z als Funktion von x und y definiert durch die Gleichung:

(4) $$f(x, y, z) = 0.$$

Man pflegt die partiellen Ableitungen erster Ordnung von z mit p und q, die zweiter Ordnung mit r, s, t zu bezeichnen:

(5) $$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = p, \quad \dfrac{\partial z}{\partial y} = q, \\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = r, \quad \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = s, \quad \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = t. \end{cases}$$

Es ist dann:

(6) $$\begin{cases} dz = p dx + q dy, \\ d^2 z = r dx^2 + 2 s dx dy + t dy^2, \end{cases}$$

anch Satz 13 in Nr. 76. Nun sind p und q ebenfalls Funktionen von x und y, und wegen ihrer in (5) angegebenen Bedeutung lauten ihre vollständigen Differentiale so:

(7) $$\begin{cases} dp = \dfrac{\partial p}{\partial x} dx + \dfrac{\partial p}{\partial y} dy = r dx + s dy, \\ dq = \dfrac{\partial q}{\partial x} dx + \dfrac{\partial q}{\partial y} dy = s dx + t dy. \end{cases}$$

Um die Werte der vollständigen Differentiale (6) aus (4) zu finden, müssen wir zunächst p und q ermitteln und differenzieren deshalb die Gleichung (4) partiell nach x bzw. y, indem wir z als Funktion von x und y auffassen:

(8) $$f_x + f_z p = 0, \quad f_y + f_z q = 0.$$

Hieraus folgt:

$$p = -\frac{f_x}{f_z}, \quad q = -\frac{f_y}{f_z}.$$

Um r, s, t zu ermitteln, differenzieren wir (8) partiell nach x bzw. y, indem wir z, p und q als Funktionen von x und y auffassen. So gehen zunächst *vier* Gleichungen hervor:

(9) $$\begin{cases} f_{xx} + f_{xz} p + f_{zx} p + f_{zz} p^2 + f_z r = 0, \\ f_{xy} + f_{xz} q + f_{zy} p + f_{zz} pq + f_z s = 0, \\ f_{yx} + f_{yz} p + f_{zx} q + f_{zz} qp + f_z s = 0, \\ f_{yy} + f_{yz} q + f_{zy} q + f_{zz} q^2 + f_z t = 0, \end{cases}$$

und zwar die beiden ersten aus der ersten Gleichung (8), die beiden letzten aus der zweiten Gleichung (8). Die zweite und dritte Gleichung sind aber miteinander identisch, da $f_{xy} = f_{yx}$ usw. ist. Wir können also hieraus r, s, t berechnen.

Zur Erläuterung nehmen wir als Gleichung (4) diese an:

$$x^2 + y^2 + z^2 - a^2 = 0.$$

Hier lauten die Gleichungen (8) und (9):

$$x + zp = 0, \quad y + zq = 0;$$

$$1 + p^2 + zr = 0, \quad pq + zs = 0, \quad 1 + q^2 + zt = 0,$$

so daß kommt:

$$p = -\frac{x}{z}, \quad q = -\frac{y}{z},$$

$$r = -\frac{x^2 + z^2}{z^3}, \quad s = -\frac{xy}{z^3}, \quad t = -\frac{y^2 + z^2}{z^3}.$$

§ 3. Die Elimination willkürlicher Konstanten.

86. Elimination einer willkürlichen Konstanten aus einer Gleichung. Es sei y als Funktion von x definiert durch die Gleichung:

$$(1) \qquad f(x, y, c) = 0,$$

die noch eine *willkürliche* Konstante c enthält, so daß sie für jeden Wert von c (wenigstens innerhalb eines gewissen Wertbereiches) eine besondere Funktion y von x definiert. Die Differentiation der Gleichung liefert:

$$(2) \qquad f_x + f_y \frac{dy}{dx} = 0.$$

Kann man nun die Konstante c aus den beiden Gleichungen (1) und (2) entfernen, so geht eine Gleichung:

$$(3) \qquad F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0$$

zwischen der unabhängigen Veränderlichen x, der Funktion y und ihrer Ableitung $dy : dx$ hervor. Diese Gleichung ist ganz unabhängig von dem für die Konstante c gewählten Werte, so daß sie richtig ist für *alle* durch (1) definierten Funktionen y von x.

Man nennt (3) eine *gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung* und (1) die zugehörige *ursprüngliche Gleichung.*

Deutet man x und y als rechtwinklige Punktkoordinaten in der Ebene, so stellt die Gleichung (1) für jeden Wert von c eine Kurve, also insgesamt eine *Kurvenschar* dar.

Die Gleichung (3) drückt alsdann eine Eigenschaft aus, die *allen* Kurven der Schar zukommt, und zwar eine Eigenschaft der *Tangente.*

1. Beispiel: Ist als Gleichung (1)

$$y^2 - 2px - c = 0$$

vorgelegt, d. h. die Gleichung einer Schar von *kongruenten Parabeln,* deren Achse die x-Achse ist, so geht die Gleichung (2)

$$y\frac{dy}{dx} - p = 0$$

hervor, die schon von c frei ist, demnach schon die zugehörige Differentialgleichung (3) vorstellt. Nach dem 1. Beispiele in Nr. 40 besagt sie, daß alle jene Parabeln eine Subnormale von derselben Länge p haben.

2. Beispiel: Die Gleichung:

$$\frac{x^2}{c^2} + \frac{y^2}{c^2 - m^2} = 1$$

stellt für jeden Wert der Konstante c einen Kegelschnitt dar, dessen Brennpunkte F und F' auf der x-Achse liegen und die Abszissen $\pm m$ haben. Siehe Fig. 22. Um eine allen diesen *konfokalen Kegelschnitten* gemeinsame Eigenschaft abzuleiten, bilden wir die Gleichung (2) durch Differentiation:

$$\frac{x}{c^2} + \frac{y}{c^2 - m^2}\frac{dy}{dx} = 0.$$

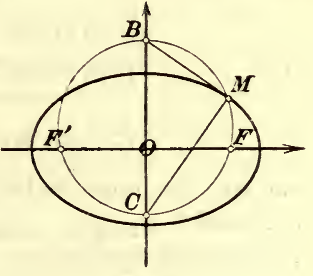


Fig. 22.

Setzen wir den hieraus zu entnehmenden Wert

$$c^2 = \frac{m^2 x}{x + yy'}$$

in die gegebene Gleichung ein, so kommt:

$$(xy' - y)\left(y + \frac{x}{y'}\right) = m^2.$$

Dies ist hier die Differentialgleichung (3). Um ihre geometrische Bedeutung zu ermitteln, verstehen wir unter B und C die Schnittpunkte der Tangente und Normale eines Kurvenpunktes M mit der y-Achse. Da die Tangente und

Normale in den laufenden Koordinaten $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ die Gleichungen haben:

$$\mathfrak{y} - y = y'(\mathfrak{x} - x) \quad \text{und} \quad \mathfrak{y} - y = -\frac{1}{y'}(\mathfrak{x} - x),$$

so ergibt sich für $\mathfrak{x} = 0$:

$$OB = y - xy', \quad OC = y + \frac{x}{y'},$$

so daß die Differentialgleichung besagt:

$$OB \cdot OC = -m^2.$$

Das Minuszeichen lehrt, daß B und C auf verschiedenen Seiten von O liegen. Da auch $OF \cdot OF' = -m^2$ ist, so ist die geometrische Deutung diese: Der Kreis durch die Brennpunkte F und F' und einen Kurvenpunkt M trifft die Nebenachse des Kegelschnittes in Punkten B und C der Tangente und Normale von M, und dies gilt für *alle* konfokalen Kegelschnitte.

87. Elimination von m willkürlichen Konstanten aus m Gleichungen. Liegt ein System von m Gleichungen in $m+1$ Veränderlichen $x, y_1, y_2, \ldots y_m$ vor, das m willkürliche Konstanten $c_1, c_2, \ldots c_m$ enthält:

$$(1) \qquad \begin{cases} f_1(x, y_1, y_2, \ldots y_m, c_1, c_2, \ldots c_m) = 0, \\ f_2(x, y_1, y_2, \ldots y_m, c_1, c_2, \ldots c_m) = 0, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ f_m(x, y_1, y_2, \ldots y_m, c_1, c_2, \ldots c_m) = 0, \end{cases}$$

und sind die linken Seiten voneinander unabhängige Funktionen hinsichtlich $y_1, y_2, \ldots y_m$, d. h. ist nach Satz 4 in Nr. 80 die Funktionaldeterminante:

$$(2) \qquad \left(\frac{f_1\, f_2 \cdots f_m}{y_1\, y_2 \cdots y_m}\right) \neq 0,$$

so definieren die Gleichungen (1) die m Größen $y_1, y_2, \ldots y_m$ als Funktionen der unabhängigen Veränderlichen x, nach Satz 3 in Nr. 79. Diese Funktionen enthalten noch die m willkürlichen Konstanten $c_1, c_2, \ldots c_m$, werden also andere bei anderer Wahl der Konstanten. Durch vollständige Differentiation der m Gleichungen (1) nach x ergeben sich m neue Gleichungen:

$$(3)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial f_1}{\partial x} + \dfrac{\partial f_1}{\partial y_1} y_1' + \dfrac{\partial f_1}{\partial y_2} y_2' + \cdots + \dfrac{\partial f_1}{\partial y_m} y_m' = 0, \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x} + \dfrac{\partial f_2}{\partial y_1} y_1' + \dfrac{\partial f_2}{\partial y_2} y_2' + \cdots + \dfrac{\partial f_2}{\partial y_m} y_m' = 0, \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x} + \dfrac{\partial f_m}{\partial y_1} y_1' + \dfrac{\partial f_m}{\partial y_2} y_2' + \cdots + \dfrac{\partial f_m}{\partial y_m} y_m' = 0. \end{cases}$$

Sind die $2m$ Gleichungen (1) und (3) so beschaffen, daß sich die m Konstanten $c_1, c_2, \ldots c_m$ daraus eliminieren lassen, so geht ein System von Gleichungen in $x, y_1, y_2, \ldots y_m, y_1', y_2', \ldots y_m'$ hervor. Sobald die m Funktionen $f_1, f_2, \ldots f_m$ hinsichtlich $c_1, c_2, \ldots c_m$ voneinander unabhängig sind, können wir uns die Elimination so ausgeführt denken: Wir berechnen $c_1, c_2, \ldots c_m$ aus (1) (vgl. Satz 3 in Nr. 79) und setzen die Werte in (3) ein. Die Gleichungen (3) sind hinsichtlich y_1', $y_2', \ldots y_m'$ voneinander unabhängig, wenn die Determinante (2) von Null verschieden ist. Sobald also durch Einsetzen jener Werte von $c_1, c_2, \ldots c_m$ die Funktionaldeterminante (2) nicht gleich Null wird, gehen insgesamt gerade m voneinander hinsichtlich $y_1', y_2', \ldots y_m'$ unabhängige Gleichungen hervor von der Form:

$$F_k(x, y_1, y_2, \ldots, y_m, y_1', y_2', \ldots y_m') = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots m).$$

Man nennt sie *ein System von m gleichzeitigen oder simultanen gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung mit m abhängigen Veränderlichen $y_1, y_2, \ldots y_m$*. Dies System drückt Eigenschaften aus, die *allen* durch (1) definierten Funktionen $y_1, y_2, \ldots y_m$ von x zukommen, welche Werte auch die willkürlichen Konstanten $c_1, c_2, \ldots c_m$ haben mögen.

88. Elimination von m willkürlichen Konstanten aus einer Gleichung. Wenn die Gleichung zwischen x und y

$$(1)\qquad f(x, y, c_1, c_2, \ldots c_m) = 0$$

m willkürliche Konstanten $c_1, c_2, \ldots c_m$ enthält, so definiert sie lauter Funktionen y von x, die für verschiedene Werte, die man dem Systeme der Konstanten $c_1, c_2, \ldots c_m$ beilegen kann, verschiedenartig sein werden. Auch hier kann man die Konstanten durch Heranziehen der differenzierten Gleichungen eliminieren, nur muß man, sobald $m > 1$ ist, — andernfalls

läge der Fall von Nr. 86 vor —, mehrere Male nach x differenzieren. Nach Nr. 82 bilden wir so viele Gleichungen:

$$(2)\qquad \begin{cases} f_x + f_y y' = 0, \\ f_{xx} + 2 f_{xy} y' + f_{yy} y'^2 + f_y y'' = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots, \end{cases}$$

bis wir in ihnen zusammen mit (1) hinreichend viele Gleichungen vor uns haben, aus denen sich $c_1, c_2, \dots c_m$ eliminieren lassen. Dazu braucht man höchstens m-mal zu differenzieren, denn jede neue Gleichung ist unabhängig von der vorhergehenden, da sie immer einen höheren Differentialquotienten von y enthält. Die Elimination von $c_1, c_2, \dots c_m$ aus den höchstens $m + 1$ Gleichungen (1) und (2) gibt eine Gleichung von der Form:

$$(3)\qquad F(x, y, y', y'', \dots y^{(n)}) = 0,$$

wo n höchstens gleich m ist. Sie heißt eine *gewöhnliche Differentialgleichung n^{ter} Ordnung mit einer abhängigen Veränderlichen* und drückt eine Eigenschaft aus, die *allen* durch (1) definierten Funktionen y von x zukommt.

Übrigens können wir dies Eliminationsproblem auf das in voriger Nummer besprochene zurückführen. Wenn wir nämlich $y', y'', \dots y^{(n-1)}$ als Funktionen von x mit $z_1, z_2, \dots z_{n-1}$ bezeichnen, so haben wir statt der einen Gleichung (1) die n Gleichungen:

$$(4)\qquad \begin{cases} f(x, y, c_1, c_2, \dots c_m) = 0, \\ z_1 = y', \\ z_2 = y'', \\ \dots\dots \\ z_{n-1} = y^{(n-1)}, \end{cases}$$

worin $y', y'', \dots y^{(n-1)}$ die Differentialquotienten der durch die erste Gleichung definierten Funktion y von x und daher Funktionen von x und $c_1, c_2, \dots c_m$ sind. Es liegen also n Gleichungen zwischen den $n + 1$ Veränderlichen $x, y, z_1, \dots z_{n-1}$ vor, die außerdem willkürliche Konstanten $c_1, c_2, \dots c_m$ enthalten. In Nr. 87 lag Entsprechendes vor, nur waren dort die abhängigen Veränderlichen mit $y_1, y_2, \dots y_m$ bezeichnet. Wenn wir mithin so wie dort vorgehen, d. h. die Gleichungen (4)

differenzieren und darauf $c_1, c_2, \ldots c_m$ eliminieren, so wird sich eine Gleichung zwischen

$$x, y, z_1, z_2 \ldots z_{n-1} \quad \text{und} \quad y', z_1', z_2', \ldots z'_{n-1}$$

ergeben. Aber $z_1, z_2, \ldots z_{n-1}$ bedeuten nach Definition nichts anderes als $y', y'', \ldots y^{(n-1)}$ und daher $z_1', z_2', \ldots z'_{n-1}$ nichts anderes als $y'', y''', \ldots y^{(n)}$, so daß die hervorgehende Gleichung eine Gleichung in $x, y, y', y'', \ldots y^{(n)}$ ist, nämlich die obige Gleichung (3).

§ 4. Die Elimination willkürlicher Funktionen.

89. Lineare partielle Differentialgleichung erster Ordnung für eine Funktion von zwei Veränderlichen. Eine Verallgemeinerung der Betrachtungen des vorigen Paragraphen geht hervor, wenn wir uns die Aufgabe stellen, nicht mehr eine auftretende willkürliche Konstante, sondern vielmehr eine auftretende *willkürliche Funktion* dadurch zu entfernen, daß wir durch Differentiation genügend viele Gleichungen bilden, aus denen sie eliminiert werden kann. Ein ziemlich einfacher Fall ist dieser:

Es sollen u uud v zwei *bestimmt gegebene* Funktionen von drei Veränderlichen x, y und z sein. Dagegen bedeute $\Phi(u, v)$ eine *willkürliche* Funktion von u und v. Wenn wir nun die Gleichung vorschreiben:

$$\Phi(u, v) = 0, \tag{1}$$

so enthält sie x, y und z und bestimmt, wenn sie nicht frei von z ist, die Veränderliche z als Funktion der beiden unabhängigen Veränderlichen x und y. Aber da die Funktion Φ beliebig wählbar bleiben soll, so definiert (1) nicht eine, sondern unzählig viele Funktionen z von x und y. Wir fragen uns, ob wir eine allen diesen Funktionen z von x und y gemeinsame, also von der speziellen Wahl von Φ unabhängige Eigenschaft ermitteln können.

Dies geschieht so: Die Gleichung (1) besagt nur das Eine, daß u und v voneinander abhängige Funktionen sein sollen, und da z als Funktion von x und y aufgefaßt werden soll, so besagt sie, daß u und v voneinander abhängig hinsichtlich x

und y sein sollen, sobald darin z als Funktion von x und y betrachtet wird. Nach Satz 4 in Nr. 80 ist dazu notwendig und hinreichend, daß die Funktionaldeterminante

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

sei. Dabei ist aber die Bedeutung der Ableitungen von u und v, weil x und y in z vorkommen, wohlbemerkt diese:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = u_x + u_z p, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = u_y + u_z q,$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = v_x + v_z p, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = v_y + v_z q,$$

wenn wir wie in dem Beispiele zu Nr. 85 die partiellen Ableitungen erster Ordnung von z nach x und y mit p und q bezeichnen. Also ergibt sich:

$$(u_x + u_z p)(v_y + v_z q) - (u_y + u_z q)(v_x + v_z p) = 0$$

oder ausmultipliziert:

$$u_x v_y - u_y v_x + (u_z v_y - u_y v_z)p + (u_x v_z - u_z v_x)q = 0$$

oder auch:

$$\begin{vmatrix} p & q & -1 \\ u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} = 0.$$

Wie man sieht, ist dies eine Gleichung, die x, y und z und außerdem die partiellen Ableitungen erster Ordnung $\partial z : \partial x$ und $\partial z : \partial y$, nämlich p und q, und zwar die beiden letzteren *linear*, enthält. Eine Gleichung in x, y, z und den beiden Ableitungen $\partial z : \partial x$ und $\partial z : \partial y$ heißt *eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung für die Funktion z der beiden unabhängigen Veränderlichen x, y.* Da die Ableitungen linear auftreten, liegt hier insbesondere eine *lineare* partielle Differentialgleichung erster Ordnung vor.

Satz 7: Sind u und v gegebene Funktionen von x, y und z, so genügt die Gesamtheit derjenigen Funktionen z von x und y, die durch irgend eine Gleichung $\Phi(u, v) = 0$ in u und v definiert werden können, was für eine Funktion von u und v auch

Φ sein mag, der linearen partiellen Differentialgleichung erster Ordnung:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial y} & -1 \\ u_x & u_y & u_z \\ v_z & v_y & v_z \end{vmatrix} = 0.$$

90. Lineare partielle Differentialgleichung erster Ordnung für eine Funktion von n Veränderlichen. Die vorhergehende Betrachtung läßt sich ohne Mühe verallgemeinern Es seien $u_1, u_2, \ldots u_n$ insgesamt n *gegebene* Funktionen von $n+1$ Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots x_n$ und z. Wir schreiben vor, daß *irgend eine* Gleichung zwischen $u_1, u_2, \ldots u_n$ bestehen soll:

(1) $$\Phi(u_1, u_2, \ldots u_n) = 0,$$

wodurch dann, wenn sie nicht zufällig von z frei ist, die Veränderliche z als Funktion von n unabhängigen Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots x_n$ definiert wird. So werden unzählig viele Funktionen z von $x_1, x_2, \ldots x_n$ gegeben, da die Funktion Φ beliebig gewählt werden kann. Wir suchen eine Eigenschaft, die *allen* diesen Funktionen z von $x_1, x_2, \ldots x_n$ zukommt.

Die Gleichung (1) besagt, daß für die durch (1) definierte Funktion z von $x_1, x_2, \ldots x_n$ die n Funktionen $u_1, u_2, \ldots u_n$ voneinander abhängige Funktionen von $x_1, x_2, \ldots x_n$ werden, so daß nach Satz 4 in Nr. 80 ihre Funktionaldeterminante

$$\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & \ldots & u_n \\ x_1 & x_2 & \ldots & x_u \end{pmatrix} = 0$$

sein muß. Dabei hat aber, da allgemein u_i die Veränderliche x_k einmal für sich und dann noch in z enthält, die Ableitung von u_i nach x_k den Wert:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_i}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x_k}.$$

Bezeichnen wir die partiellen Ableitungen erster Ordnung von z nach $x_1, x_2, \ldots x_n$ mit $p_1, p_2, \ldots p_n$, setzen wir also:

$$\frac{\partial z}{\partial x_1} = p_1, \quad \frac{\partial z}{\partial x_2} = p_2, \quad \ldots \frac{\partial z}{\partial x_n} = p_n,$$

so ist folglich:

$$(2)\qquad \begin{vmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + p_1 \frac{\partial u_1}{\partial z} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + p_2 \frac{\partial u_1}{\partial z} & \cdots & \frac{\partial u_1}{\partial x_n} + p_n \frac{\partial u_1}{\partial z} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + p_1 \frac{\partial u_2}{\partial z} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + p_2 \frac{\partial u_2}{\partial z} & \cdots & \frac{\partial u_2}{\partial x_n} + p_n \frac{\partial u_2}{\partial z} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial u_n}{\partial x_1} + p_1 \frac{\partial u_n}{\partial z} & \frac{\partial u_n}{\partial x_2} + p_2 \frac{\partial u_n}{\partial z} & \cdots & \frac{\partial u_n}{\partial x_n} + p_n \frac{\partial u_n}{\partial z} \end{vmatrix} = 0.$$

Diese Determinante läßt sich in eine Summe von n-reihigen Determinanten zerlegen, da jede *Reihe* in zwei Reihen zu zerfällen ist. Aber die zweiten Teile aller Reihen sind einander proportional, bestehen nämlich aus den Gliedern

$$(3)\qquad \frac{\partial u_1}{\partial z}, \frac{\partial u_2}{\partial z}, \ldots \frac{\partial u_n}{\partial z},$$

bzw. multipliziert mit $p_1, p_2, \ldots p_n$. Die Zerlegung der Determinante in einzelne liefert also viele Determinanten, deren Werte gleich Null sind, und es bleiben nur $n+1$ Determinanten übrig. Verstehen wir unter Δ die Determinante:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial u_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial u_2}{\partial x_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial u_n}{\partial x_1} & \frac{\partial u_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial u_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

und unter Δ_i diejenige, die aus ihr hervorgeht, wenn wir die i^{te} *Reihe* durch die Reihe der Glieder (3) ersetzen, so leuchtet ein, daß die Gleichung (2) die Form annimmt:

$$(4)\qquad \Delta + p_1 \Delta_1 + p_2 \Delta_2 + \cdots + p_n \Delta_n = 0.$$

Hierin sind Δ, Δ_1 $\Delta_2, \ldots \Delta_n$ gegebene Funktionen von $x_1, x_2, \ldots x_n$ und z. Die Gleichung (4) enthält außerdem die partiellen Ableitungen *erster* Ordnung von z nach $x_1, x_2, \ldots x_n$, nämlich $p_1, p_2, \ldots p_n$, und zwar *linear*. Sie heißt daher eine *lineare partielle Differentialgleichung erster Ordnung für die Funktion z von n unabhängigen Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots x_n$.*

Satz 8: Sind $u_1, u_2, \ldots u_n$ gegebene Funktionen von $x_1, x_2, \ldots x_n$ und z, so genügt die Gesamtheit derjenigen Funktionen z von $x_1, x_2, \ldots x_n$, die durch irgend eine Gleichung

$$\Phi(u_1, u_2, \ldots u_n) = 0$$

definiert werden können, was für eine Funktion der u auch Φ sein mag, der linearen partiellen Differentialgleichung erster Ordnung:

$$\Delta + \Delta_1 \frac{\partial z}{\partial x_1} + \Delta_2 \frac{\partial z}{\partial x_2} + \cdots + \Delta_n \frac{\partial z}{\partial x_n} = 0,$$

wo Δ die Funktionaldeterminante von $u_1, u_2, \ldots u_n$ hinsichtlich $x_1, x_2, \ldots x_n$ allein bedeutet und Δ_i aus Δ hervorgeht, wenn man in Δ die Glieder

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_i}, \quad \frac{\partial u_2}{\partial x_i}, \ldots \frac{\partial u_n}{\partial x_i}$$

durch

$$\frac{\partial u_1}{\partial z}, \quad \frac{\partial u_2}{\partial z}, \ldots \frac{\partial u_n}{\partial z}$$

ersetzt.

Wir hätten dies Ergebnis auch *ohne Benutzung* des Satzes 4 in Nr. 80 finden können, denn aus $\Phi = 0$ folgt durch vollständige Differentiation nach $x_1, x_2, \ldots x_n$ das System:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u_1}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_i} + \frac{\partial u_1}{\partial z} p_i\right) + \cdots + \frac{\partial \Phi}{\partial u_n}\left(\frac{\partial u_n}{\partial x_i} + \frac{\partial u_n}{\partial z} p_i\right) = 0$$

$$(i = 1, 2, \ldots n),$$

und solche n Gleichungen in n linear auftretenden Größen

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u_1}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial u_2}, \ldots \frac{\partial \Phi}{\partial u_n}$$

können, da ihre rechten Seiten gleich Null sind, bekanntlich nur dann bestehen, wenn ihre Determinante gleich Null ist. So kommen wir zur Gleichung (2), also auch zur Gleichung (4).

91. Homogene Funktionen. Eine Funktion von mehreren Veränderlichen heißt homogen und zwar *homogen vom m^{ten} Grade,* wenn die Multiplikation aller Veränderlichen mit ein und demselben, aber *beliebigen* Faktor t eine Funktion liefert, die gleich der ursprünglichen Funktion, aber multipliziert mit t^m, ist. Die Funktion $z = f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ von x_1, $x_2, \ldots x_n$ heißt also homogen vom m^{ten} Grade, wenn für jeden Wert von t die Gleichung besteht:

$$f(tx_1, tx_2, \ldots tx_n) = t^m f(x_1, x_2, \ldots x_n) = t^m z.$$

Z. B. sind $x_1 + x_2 + \cdots + x_n$ und $x_1 x_2 \ldots x_n$ homogene Funktionen ersten bzw. n^{ten} Grades. Ferner ist $\sqrt{x_1 x_2} + \sqrt{x_3 x_4}$ eine homogene Funktion ersten Grades, dagegen $\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}$

eine homogene Funktion, deren Grad gleich $\frac{1}{2}$ ist, und $x_1 : x_2$ eine vom Grade Null.

Wählt man insbesondere $t = 1 : x_n$, so folgt, daß eine homogene Funktion $z = f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ in der Form:

$$(1) \qquad z = f(x_1, x_2, \cdots x_n) = x_n^m f\left(\frac{x_1}{x_n}, \frac{x_2}{x_n}, \cdots \frac{x_{n-1}}{x_n}, 1\right)$$

dargestellt werden kann, also als *eine Funktion der* $n-1$ *Verhältnisse* $x_1 : x_n$, $x_2 : x_n, \ldots . x_{n-1} : x_n$, *multipliziert mit der* m^{ten} *Potenz von* x_n.

Umgekehrt: Jede Funktion von der Form

$$z = x_n^m F\left(\frac{x_1}{x_n}, \frac{x_2}{x_n}, \cdots \frac{x_{n-1}}{x_n}\right)$$

ist eine homogene Funktion m^{ten} Grades in $x_1, x_2, \ldots x_n$, was für eine Funktion von $x_1 : x_n$, $x_2 : x_n, \ldots x_{n-1} : x_n$ auch F sein mag. Denn wenn wir $x_1, x_2, \ldots x_n$ durch $tx_1, tx_2, \ldots tx_n$ ersetzen, so ändern sich die Brüche $x_1 : x_n$, $x_2 : x_n, \ldots x_{n-1} : x_n$ nicht; also bleibt F ungeändert, und es kommt $(tx_n)^m F$ oder $t^m z$.

Setzen wir nun

$$(2) \qquad \frac{x_1}{x_n} = u_1, \frac{x_2}{x_n} = u_2, \ldots \frac{x_{n-1}}{x_n} = u_{n-1}, \text{ aber: } \frac{z}{x_n^m} = u_n,$$

so wird:

$$u_n = F(u_1, u_2, \ldots u_{n-1}),$$

wo F willkürlich gewählt werden kann, d. h. es besteht eine Gleichung

$$\Phi(u_1, u_2, \ldots u_{n-1}, u_n) = 0$$

zwischen $u_1, u_2, \ldots u_n$. Wir haben also *einen speziellen Fall des Ansatzes in Nr. 90* vor uns, indem jetzt $u_1, u_2, \ldots u_n$ die besonderen Funktionen (2) von $x_1, x_2, \ldots x_n$ und z sind, so daß die Gleichung (2) in Nr. 90 die spezielle Form annimmt:

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{x_n} & 0 \cdots 0 & -\frac{x_1}{x_n^2} \\ 0 & \frac{1}{x_n} \cdots 0 & -\frac{x_2}{x_n^2} \\ \cdot & \cdot \;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \\ 0 & 0 \cdots \frac{1}{x_n} & -\frac{x_{n-1}}{x_n^2} \\ \frac{p_1}{x_n^m} & \frac{p_2}{x_n^m} \cdots \frac{p_{n-1}}{x_n^m} & -\frac{mz}{x_n^{m+1}} + \frac{p_n}{x_n^m} \end{vmatrix} = 0.$$

Multiplizieren wir die 1., 2., ... $(n-1)^{te}$ *Reihe* bzw. mit

$$\frac{x_1}{x_n}, \frac{x_2}{x_n}, \ldots \frac{x_{n-1}}{x_n}$$

und addieren sie dann zur letzten, so werden die $n-1$ ersten Glieder der letzten Reihe gleich Null. Also kommt:

$$\frac{1}{x_n^{n-1}}\left(-\frac{mz}{x_n^{m+1}}+\frac{x_1p_1+x_2p_2+\cdots+x_np_n}{x_n^{m+1}}\right)=0$$

oder einfacher:

$$x_1p_1+x_2p_2+\ldots+x_np_n=mz.$$

Daher:

Satz 9 (Eulerscher Satz): Ist z eine homogene Funktion m^{ten} Grades von den n Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots x_n$, so ist die Summe der bzw. mit $x_1, x_2, \ldots x_n$ multiplizierten partiellen Ableitungen von z nach $x_1, x_2, \ldots x_n$ gleich dem m-fachen der Funktion z:

$$x_1\frac{\partial z}{\partial x_1}+x_2\frac{\partial z}{\partial x_2}+\cdots+x_n\frac{\partial z}{\partial x_n}=mz.$$

Da die homogenen Funktionen m^{ten} Grades in der Form (1) darstellbar sind und da aus (1) durch partielle Differentiation nach x_i folgt:

$$p_i=\frac{\partial z}{\partial x_i}=x_n^m\frac{\partial f}{\partial\left(\frac{x_i}{x_n}\right)}\cdot\frac{1}{x_n}=x_n^{m-1}\frac{\partial f}{\partial\left(\frac{x_i}{x_n}\right)},$$

wo der zweite Faktor wieder bloß eine Funktion der Brüche $x_1:x_n$, $x_2:x_n, \ldots x_{n-1}:x_n$ ist, so folgt sofort:

Satz 10: Die partiellen Ableitungen erster Ordnung einer homogenen Funktion m^{ten} Grades sind homogene Funktionen $(m-1)^{ten}$ Grades.

92. Allgemeine partielle Differentialgleichung erster Ordnung. Die Betrachtungen in Nr. 89 und 90 führten zu *linearen* partiellen Differentialgleichungen. Wir wollen nun zunächst für den Fall von *zwei* unabhängigen Veränderlichen x, y zeigen, wie man zu der *allgemeinen* partiellen Differentialgleichung erster Ordnung für eine Funktion z von x und y gelangt, und zwar durch einen Ansatz, der, wie sich allerdings erst viel später zeigen wird, für die Theorie der partiellen Differentialgleichungen von fundamentaler Bedeutung ist.

Es sei α eine Veränderliche, φ eine *willkürliche* Funktion von ihr und

$$V = f(x, y, z, \alpha, \varphi(\alpha))$$

eine *gegebene* Funktion von x, y, z, α und $\varphi(\alpha)$. Alsdann verlangen wir das Bestehen der beiden Gleichungen:

$$V = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial \alpha} = 0. \tag{1}$$

Wenn der Funktion $\varphi(\alpha)$ eine bestimmte Bedeutung gegeben wird, so sind dies zwei Gleichungen, aus denen durch Elimination von α eine Gleichung in x, y, z allein hervorgeht, so daß wir annehmen dürfen, daß dadurch z als Funktion von x und y definiert wird. Für verschiedene Annahmen hinsichtlich der Funktion $\varphi(\alpha)$ von α gehen so verschiedene Funktionen z von x und y hervor. Wir wollen nun wieder eine Eigenschaft ableiten, die *allen* diesen Funktionen z von x und y gemeinsam ist.

Zu diesem Zwecke verstehen wir unter α diejenige Funktion von x, y, z, die aus der zweiten Gleichung (1) zu berechnen wäre, und denken sie uns in die erste Gleichung (1) eingesetzt. Nun muß für die betrachtete Funktion z von x und y das vollständige Differential dV gleich Null sein, da $V = 0$ für alle x und y (innerhalb ihres Variabilitätsbereiches) ist. Folglich haben wir:

$$\frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz + \frac{\partial V}{\partial \alpha} d\alpha = 0.$$

Da aber α die durch die zweite Gleichung (1) gegebene Funktion sein soll, so ist das letzte Glied der links stehenden Summe gleich Null. Ferner ist $dz = p dx + q dy$, so daß wir haben:

$$\frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z}(p dx + q dy) = 0$$

oder:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial z} p\right) dx + \left(\frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial z} q\right) dy = 0.$$

Weil die Differentiale dx und dy der beiden unabhängigen Veränderlichen x und y willkürlich gewählt werden können, muß also einzeln:

$$\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial z} p = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial z} q = 0 \tag{2}$$

sein. Indem wir nunmehr α und φ aus den beiden Gleichungen (2) und der ersten Gleichung (1) eliminieren, kommen wir zu einer Gleichung von der Form:

$$F(x, y, z, p, q) = 0.$$

Sie heißt eine *partielle Differentialgleichung erster Ordnung für die Funktion z von x und y*, da sie die partiellen Ableitungen erster Ordnung p und q von z nach x und y enthält (vgl. Nr. 89).

Beispiel: Es sei vorgelegt als Funktion V:

$$V = (x-\alpha)^2 + [y-\varphi(\alpha)]^2 + z^2 - R^2,$$

wo R eine Konstante sein soll. Hier ist:

$$\frac{\partial V}{\partial \alpha} = -2(x-\alpha) - 2[y-\varphi(\alpha)]\varphi'(\alpha).$$

Wir fragen, welche gemeinsame Eigenschaft allen denjenigen Funktionen z von x und y zukommt, die durch die beiden Gleichungen $V=0$ und $\partial V : \partial\alpha = 0$ definiert werden, wenn darin φ irgend eine Funktion von α bedeutet. Es ist hier:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = 2(x-\alpha), \quad \frac{\partial V}{\partial y} = 2[y-\varphi(\alpha)], \quad \frac{\partial V}{\partial z} = 2z,$$

so daß jetzt die Gleichungen (2) so lauten:

$$x - \alpha + zp = 0, \quad y - \varphi(\alpha) + zq = 0.$$

Hieraus entnehmen wir $x-\alpha = -zp$ und $y-\varphi(\alpha) = -zq$ und setzen diese Werte in $V=0$ ein. Dadurch geht die gesuchte partielle Differentialgleichung erster Ordnung für z hervor:

$$(1+p^2+q^2)z^2 = R^2 \quad \text{oder:} \quad z = \frac{R}{\sqrt{1+p^2+q^2}}.$$

Die vorhergehenden Betrachtungen lassen sich sofort verallgemeinern: Es mögen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{n-1}$ irgend welche Veränderliche sein, und es bedeute $\varphi(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{n-1})$ eine *willkürliche* Funktion von ihnen. Ferner sei

$$V = f(x_1, x_2, \ldots x_n, z, \varphi, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{n-1})$$

eine *gegebene* Funktion von $x_1, x_2, \ldots x_n, z, \varphi$ und $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{n-1}$. Wir wollen dann die n Forderungen stellen:

$$(3) \qquad V = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial \alpha_1} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial \alpha_2} = 0, \cdots \frac{\partial V}{\partial \alpha_{n-1}} = 0.$$

Es sind dies n Gleichungen, die, wie wir annehmen wollen, die n Größen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{n-1}$ und z als Funktionen von $x_1, x_2, \ldots x_n$

definieren. Es handelt sich nun darum, insbesondere für die Funktionen z von $x_1, x_2, \ldots x_n$, die hierdurch definiert werden, eine Eigenschaft zu finden, die von der besonderen Wahl der willkürlichen Funktion φ von $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{n-1}$ unabhängig ist.

Wenn wir unter $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{n-1}$ die aus den letzten $n-1$ Gleichungen (3) zu berechnenden Funktionen von $x_1, x_2, \ldots x_n$ und z verstehen, wird $V = 0$ eine Gleichung in $x_1, x_2, \ldots x_n$ und z allein, und es muß das vollständige Differential

$$\frac{\partial V}{\partial x_1} dx_1 + \cdots + \frac{\partial V}{\partial x_n} dx_n + \frac{\partial V}{\partial z} dz + \frac{\partial V}{\partial \alpha_1} d\alpha_1 + \cdots + \frac{\partial V}{\partial \alpha_{n-1}} d\alpha_{n-1} = 0$$

sein. Infolge der $n-1$ letzten Gleichungen (3) fallen nun die $n-1$ letzten Summanden fort. Außerdem ist $dz = p_1 dx_1 + \cdots + p_n dx_n$, wenn $p_1, \ldots p_n$ wie in Nr. 90 die partiellen Ableitungen erster Ordnung von z bedeuten. Da die Gleichung für alle Werte der beliebig anzunehmenden Differentiale dx_1, $dx_2, \ldots dx_n$ der unabhängigen Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots x_n$ gelten muß, so kommt einzeln:

$$(4) \qquad \frac{\partial V}{\partial x_1} + \frac{\partial V}{\partial z} p_1 = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial x_2} + \frac{\partial V}{\partial z} p_2 = 0, \cdots \frac{\partial V}{\partial x_n} + \frac{\partial V}{\partial z} p_n = 0.$$

Eliminieren wir $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{n-1}$ und φ aus diesen n Gleichungen (4) und der Gleichung $V = 0$, so geht die gesuchte *partielle Differentialgleichung erster Ordnung für die Funktion z von $x_1, x_2, \ldots x_n$* hervor:

$$F(x_1, x_2, \ldots x_n, z, p_1, p_2, \ldots p_n) = 0.$$

§ 5. Einführung von neuen unabhängigen Veränderlichen.

93. Darstellung einer Kurve mittels einer Hilfsveränderlichen. Wir haben bisher eine Kurve durch eine Gleichung $y = f(x)$ oder — unaufgelöst — durch eine Gleichung $F(x, y) = 0$ in den rechtwinkligen Koordinaten x, y dargestellt. Aber auch zwei Gleichungen von der Form:

$$(1) \qquad x = \varphi(t), \quad y = \psi(t)$$

stellen eine Kurve dar, wenn t die unabhängig veränderliche Größe, eine sogenannte *Hilfsveränderliche* (oder ein *Parameter*) ist, von der die Koordinaten x, y der Punkte der Kurve abhängen. Solche Fälle treten z. B. dann auf, wenn man anzugeben weiß, welche Koordinaten ein *beweglicher* Punkt zu einer

beliebigen Zeit t hat. Wenn man aus der ersten Gleichung (1) die Veränderliche t als Funktion von x berechnet, also die *inverse* Funktion $t = \Phi(x)$ bildet und sie in die zweite Gleichung einsetzt, so geht die gewohnte Darstellung von y als Funktion von x in der Form $y = \psi(\Phi(x))$ hervor.

Es entsteht nun häufig das Problem, einen Differentialausdruck, der in bezug auf die neue Darstellungsform (1) einer Kurve gefunden worden ist, so umzuformen, daß er auch für die alte, gewohnte Darstellungsform brauchbar ist, oder auch umgekehrt. Dies aber können wir leisten, sobald wir die Aufgabe gelöst haben:

Gegeben sind die Ableitungen von x und y als Funktionen einer dritten Veränderlichen t; gesucht werden die Werte der Differentialquotienten

$$\frac{dy}{dx}, \quad \frac{d^2y}{dx^2}, \cdots,$$

ausgedrückt durch jene Ableitungen nach t.

Hierbei wollen wir die Ableitungen von x und y nach t mit $x', x'', \ldots$ und $y', y'', \ldots$ bezeichnen:

$$\frac{dx}{dt} = x', \quad \frac{d^2x}{dt^2} = x'', \cdots, \qquad \frac{dy}{dt} = y', \quad \frac{d^2y}{dt^2} = y'', \cdots.$$

Es ist jetzt y die Funktion ψ von t, aber t die zu $x = \varphi(t)$ inverse Funktion von x. Nach Satz 11 in Nr. 33 und Satz 18 in Nr. 37 haben wir daher:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} \quad \text{und} \quad \frac{dt}{dx} = 1 : \frac{dx}{dt}.$$

Also folgt:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'}{x'}. \tag{2}$$

Hierdurch ist $dy : dx$ als Funktion von t gegeben. Ersetzen wir in dieser Formel y durch $y' : x'$, so folgt ebenso:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d\left(\frac{y'}{x'}\right)}{dt} \cdot \frac{1}{x'} = \frac{x'y'' - y'x''}{x'^3}, \tag{3}$$

weiterhin ebenso:

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d\left(\frac{x'y'' - y'x''}{x'^3}\right)}{dt} \cdot \frac{1}{x'} = \frac{x'(x'y''' - y'x''') - 3x''(x'y'' - y'x'')}{x'^5} \tag{4}$$

usw.

Übrigens ist die Darstellungsform $y = f(x)$ einer Kurve ein spezieller Fall der Darstellungsform (1). Ist nämlich $\varphi(t) = t$ selbst, so wird die Form (1) diese: $x = t$, $y = \psi(t)$ oder kürzer: $y = \psi(x)$. Im Falle $x = t$ wird aber $x' = 1$, $x'' = 0$, $x''' = 0, \ldots$ und $y' = dy : dx$, $y'' = d^2y : dx^2, \ldots$, so daß jetzt (2), (3) und (4) zu Identitäten werden, wie es sein muß.

Ein anderer Spezialfall geht hervor, wenn wir die zweite Gleichung (1) in der einfachen Form $y = t$ annehmen, da dann die Kurve in der Form $x = \varphi(y)$ gegeben ist, also in der zu $y = f(x)$ inversen Form. In diesem Falle ist $y' = 1$, $y'' = 0$, $y''' = 0, \ldots$, dagegen $x' = dx : dy$, $x'' = d^2x : dy^2 \ldots$, so daß (2), (3) und (4) geben:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{\frac{d^2x}{dy^2}}{\left(\frac{dx}{dy}\right)^3}, \quad \frac{d^3y}{dx^3} = \frac{-\frac{dx}{dy}\frac{d^3x}{dy^3} + 3\left(\frac{d^2x}{dy^2}\right)^2}{\left(\frac{dx}{dy}\right)^5}.$$

Es ist oft im Hinblick auf die Symmetrie, Eleganz und vielseitige Verwendbarkeit der Formeln vorteilhaft, die Hilfsveränderliche t nicht zu spezialisieren.

Dieselben Vorteile wie die Hilfsveränderliche t gewährt das Rechnen mit Differentialen statt mit Differentialquotienten. *Wenn wir nämlich jetzt wieder unter $y', y'', y''', \ldots$ die Ableitungen von y nach x verstehen*, also nicht die Ableitungen nach t, wie es vorhin geschah, so haben wir:

$$(5) \qquad dy = y'dx, \quad dy' = y''dx, \quad dy'' = y'''dx, \ldots.$$

Diese Formeln gelten, welche Größe auch die unabhängige Veränderliche sein mag, nach Satz 11 in Nr. 33. Die erste Gleichung gibt wie bekannt:

$$(6) \qquad y' = \frac{dy}{dx}.$$

Wenn man hierauf die Regel von der Differentiation eines Bruches anwendet (vgl. dabei Satz 12 in Nr. 75), so kommt, welche Größe auch die unabhängige Veränderliche sein mag:

$$dy' = \frac{dx\,d^2y - dy\,d^2x}{dx^2}$$

oder nach der zweiten Formel (5) durch Division mit dx:

$$(7) \qquad y'' = \frac{dx\,d^2y - dy\,d^2x}{dx^3}.$$

Dieselbe Regel gibt aufs neue angewandt:

$$dy'' = \frac{dx(dx\,d^3y - dy\,d^3x) - 3\,d^2x(dx\,d^2y - dy\,d^2x)}{dx^4}$$

oder nach der dritten Formel (5) durch Division von dx:

$$(8) \qquad y''' = \frac{dx(dx\,d^3y - dy\,d^3x) - 3\,d^2x(dx\,d^2y - dy\,d^2x)}{dx^5}$$

usw. Man erkennt, daß sich $y^{(n)}$ mittels der Differentiale von x und y bis zu denen von der n^{ten} Ordnung ausdrücken läßt.

Wenn man in den Formeln (6), (7), (8) usw. das Differential dx konstant wählt, also $d^2x = 0$, $d^3x = 0$ usw. annimmt, so gehen wieder die definierenden Gleichungen hervor:

$$y' = \frac{dy}{dx}, \quad y'' = \frac{d^2y}{dx^2}, \quad y''' = \frac{d^3y}{dx^3}, \dots$$

94. Einführung einer neuen unabhängigen und neuer abhängiger Veränderlicher. Wir stellen uns nun die folgende Aufgabe:

Wenn $x, y, z, \dots$ Veränderliche sind, die sämtlich von nur einer unter ihnen abhängen, und wenn unter ihnen x als unabhängige Veränderliche betrachtet wird, so sollen in einem Ausdrucke V, der eine Funktion von

$$x, \; y, \; \frac{dy}{dx}, \; \frac{d^2y}{dx^2}, \dots z, \; \frac{dz}{dx}, \; \frac{d^2z}{dx^2}, \dots$$

ist, die Veränderlichen $x, y, z, \dots$ gleich Funktionen von anderen Veränderlichen $\xi, \eta, \zeta, \dots$ gesetzt und unter diesen eine, z. B. ξ, als unabhängige Veränderliche betrachtet werden. Wie ist der Wert von V als Funktion von $\xi, \eta, \zeta, \dots$ und den Ableitungen von $\eta, \zeta, \dots$ nach ξ zu bilden?

Um diese Frage zu beantworten, hat man zuerst die Funktion V mittels der Formeln der vorigen Nummer so auszudrücken, daß darin statt der Ableitungen die Differentiale erster und höherer Ordnung von $x, y, z, \dots$ auftreten. Alsdann ist V eine Funktion von $x, y, z, \dots$ und ihren Differentialen. Nun lassen sich aus den Gleichungen, durch die $x, y, z, \dots$ als Funktionen der neuen Veränderlichen definiert werden:

$$x = f(\xi, \eta, \zeta, \dots), \quad y = \varphi(\xi, \eta, \zeta, \dots), \quad z = \psi(\xi, \eta, \zeta, \dots), \dots$$

durch Differentiation die Differentiale

$$dx, \; d^2x, \dots dy, \; d^2y, \dots dz, \; d^2z, \dots$$

berechnen, und hierbei ist $d\xi$ als konstant anzunehmen. Alle diese Werte sind in V zu substituieren, und damit ist die Aufgabe gelöst.

Beispiel: Es seien x und y die rechtwinkligen Koordinaten der Punkte einer gegebenen Kurve, wobei x als unabhängige Veränderliche betrachtet ist. Man soll bestimmen, wie der Ausdruck

$$V = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

transformiert wird, wenn man an Stelle der rechtwinkligen Koordinaten Polarkoordinaten ω, ϱ einführt und ω als unabhägnige Veränderliche ansieht.

Nach Nr. 93 wird der Ausdruck V gleich

$$V = \frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx d^2y - dy d^2x}.$$

Die unabhängige Veränderliche kann dabei irgend eine sein. Nun ist:

$$x = \varrho \cos \omega, \quad y = \varrho \sin \omega,$$

also:

$$dx = d\varrho \cos \omega - \varrho \sin \omega \, d\omega, \quad dy = d\varrho \sin \omega + \varrho \cos \omega \, d\omega.$$

Differenziert man von neuem und nimmt man $d\omega$ als konstant an, so findet man

$$d^2x = d^2\varrho \cos \omega - 2 \sin \omega \, d\varrho \, d\omega - \varrho \cos \omega \, d\omega^2,$$

$$d^2y = d^2\varrho \sin \omega + 2 \cos \omega \, d\varrho \, d\omega - \varrho \sin \omega \, d\omega^2.$$

Hieraus folgt:

$$dx^2 + dy^2 = d\varrho^2 + \varrho^2 d\omega^2,$$

$$dx d^2y - dy d^2x = -\varrho d^2\varrho \, d\omega + 2 d\varrho^2 d\omega + \varrho^2 d\omega^3.$$

Also ist:

$$V = \frac{(d\varrho^2 + \varrho^2 d\omega^2)^{\frac{3}{2}}}{-\varrho d^2\varrho \, d\omega + 2 d\varrho^2 d\omega + \varrho^2 d\omega^3} = \frac{\left[\varrho^2 + \left(\frac{d\varrho}{d\omega}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\varrho^2 + 2\left(\frac{d\varrho}{d\omega}\right)^2 - \varrho \frac{d^2\varrho}{d\omega^2}}.$$

95. Eine neue Anwendung. Bei der Aufgabe der Einführung von neuen Veränderlichen kann auch der Fall eintreten, daß die ursprünglichen Veränderlichen nicht unmittelbar als Funktionen der neuen gegeben sind, sondern daß sie mit diesen durch gegebene Differentialgleichungen verknüpft sind.

Dabei kann es vorkommen, daß die gegebenen Gleichungen zusammen mit denjenigen, die man durch Differentiation aus ihnen gewinnt, hinreichen, um die ursprünglichen Veränderlichen zu eliminieren und auf diese Weise den vorgelegten Ausdruck zu transformieren. Auch hierfür wollen wir ein Beispiel geben und denselben Ausdruck wie oben, nämlich

$$V = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}, \tag{1}$$

behandeln. Es soll die Form bestimmt werden, die er annimmt, wenn man an Stelle von x und y zwei andere Veränderliche ϱ und s einführt, die mit diesen durch die Gleichungen

$$x^2 + y^2 = \varrho^2, \tag{2}$$

$$dx^2 + dy^2 = ds^2 \tag{3}$$

verbunden sind, wobei ds als konstantes Differential gelten soll. Zunächst transformieren wir wiederum V in

$$V = \frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dxd^2y - dyd^2x}. \tag{4}$$

Die Differentiation von (2) und (3) ergibt:

$$xdx + ydy = \varrho d\varrho, \tag{5}$$

$$dxd^2x + dyd^2y = 0. \tag{6}$$

Durch Differentiation der Gleichung (5) erhält man:

$$xd^2x + yd^2y + (dx^2 + dy^2) = d\varrho^2 + \varrho d^2\varrho$$

oder nach (3):

$$xd^2x + yd^2y = \varrho d^2\varrho + d\varrho^2 - ds^2. \tag{7}$$

Aus den Gleichungen (3), (5), (6), (7) lassen sich dx, dy, d^2x, d^2y berechnen; und zwar wird aus den Gleichungen (6) und (7) erhalten:

$$(ydx - xdy)d^2x = -(\varrho d^2\varrho + d\varrho^2 - ds^2)dy,$$

$$(ydx - xdy)d^2y = +(\varrho d^2\varrho + d\varrho^2 - ds^2)dx,$$

also

$$dxd^2y - dyd^2x = \frac{(\varrho d^2\varrho + d\varrho^2 - ds^2)ds^2}{ydx - xdy}.$$

[95

Nun ist:

$$y\,dx - x\,dy = \sqrt{(x^2+y^2)(dx^2+dy^2)-(x\,dx+y\,dy)^2},$$

also nach (2), (3) und (5) gleich $\varrho\sqrt{ds^2 - d\varrho^2}$, daher:

$$(8)\qquad dx\,d^2y - dy\,d^2x = \frac{(\varrho\,d^2\varrho + d\varrho^2 - ds^2)\,ds^2}{\varrho\sqrt{ds^2-d\varrho^2}}.$$

Infolge von (4), (3) und (8) kommt also:

$$V = \frac{\varrho\,ds\sqrt{ds^2-d\varrho^2}}{\varrho\,d^2\varrho + d\varrho^2 - ds^2} = \frac{\varrho\sqrt{1-\left(\frac{d\varrho}{ds}\right)^2}}{\varrho\frac{d^2\varrho}{ds^2}+\left(\frac{d\varrho}{ds}\right)^2-1}.$$

96. Einführung von mehreren neuen unabhängigen Veränderlichen. Wir wollen jetzt allgemeiner einer Funktion u von *mehreren*, etwa von n unabhängigen Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots x_n$ betrachten und untersuchen, wie Ausdrücke, die u und die Ableitungen von u enthalten, transformiert werden, sobald man neue unabhängige Veränderliche $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$ einführt, d. h. sobald $x_1, x_2, \ldots x_n$ als voneinander unabhängige gegebene Funktionen von n anderen Veränderlichen $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$ aufgefaßt werden. Es handelt sich also darum, die partiellen Ableitungen von u nach $x_1, x_2, \ldots x_n$ durch die von u nach $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$ auszudrücken. Dies ist im Grunde genommen schon in Nr. 72 erledigt, wo $u, v, w, \ldots$ statt $x_1, x_2, \ldots x_n$, ferner $x_1, x_2, \ldots x_n$ statt $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$ und f statt u gesagt wurde. Aber wir wollen noch bemerken, daß die Formeln durch die Benutzung vollständiger Differentiale am übersichtlichsten werden.

Denn da $x_1, x_2, \ldots x_n$ als Funktionen von $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$ aufzufassen sind, so ist u eine zusammengesetzte Funktion von $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$, deren vollständiges Differential in den beiden Formen:

$$(1)\qquad du = \frac{\partial u}{\partial \xi_1}d\xi_1 + \frac{\partial u}{\partial \xi_2}d\xi_2 + \cdots + \frac{\partial u}{\partial \xi_n}d\xi_n,$$

$$(2)\qquad du = \frac{\partial u}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2}dx_2 + \cdots + \frac{\partial u}{\partial x_n}dx_n$$

geschrieben werden kann. Wenn wir nun aus denjenigen Gleichungen, die $x_1, x_2, \ldots x_n$ durch $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$ ausdrücken, die Differentiale

$$dx_i = \frac{\partial x_i}{\partial \xi_1} d\xi_1 + \frac{\partial x_i}{\partial \xi_2} d\xi_2 + \cdots + \frac{\partial x_i}{\partial \xi_n} d\xi_n \quad (i = 1, 2, \ldots n)$$

berechnen und in (2) einsetzen, so wird der Koeffizient von $d\xi_k$ nach (1) die Ableitung $\partial u : \partial \xi_k$, ausgedrückt durch $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$ und die Ableitungen von u nach $x_1, x_2, \ldots x_n$. Aus den so hervorgehenden n Gleichungen lassen sich die partiellen Ableitungen erster Ordnung von u nach $x_1, x_2, \ldots x_n$ berechnen als Funktionen von $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$ und von den partiellen Ableitungen erster Ordnung von u nach $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$.

Wir können auch so verfahren: Wir berechnen zuerst $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$ als Funktionen von $x_1, x_2, \ldots x_n$ und leiten daraus die Werte

$$(3) \qquad d\xi_k = \frac{\partial \xi_k}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \xi_k}{\partial x_2} dx_2 + \cdots + \frac{\partial \xi_k}{\partial x_n} dx_n \quad (k = 1, 2, \ldots n)$$

ab, die wir in die Formel (1) einsetzen. Alsdann wird der Koeffizient von dx_i nach (2) die Ableitung $\partial u : \partial x_i$, ausgedrückt durch $x_1, x_2, \ldots x_n$ und durch die Ableitungen von u nach $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$. Hierin können wir dann noch für $x_1, x_2, \ldots x_n$ ihre Werte in $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$ einsetzen.

Auf die eine oder andere Art ergeben sich so die Ableitungen erster Ordnung

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \ldots \frac{\partial u}{\partial x_n}$$

als Funktionen von

$$\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n, \frac{\partial u}{\partial \xi_1}, \frac{\partial u}{\partial \xi_2}, \ldots \frac{\partial u}{\partial \xi_n}.$$

Nun kann man analog weiter schließen: Wir berechnen das vollständige Differential

$$(4) \qquad d\frac{\partial u}{\partial x_i} = \frac{\partial \frac{\partial u}{\partial x_i}}{\partial \xi_1} d\xi_1 + \frac{\partial \frac{\partial u}{\partial x_i}}{\partial \xi_2} d\xi_2 + \cdots + \frac{\partial \frac{\partial u}{\partial x_i}}{\partial \xi_n} d\xi_n,$$

worin allgemein

$$\frac{\partial \frac{\partial u}{\partial x_i}}{\partial \xi_k}$$

durch $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$ und die Ableitungen erster und zweiter Ordnung von u nach $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$ ausgedrückt ist. Setzen wir in (4) die Werte (3) ein, so muß der Koeffizient von dx_l die Ableitung $\partial^2 u : \partial x_i \partial x_l$ sein, usw.

97. Einführung von Polarkoordinaten im Raume. Wir wenden dies auf den Fall an, daß die rechtwinkligen Koordinaten x, y, z im Raume durch *Polarkoordinaten* r, θ, ψ ersetzt werden sollen vermöge der Gleichungen:

$$(1) \qquad x = r \sin\theta \cos\psi, \quad y = r \sin\theta \sin\psi, \quad z = r \cos\theta,$$

die, nach $r, \theta, \operatorname{tg}\psi$ aufgelöst, ergeben:

$$(2) \qquad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \cos\theta = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \quad \operatorname{tg}\psi = \frac{y}{x}.$$

Ist u eine gegebene Funktion von x, y, z, so stellen wir uns also die Aufgabe, ihre partiellen Ableitungen nach x, y, z auszudrücken durch die nach r, θ, ψ. Aus (2) folgt:

$$dr = \frac{x\,dx + y\,dy + z\,dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

$$\sin\theta\, d\theta = \frac{z(x\,dx + y\,dy) - (x^2 + y^2)\,dz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\frac{1}{\cos^2\psi}\, d\psi = \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2}$$

oder mittels der Gleichungen (1):

$$(3) \qquad \begin{cases} dr = \sin\theta \cos\psi\, dx + \sin\theta \sin\psi\, dy + \cos\theta\, dz, \\ d\theta = \frac{1}{r} \cos\theta \cos\psi\, dx + \frac{1}{r} \cos\theta \sin\psi\, dy - \frac{1}{r} \sin\theta\, dz, \\ d\psi = -\frac{1}{r} \frac{\sin\psi}{\sin\theta}\, dx + \frac{1}{r} \frac{\cos\psi}{\sin\theta}\, dy. \end{cases}$$

Substituieren wir diese Werte in die Gleichung

$$du = \frac{\partial u}{\partial r} dr + \frac{\partial u}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial u}{\partial \psi} d\psi,$$

so kommt:

$$(4) \qquad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r} \sin\theta \cos\psi + \frac{\partial u}{\partial \theta} \frac{\cos\theta \cos\psi}{r} - \frac{\partial u}{\partial \psi} \frac{\sin\psi}{r \sin\theta}, \\ \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial r} \sin\theta \sin\psi + \frac{\partial u}{\partial \theta} \frac{\cos\theta \sin\psi}{r} + \frac{\partial u}{\partial \psi} \frac{\cos\psi}{r \sin\theta}, \\ \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial r} \cos\theta - \frac{\partial u}{\partial \theta} \frac{\sin\theta}{r}. \end{cases}$$

Um die vollständigen Differentiale dieser Ableitungen erster Ordnung von u zu bilden, berechnen wir zunächst die partiellen Ableitungen der Werte (4) nach r, θ, ψ. So ergeben sich die drei Formelgruppen:

$$(5)\begin{cases}
\dfrac{\partial \dfrac{\partial u}{\partial x}}{\partial r} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2} \sin\theta \cos\psi + \dfrac{\partial^2 u}{\partial r \partial \theta} \dfrac{\cos\theta \cos\psi}{r} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial r \partial \psi} \dfrac{\sin\psi}{r \sin\theta} \\
\qquad - \dfrac{\partial u}{\partial \theta} \dfrac{\cos\theta \cos\psi}{r^2} + \dfrac{\partial u}{\partial \psi} \dfrac{\sin\psi}{r^2 \sin\theta}, \\
\dfrac{\partial \dfrac{\partial u}{\partial x}}{\partial \theta} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial r \partial \theta} \sin\theta \cos\psi + \dfrac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \dfrac{\cos\theta \cos\psi}{r} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial \theta \partial \psi} \dfrac{\sin\psi}{r \sin\theta} \\
\qquad + \dfrac{\partial u}{\partial r} \cos\theta \cos\psi - \dfrac{\partial u}{\partial \theta} \dfrac{\sin\theta \cos\psi}{r} + \dfrac{\partial u}{\partial \psi} \dfrac{\cos\theta \sin\psi}{r \sin^2\theta}, \\
\dfrac{\partial \dfrac{\partial u}{\partial x}}{\partial \psi} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial r \partial \psi} \sin\theta \cos\psi + \dfrac{\partial^2 u}{\partial \theta \partial \psi} \dfrac{\cos\theta \cos\psi}{r} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial \psi^2} \dfrac{\sin\psi}{r \sin\theta} \\
\qquad - \dfrac{\partial u}{\partial r} \sin\theta \sin\psi - \dfrac{\partial u}{\partial \theta} \dfrac{\cos\theta \sin\psi}{r} - \dfrac{\partial u}{\partial \psi} \dfrac{\cos\psi}{r \sin\theta};
\end{cases}$$

$$(6)\begin{cases}
\dfrac{\partial \dfrac{\partial u}{\partial y}}{\partial r} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2} \sin\theta \sin\psi + \dfrac{\partial^2 u}{\partial r \partial \theta} \dfrac{\cos\theta \sin\psi}{r} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial r \partial \psi} \dfrac{\cos\psi}{r \sin\theta} \\
\qquad - \dfrac{\partial u}{\partial \theta} \dfrac{\cos\theta \sin\psi}{r^2} - \dfrac{\partial u}{\partial \psi} \dfrac{\cos\psi}{r^2 \sin\theta}, \\
\dfrac{\partial \dfrac{\partial u}{\partial y}}{\partial \theta} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial r \partial \theta} \sin\theta \sin\psi + \dfrac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \dfrac{\cos\theta \sin\psi}{r} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial \theta \partial \psi} \dfrac{\cos\psi}{r \sin\theta} \\
\qquad + \dfrac{\partial u}{\partial r} \cos\theta \sin\psi - \dfrac{\partial u}{\partial \theta} \dfrac{\sin\theta \sin\psi}{r} - \dfrac{\partial u}{\partial \psi} \dfrac{\cos\theta \cos\psi}{r \sin^2\theta}, \\
\dfrac{\partial \dfrac{\partial u}{\partial y}}{\partial \psi} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial r \partial \psi} \sin\theta \sin\psi + \dfrac{\partial^2 u}{\partial \theta \partial \psi} \dfrac{\cos\theta \sin\psi}{r} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial \psi^2} \dfrac{\cos\psi}{r \sin\theta} \\
\qquad + \dfrac{\partial u}{\partial r} \sin\theta \cos\psi + \dfrac{\partial u}{\partial \theta} \dfrac{\cos\theta \cos\psi}{r} - \dfrac{\partial u}{\partial \psi} \dfrac{\sin\psi}{r \sin\theta};
\end{cases}$$

$$(7)\begin{cases}
\dfrac{\partial \dfrac{\partial u}{\partial z}}{\partial r} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2} \cos\theta - \dfrac{\partial^2 u}{\partial r \partial \theta} \dfrac{\sin\theta}{r} + \dfrac{\partial u}{\partial \theta} \dfrac{\sin\theta}{r^2}, \\
\dfrac{\partial \dfrac{\partial u}{\partial z}}{\partial \theta} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial r \partial \theta} \cos\theta - \dfrac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \dfrac{\sin\theta}{r} - \dfrac{\partial u}{\partial r} \sin\theta - \dfrac{\partial u}{\partial \theta} \dfrac{\cos\theta}{r}, \\
\dfrac{\partial \dfrac{\partial u}{\partial z}}{\partial \psi} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial r \partial \psi} \cos\theta - \dfrac{\partial^2 u}{\partial \theta \partial \psi} \dfrac{\sin\theta}{r}.
\end{cases}$$

Addieren wir die Gleichungen (5), nachdem wir sie zuvor mit den entsprechenden Gleichungen (3) multipliziert haben, so geht das vollständige Differential von $\partial u : \partial x$ hervor, und die

darin vorkommenden Koeffizienten von dx, dy, dz werden die gesuchten Werte von

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z}.$$

Ebenso ergeben sich die übrigen partiellen Ableitungen zweiter Ordnung, wenn die Gleichungen (6) oder (7) mit den Gleichungen (3) multipliziert und alsdann addiert werden:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = {} & \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \sin^2\theta \cos^2\psi + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \theta} \frac{\sin\theta \cos\theta \cos^2\psi}{r} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \psi} \frac{\sin\psi \cos\psi}{r} \\
& + \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \frac{\cos^2\theta \cos^2\psi}{r^2} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \theta \partial \psi} \frac{\cos\theta \sin\psi \cos\psi}{r^2 \sin\theta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \psi^2} \frac{\sin^2\psi}{r^2 \sin^2\theta} \\
& + \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\cos^2\theta \cos^2\psi + \sin^2\psi}{r} + \frac{\partial u}{\partial \theta} \frac{(\sin^2\psi - 2\sin^2\theta \cos^2\psi)\cos\theta}{r^2 \sin\theta} + 2 \frac{\partial u}{\partial \psi} \frac{\sin\psi \cos\psi}{r^2 \sin^2\theta},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = {} & \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \sin^2\theta \sin\psi \cos\psi + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \theta} \frac{\sin\theta \cos\theta \sin\psi \cos\psi}{r} + \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \psi} \frac{\cos^2\psi - \sin^2\psi}{r} \\
& + \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \frac{\cos^2\theta \sin\psi \cos\psi}{r^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \theta \partial \psi} \frac{(\cos^2\psi - \sin^2\psi)\cos\theta}{r^2 \sin\theta} - \frac{\partial^2 u}{\partial \psi^2} \frac{\sin\psi \cos\psi}{r^2 \sin^2\theta} \\
& - \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\sin^2\theta \sin\psi \cos\psi}{r} - \frac{\partial u}{\partial \theta} \frac{(1 + 2\sin^2\theta)\cos\theta \sin\psi \cos\psi}{r^2 \sin\theta} - \frac{\partial u}{\partial \psi} \frac{\cos^2\psi - \sin^2\psi}{r^2 \sin^2\theta},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} = {} & \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \sin\theta \cos\theta \cos\psi + \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \theta} \frac{(\cos^2\theta - \sin^2\theta)\cos\psi}{r} - \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \psi} \frac{\cos\theta \sin\psi}{r \sin\theta} \\
& - \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \frac{\sin\theta \cos\theta \cos\psi}{r^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \theta \partial \psi} \frac{\sin\psi}{r^2} \\
& - \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\sin\theta \cos\theta \cos\psi}{r} - \frac{\partial u}{\partial \theta} \frac{(\cos^2\theta - \sin^2\theta)\cos\psi}{r^2},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = {} & \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \sin^2\theta \sin^2\psi + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \theta} \frac{\sin\theta \cos\theta \sin^2\psi}{r} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \psi} \frac{\sin\psi \cos\psi}{r} \\
& + \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \frac{\cos^2\theta \sin^2\psi}{r^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \theta \partial \psi} \frac{\cos\theta \sin\psi \cos\psi}{r^2 \sin\theta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \psi^2} \frac{\cos^2\psi}{r^2 \sin^2\theta} \\
& + \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\cos^2\theta \sin^2\psi + \cos^2\psi}{r} + \frac{\partial u}{\partial \theta} \frac{(\cos^2\psi - 2\sin^2\theta \sin^2\psi)\cos\theta}{r^2 \sin\theta} - 2 \frac{\partial u}{\partial \psi} \frac{\sin\psi \cos\psi}{r^2 \sin^2\theta},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = {} & \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \sin\theta \cos\theta \sin\psi + \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \theta} \frac{(\cos^2\theta - \sin^2\theta)\sin\psi}{r} + \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \psi} \frac{\cos\theta \cos\psi}{r \sin\theta} \\
& - \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \frac{\sin\theta \cos\theta \sin\psi}{r^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial \theta \partial \psi} \frac{\cos\psi}{r^2} \\
& - \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\sin\theta \cos\theta \sin\psi}{r} - \frac{\partial u}{\partial \theta} \frac{(\cos^2\theta - \sin^2\theta)\sin\psi}{r^2},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = {} & \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \cos^2\theta - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \theta} \frac{\sin\theta \cos\theta}{r} + \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \frac{\sin^2\theta}{r^2} \\
& + \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\sin^2\theta}{r} + 2 \frac{\partial u}{\partial \theta} \frac{\sin\theta \cos\theta}{r^2}.
\end{aligned}$$

97]

98. Der Ausdruck $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$. Man kann die bei der Einführung neuer Veränderlicher notwendigen Rechnungen manchmal abkürzen, indem man sich gewisser, den Problemen angemessener Kunstgriffe bedient. Um von solchen Vereinfachungen einen Begriff zu geben, wollen wir eine Aufgabe behandeln, deren Lösung für verschiedene mathematische Theorien nützlich ist: In den Ausdruck

$$S=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \tag{1}$$

wollen wir an Stelle der rechtwinkligen Koordinaten x, y, z die Polarkoordinaten r, θ, ψ einführen, ohne die allgemeinen Formeln der vorigen Nummer anzuwenden.

Da zwischen x, y, z und r, θ, ψ die Beziehungen

$$x=r\sin\theta\cos\psi, \quad y=r\sin\theta\sin\psi, \quad z=r\cos\theta \tag{2}$$

bestehen, so können wir die neuen Veränderlichen *nacheinander in zwei Schritten* einführen. Zuerst nämlich behalten wir z bei und führen ϱ und ψ ein vermöge:

$$x=\varrho\cos\psi, \quad y=\varrho\sin\psi, \tag{3}$$

so daß ϱ, ψ und z die neuen Veränderlichen werden. Alsdann behalten wir ψ bei und führen r und θ ein vermöge:

$$z=r\cos\theta, \quad \varrho=r\sin\theta. \tag{4}$$

Die Formeln (3) und (4) zusammen kommen auf die Formeln (2) hinaus. Wir bemerken vorweg: Die Formeln (3) und (4) zeigen, *daß sich x und y ebenso durch ϱ und ψ ausdrücken wie z und ϱ durch r und θ.* Hiervon machen wir nachher zweckmäßigen Gebrauch.

Zuerst also behalten wir z bei und führen statt x und y die neuen Veränderlichen ϱ und ψ vermöge (3) ein. Es handelt sich dabei nur um die Umformung der beiden ersten Summanden von S. Weil nach (3)

$$\varrho=\sqrt{x^2+y^2}, \quad \psi=\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}$$

ist, so folgt:

$$d\varrho=\frac{x\,dx+y\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}}=\cos\psi\,dx+\sin\psi\,dy,$$

$$d\psi=\frac{x\,dy-y\,dx}{x^2+y^2}=-\frac{\sin\psi}{\varrho}\,dx+\frac{\cos\psi}{\varrho}\,dy,$$

woraus einzeln hervorgeht:

$$\frac{\partial\varrho}{\partial x} = \cos\psi, \quad \frac{\partial\varrho}{\partial y} = \sin\psi, \quad \frac{\partial\psi}{\partial x} = -\frac{\sin\psi}{\varrho}, \quad \frac{\partial\psi}{\partial y} = \frac{\cos\psi}{\varrho}.$$

Also ist:

$$(5)\quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial\varrho}\frac{\partial\varrho}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial\psi}\frac{\partial\psi}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial\varrho}\cos\psi - \frac{\partial u}{\partial\psi}\frac{\sin\psi}{\varrho}, \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial u}{\partial\varrho}\frac{\partial\varrho}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial\psi}\frac{\partial\psi}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial\varrho}\sin\psi + \frac{\partial u}{\partial\psi}\frac{\cos\psi}{\varrho}. \end{aligned} \right.$$

Diese Formeln gelten für *jede* Funktion u von x, y, z, also auch, wenn in der ersten Formel u durch $\partial u : \partial x$ und in der zweiten u durch $\partial u : \partial y$ ersetzt wird, so daß folgt:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial\varrho}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\cos\psi - \frac{\partial}{\partial\psi}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\frac{\sin\psi}{\varrho},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial\varrho}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\sin\psi + \frac{\partial}{\partial\psi}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\frac{\cos\psi}{\varrho}.$$

Hierfür aber läßt sich, da ψ bei der partiellen Differentiation nach ϱ als Konstante zu behandeln ist, schreiben:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial\varrho}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cos\psi\right) + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial}{\partial\psi}\left(-\frac{\partial u}{\partial x}\sin\psi\right) + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\cos\psi}{\varrho},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial\varrho}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\sin\psi\right) + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial}{\partial\psi}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\cos\psi\right) + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\sin\psi}{\varrho}.$$

Addieren wir diese Werte, so treten die Summen

$$\frac{\partial u}{\partial x}\cos\psi + \frac{\partial u}{\partial y}\sin\psi \quad \text{und} \quad -\frac{\partial u}{\partial x}\sin\psi + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\psi$$

auf, deren Werte nach (5) gleich

$$\frac{\partial u}{\partial\varrho} \quad \text{und} \quad \frac{\partial u}{\partial\psi}\frac{1}{\varrho}$$

sind. Folglich kommt:

$$(6)\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial\varrho^2} + \frac{1}{\varrho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\psi^2} + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial u}{\partial\varrho}.$$

Wenn wir also z beibehalten, aber $x = \varrho\cos\psi$ und $y = \varrho\sin\psi$ setzen, so wird:

$$(7)\qquad S = \frac{\partial^2 u}{\partial\varrho^2} + \frac{1}{\varrho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\psi^2} + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial u}{\partial\varrho} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

Jetzt führen wir, indem wir ψ beibehalten, statt z und ϱ vermöge (4) die neuen Veränderlichen r und θ ein. Weil die Formeln (4) aus (3) hervorgehen, wenn

$$x,\ y,\ \varrho,\ \psi \quad \text{durch} \quad z,\ \varrho,\ r,\ \theta$$

ersetzt werden, so folgt, daß analog (6) die Beziehung besteht:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \varrho^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r},$$

ebenso, daß analog der zweiten Gleichung (5) die Beziehung gilt:

$$\frac{\partial u}{\partial \varrho} = \frac{\partial u}{\partial r}\sin\theta + \frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{\cos\theta}{r}.$$

Diese beiden Ausdrücke treten in (7) als Summanden auf.

Also ist:

$$S = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{\varrho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \psi^2} + \frac{\partial u}{\partial r}\frac{\sin\theta}{\varrho} + \frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{\cos\theta}{r\varrho}.$$

Setzen wir schließlich noch $\varrho = r\sin\theta$ aus (4) ein, so kommt in anderer Anordnung der Glieder die gesuchte Formel heraus:

$$S = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial \psi^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\cos\theta}{r^2\sin\theta}\frac{\partial u}{\partial \theta}.$$

Da übrigens

$$\frac{\partial^2(ru)}{\partial r^2} = \frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r} + u\right) = r\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + 2\frac{\partial u}{\partial r}$$

und

$$\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial \theta}\right) = \sin\theta\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \cos\theta\frac{\partial u}{\partial \theta}$$

ist, kann man auch schreiben:

$$r^2 S = r\frac{\partial^2(ru)}{\partial r^2} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial \psi^2} + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)}{\partial \theta}.$$

Bei den Anwendungen ist es oft zweckmäßig,

$$\mu = \cos\theta$$

als Veränderliche statt θ einzuführen. Da dann

$$\frac{\partial u}{\partial \theta} = \frac{\partial u}{\partial \mu}\frac{d\mu}{d\theta} = -\sin\theta\frac{\partial u}{\partial \mu}, \quad \text{also} \quad \sin\theta\frac{\partial u}{\partial \theta} = -(1-\mu^2)\frac{\partial u}{\partial \mu}$$

ist, so folgt:

$$\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial \theta}\right) = -\sin\theta\frac{\partial}{\partial \mu}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial \theta}\right) = \sin\theta\frac{\partial}{\partial \mu}\left[(1-\mu^2)\frac{\partial u}{\partial \mu}\right],$$

so daß kommt:

$$r^2 S = r\frac{\partial^2(ru)}{\partial r^2} + \frac{1}{1-\mu^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \psi^2} + \frac{\partial}{\partial \mu}\left[(1-\mu^2)\frac{\partial u}{\partial \mu}\right].$$

99. Allgemeine Einführung neuer unabhängiger und neuer abhängiger Veränderlicher. Das in gewissem Sinne allgemeinste Transformationsproblem ist das folgende:

Es seien $x_1, x_2, \ldots x_n$ *die unabhängigen Veränderlichen und* $y_1, y_2, \ldots y_m$ *von ihnen abhängige Veränderliche. Ferner sei* V *eine Funktion der* x, *der* y *und der partiellen Ableitungen der* y *nach den* x *bis zu einer beliebigen Ordnung. Es sollen neue* $n + m$ *Veränderliche* $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n, \eta_1, \eta_2, \ldots \eta_m$ *eingeführt werden, indem die* x *und* y *gleich* $n + m$ *voneinander unabhängigen gegebenen Funktionen der* ξ *und* η *gesetzt werden:*

$$x_i = \varphi_i(\xi_1, \ldots \xi_n, \eta_1, \ldots \eta_m) \qquad (i = 1, 2, \ldots n), \tag{1}$$

$$y_k = \psi_k(\xi_1, \ldots \xi_n, \eta_1, \ldots \eta_m) \qquad (k = 1, 2, \ldots m). \tag{2}$$

Diese Gleichungen sollen also nach Satz 3 in Nr. 79 auch nach den ξ und η auflösbar sein:

$$\xi_j = \Phi_j(x_1, \ldots x_n, y_1, \ldots y_m) \qquad (j = 1, 2, \ldots n), \tag{3}$$

$$\eta_l = \Psi_l(x_1, \ldots x_n, y_1, \ldots y_m) \qquad (l = 1, 2, \ldots m). \tag{4}$$

Stellen wir uns unter den y *irgend welche* Funktionen der x vor, so werden die ξ und η nach (3) und (4) Funktionen der x allein. Wir nehmen insbesondere an, daß auch dann noch die n Funktionen (3), die nunmehr $x_1, x_2, \ldots x_n$ auch in $y_1, y_2, \ldots y_m$ enthalten, voneinander unabhängige Funktionen von $x_1, x_2, \ldots x_n$ seien, so daß wir sagen können, daß vermöge (1) und (2) oder (3) und (4) solche $n + m$ neue Veränderliche ξ und η eingeführt werden, von denen wir nunmehr die ξ als unabhängige Veränderliche betrachten dürfen, während die η von den ξ abhängen. Die soeben gemachte Voraussetzung bedeutet nach Satz 4 in Nr. 80, daß die Funktionaldeterminante der Φ nach den x unter der Annahme, daß die y *irgend welche Funktionen* der x bedeuten, von Null verschieden sein soll. Diese Determinante ist n-reihig und hat als i^{tes} Glied der j^{ten} Zeile dieses:

$$\frac{\partial \Phi_j}{\partial x_i} + \frac{\partial \Phi_j}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x_i} + \frac{\partial \Phi_j}{\partial y_2}\frac{\partial y_2}{\partial x_i} + \cdots + \frac{\partial \Phi_j}{\partial y_m}\frac{\partial y_m}{\partial x_i}. \tag{5}$$

Wählen wir z. B. die y gleich Konstanten, so reduziert sich die Funktionaldeterminante auf die der Größen $\partial \Phi_j : \partial x_i$, so

daß wir also voraussetzen, *daß die Funktionen Φ in* (3) *hinsichtlich $x_1, x_2, \ldots x_n$ allein voneinander unabhängig seien:*

$$\begin{pmatrix} \Phi_1 & \Phi_2 \ldots & \Phi_n \\ x_1 & x_2 \ldots & x_n \end{pmatrix} \neq 0.$$

Ist diese Voraussetzung erfüllt, so ist auch diejenige Determinante, deren allgemeines Glied in (5) angegeben wurde, für *beliebige* Funktionen y der x nicht gleich Null.

Wollen wir nun in V die neuen Veränderlichen ξ, η einführen, so müssen wir finden, wie sich die partiellen Ableitungen der y nach den x durch die der η nach den ξ ausdrücken. Dazu verfahren wir so: Von (1) und (2) bilden wir die vollständigen Differentiale:

$$dx_i = \sum_1^n {}_j \frac{\partial \varphi_i}{\partial \xi_j} d\xi_j + \sum_1^m {}_l \frac{\partial \varphi_i}{\partial \eta_l} d\eta_l, \quad dy_k = \sum_1^n {}_j \frac{\partial \psi_k}{\partial \xi_j} d\xi_j + \sum_1^m {}_l \frac{\partial \psi_k}{\partial \eta_l} d\eta_l,$$

indem wir uns zur Abkürzung der Formeln des *Summenzeichens* Σ bedienen, dessen Bedeutung definiert wird durch:

$$\sum_1^n {}_j u_j = u_1 + u_2 + \cdots + u_n.$$

Da die η Funktionen der ξ sind, die y Funktionen der x, so haben wir einzusetzen:

$$d\eta_l = \sum_1^n {}_j \frac{\partial \eta_l}{\partial \xi_j} d\xi_j, \quad dy_k = \sum_1^n {}_i \frac{\partial y_k}{\partial x_i} dx_i,$$

so daß sich ergibt:

$$dx_i = \sum_1^n {}_j \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial \xi_j} + \sum_1^m {}_l \frac{\partial \varphi_i}{\partial \eta_l} \frac{\partial \eta_l}{\partial \xi_j} \right) d\xi_j \quad (i = 1, 2, \ldots n), \tag{6}$$

$$\sum_1^n {}_i \frac{\partial y_k}{\partial x_i} dx_i = \sum_1^n {}_j \left(\frac{\partial \psi_k}{\partial \xi_j} + \sum_1^m {}_l \frac{\partial \psi_k}{\partial \eta_l} \frac{\partial \eta_l}{\partial \xi_j} \right) d\xi_j \quad (k = 1, 2, \ldots m). \tag{7}$$

Nach den gemachten Voraussetzungen ist die Funktionaldeterminante der φ hinsichtlich der ξ nicht gleich Null, daher auch nicht die n-reihige Determinante, deren j^{tes} Glied in der i^{ten} Zeile gleich

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial \xi_j} + \sum_1^m {}_l \frac{\partial \varphi_i}{\partial \eta_l} \frac{\partial \eta_l}{\partial \xi_j}$$

ist. Die n Gleichungen (6) sind folglich nach $d\xi_1, d\xi_2, \dots d\xi_n$ auflösbar. Sie ergeben für diese Differentiale Ausdrücke von der Form:

$$(8) \quad d\xi_j = \alpha_{j1}\,dx_1 + \alpha_{j2}\,dx_2 + \cdots + \alpha_{jn}\,dx_n \qquad (j = 1, 2, \dots n),$$

worin die α Funktionen der ξ, η und der partiellen Ableitungen erster Ordnung der η nach den ξ sind. Wenn wir sie in (7) einsetzen, so gehen n in $dx_1, dx_2, \dots dx_n$ lineare Gleichungen hervor, in denen jedes dx_i links denselben Koeffizienten wie rechts haben muß, weil $dx_1, dx_2, \dots dx_n$ beliebige Konstanten sind. Wir gelangen durch Vergleichen dieser Koeffizienten zu Gleichungen von der Form:

$$\frac{\partial y_k}{\partial x_i} = \sum_1^n{}^j \left(\frac{\partial \psi_k}{\partial \xi_j} + \sum_1^m{}^l \frac{\partial \psi_k}{\partial \eta_l}\frac{\partial \eta_l}{\partial \xi_j} \right) \alpha_{ji} \qquad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \dots n, \\ k = 1, 2, \dots m \end{pmatrix}.$$

Hiermit sind die partiellen Ableitungen erster Ordnung der y nach den x ausgedrückt durch die ξ, die η und die partiellen Differentialquotienten erster Ordnung der η nach den ξ. Wir wollen diese Ausdrücke symbolisch so schreiben:

$$\frac{\partial y_k}{\partial x_i} = F_{ki}\left(\xi_1, \dots \xi_n, \ \eta_1, \dots \eta_m, \ \frac{\partial \eta_1}{\partial \xi_1}, \dots \frac{\partial \eta_m}{\partial \xi_n} \right).$$

Um nun die partiellen Ableitungen *zweiter* Ordnung der y nach den x zu berechnen, bilden wir hiervon das vollständige Differential:

$$\frac{\partial^2 y_k}{\partial x_i \partial x_1}\,dx_1 + \frac{\partial^2 y_k}{\partial x_i \partial x_2}\,dx_2 + \cdots + \frac{\partial^2 y_k}{\partial x_i \partial x_n}\,dx_n$$

$$= \sum_1^n{}^j \frac{\partial F_{ki}}{\partial \xi_j}\,d\xi_j + \sum_1^m{}^l \frac{\partial F_{ki}}{\partial \eta_l}\,d\eta_l + \sum_1^n{}^j \sum_1^m{}^l \frac{\partial F_{ki}}{\partial \left(\frac{\partial \eta_l}{\partial \xi_j} \right)}\, d\frac{\partial \eta_l}{\partial \xi_j},$$

worin wir wieder

$$d\eta_l = \sum_1^n{}^j \frac{\partial \eta_l}{\partial \xi_j}\,d\xi_j$$

und außerdem

$$d\frac{\partial \eta_l}{\partial \xi_j} = \frac{\partial^2 \eta_l}{\partial \xi_j \partial \xi_1}\,d\xi_1 + \frac{\partial^2 \eta_l}{\partial \xi_j \partial \xi_2}\,d\xi_2 + \cdots + \frac{\partial^2 \eta_l}{\partial \xi_j \partial \xi_n}\,d\xi_n$$

einsetzen. Alsdann treten rechts nur die Differentiale $d\xi_1, \ldots d\xi_n$ auf, für die wir wieder die Werte (8) substituieren. Nun geht eine in $dx_1, \ldots dx_n$ lineare Gleichung hervor, bei der die Koeffizientenvergleichung links und rechts ohne weiteres die gesuchten Ableitungen zweiter Ordnung der y nach den x liefert.

Entsprechend finden wir die höheren Ableitungen.

100. Die Legendresche Transformation. Es kann auch vorkommen, daß man Größen als neue Veränderliche einführt, die mit den ursprünglichen Veränderlichen durch Differentialgleichungen verknüpft sind. Im Falle *einer* unabhängigen Veränderlichen gibt Nr. 95 ein Beispiel, im Falle *zweier* unabhängiger Veränderlicher wählen wir als Beispiel eine von *Legendre* zuerst benutzte Transformation, die in der Theorie der partiellen Differentialgleichungen angewandt wird.

Verstehen wir unter z *irgend eine* Funktion von zwei unabhängigen Veränderlichen x und y, so werden auch ihre partiellen Ableitungen erster Ordnung nach x und y, die wir wieder mit p und q bezeichnen wollen, Funktionen von x und y sein. Wir können sie daher als neue unabhängige Veränderliche benützen, sobald sie voneinander unabhängig sind, d. h. sobald die Funktionaldeterminante

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial p}{\partial x} & \dfrac{\partial p}{\partial y} \\ \dfrac{\partial q}{\partial x} & \dfrac{\partial q}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} & \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} \end{vmatrix} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial z\, \partial y}\right)^2 \neq 0$$

ist. Dies wollen wir voraussetzen. Alsdann dürfen wir ferner irgend eine Funktion von x, y, z, p, q als neue abhängige Veränderliche betrachten, da sie ja als Funktion von x und y allein aufzufassen ist, weil z, p und q Funktionen von x und y sind. Die Legendresche Transformation besteht nun darin, daß p und q als neue unabhängige und

$$u = px + qy - z$$

als neue abhängige Veränderliche dienen sollen. Es handelt sich daher darum, die Ableitungen von z nach x und y durch p, q, u und durch die Ableitungen von u nach p und q auszudrücken. Die von erster Ordnung sind schon durch

$$(1) \qquad \frac{\partial z}{\partial x} = p, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = q$$

in der gewünschten Weise ausgedrückt. Um es auch mit denen von zweiter Ordnung zu tun, betrachten wir die vollständigen Differentiale der ursprünglichen und der neuen abhängigen Veränderlichen z bzw. u:

$$dz = p\,dx + q\,dy, \quad du = p\,dx + q\,dy - dz + x\,dp + y\,dq,$$

von denen sich das zweite wegen des ersten auf

$$(2) \qquad du = x\,dp + y\,dq$$

reduziert, so daß

$$(3) \qquad \frac{\partial u}{\partial p} = x, \quad \frac{\partial u}{\partial q} = y$$

ist, wenn u, wie verlangt, als Funktion von p und q aufgefaßt wird. Bei derselben Auffassung bilden wir hiervon weiterhin die vollständigen Differentiale:

$$(4) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial p^2}\,dp + \frac{\partial^2 u}{\partial p\,\partial q}\,dq = dx, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial p\,\partial q}\,dp + \frac{\partial^2 u}{\partial q^2}\,dq = dy.$$

Andererseits bilden wir von (1) die vollständigen Differentiale, indem wir z als Funktion von x und y auffassen:

$$(5) \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\,dx + \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\,dy = dp, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\,dx + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\,dy = dq.$$

Setzen wir hierin die aus (4) folgenden Werte von dp und dq ein, so ergeben sich zwei Gleichungen in dx und dy, die für alle Werte von dx und dy gelten müssen. Die Vergleichung der Koeffizienten auf beiden Seiten der Gleichung gibt alsdann sofort:

$$(6) \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{1}{\Delta}\frac{\partial^2 u}{\partial q^2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = -\frac{1}{\Delta}\frac{\partial^2 u}{\partial p\,\partial q}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{1}{\Delta}\frac{\partial^2 u}{\partial p^2},$$

wo zur Abkürzung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial p^2}\frac{\partial^2 u}{\partial q^2} - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial p\,\partial q}\right)^2 = \Delta$$

gesetzt worden ist. Durch (6) werden die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung von z nach x und y dargestellt mittels der partiellen Ableitungen zweiter Ordnung von u nach p und q.

100]

Wollen wir umgekehrt die Ableitungen von u nach p und q durch die ursprünglichen Veränderlichen x, y, z und die Ableitungen von z nach x und y darstellen, so haben wir nach (3) und (6):

$$(7) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial p} = x, \quad \dfrac{\partial u}{\partial q} = y, \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial p^2} = \Delta \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \quad \dfrac{\partial^2 u}{\partial p \, \partial q} = -\Delta \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \, \partial y}, \quad \dfrac{\partial^2 u}{\partial q^2} = \Delta \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \end{cases}$$

woraus dann folgt, daß

$$\frac{1}{\Delta} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \, \partial y}\right)^2$$

ist.

Fünftes Kapitel.

Entwicklung der Funktionen in Potenzreihen.

§ 1. Über unendliche Reihen überhaupt.

101. Definition der Konvergenz. *Unendliche Reihe* nennt man eine endlose Folge von Zahlen, die nach irgend einer Vorschrift nacheinander zu berechnen sind. Wir beschäftigen uns in diesem Kapitel nur mit solchen unendlichen Reihen, deren Glieder sämtlich reell sind, vgl. Nr. 2.

Definition: Eine unendliche Reihe $u_0, u_1, u_2, u_3, \ldots u_n, \ldots$ *heißt konvergent, wenn die Summe der n ersten Glieder*

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{n-1}$$

bei unbegrenzt wachsendem Index n einen bestimmten endlichen Grenzwert S hat. Ist dies der Fall, so heißt S die Summe der Reihe. Andernfalls heißt die Reihe divergent.

Beispiel: Bei der *geometrischen Progression* $a, ax, ax^2, ax^3, \ldots ax^n, \ldots$ ist

$$S_n = a(1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1}) = \frac{a}{1-x}(1 - x^n).$$

Im Falle $|x| < 1$ ist der Grenzwert von x^n für unbegrenzt wachsendes n gleich Null und daher

$$\lim_{n=\infty} S_n = \frac{a}{1-x}.$$

Die geometrische Progression konvergiert also für $|x| < 1$. Offenbar ist sie divergent für $|x| > 1$, da dann x^n und mithin auch S_n für unbegrenzt wachsendes n nach Unendlich strebt. Für $x = +1$ ist $S_n = na$, also der Grenzwert Unendlich. Für $x = -1$ ist $S_n = a(1 - 1 + 1 - \cdots \pm 1)$, so daß S_n keinen *bestimmten* Grenzwert hat. Daher:

Satz 1: Die geometrische Progression $a, ax, ax^2, \ldots ax^n, \ldots$ *konvergiert dann und nur dann, wenn* $|x| < 1$ *ist. Sie hat alsdann die Summe* $a:(1-x)$.

102. Kennzeichen der Konvergenz. Die Summe der n ersten Glieder

$$S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1}$$

einer unendlichen Reihe $u_0, u_1, \ldots u_n, \ldots$ ist eine *Funktion des Index* n, dessen Variabilitätsbereich der aller ganzen positiven Zahlen ist. Nach der in Nr. 18 gegebenen Definition des Grenzwertes für unbegrenzt wachsende Werte der Veränderlichen ist die Aussage, daß die Reihe konvergiert, d. h. eine bestimmte endliche Summe S hat, mithin gleichbedeutend mit dieser:

Wird eine beliebig kleine positive Zahl σ vorgegeben, so gibt es stets einen Index n derart, daß

$$|S_m - S| < \sigma$$

wird für jedes ganze positive m, das mindestens so groß wie n ist, also für $m = n + p$, so daß für jedes ganze positive p

$$|S_{n+p} - S| < \sigma$$

wird, insbesondere auch für $p = 0$:

$$|S_n - S| < \sigma.$$

Hieraus ziehen wir einen Schluß: Nach Satz 2 in Nr. 4 ist

$$|(S_{n+p} - S) - (S_n - S)| \leqq |S_{n+p} - S| + |S_n - S|,$$

so daß folgt:

$$(1) \qquad |S_{n+p} - S_n| < 2\sigma.$$

Bezeichnen wir 2σ mit τ, so sehen wir also:

Wenn die unendliche Reihe konvergiert, so gibt es zu jeder beliebig kleinen vorgeschriebenen positiven Zahl τ einen Indexwert n derart, daß die Summe von *beliebig vielen aufeinanderfolgenden und mit* u_n *beginnenden Gliedern* $u_n, u_{n+1}, \ldots u_{n+p-1}$ der Reihe zwischen $-\tau$ und $+\tau$ liegt:

$$(2) \qquad -\tau < u_n + u_{n+1} + \cdots + u_{n+p-1} < \tau.$$

Jetzt wollen wir die Betrachtung *umkehren.* Wir setzen *nicht* mehr voraus, daß die Reihe konvergiere. Dagegen soll es zu jeder beliebig klein gewählten positiven Zahl τ einen

Indexwert n derart geben, daß für jedes positive ganze p die Bedingung (2) erfüllt ist. Wir wollen beweisen, daß die Reihe alsdann konvergiert.

Zu diesem Zwecke wählen wir irgend eine solche endlose Folge von lauter *beständig abnehmenden* positiven Zahlen

$$\tau_1 > \tau_2 > \tau_3 > \cdots > \tau_i \cdots,$$

die nach Null strebt (wie z. B. die Folge $1, 1/2, 1/3, \ldots 1/i, \ldots$). Es seien $n_1, n_2, n_3, \ldots n_i, \ldots$ diejenigen zu diesen Werten von τ gehörigen Indexwerte, für die die zugehörigen Voraussetzungen (2) bestehen, so daß allgemein

$$-\tau_i < u_{n_i} + u_{n_i+1} + \cdots + u_{n_i+p-1} < \tau_i$$

ist, wofür wir auch schreiben können:

$$(3)\quad \begin{cases} S_{n_1} - \tau_1 < S_m < S_{n_1} + \tau_1 & \text{für} \quad m > n_1, \\ S_{n_2} - \tau_2 < S_m < S_{n_2} + \tau_2 & \text{für} \quad m > n_2, \\ S_{n_3} - \tau_3 < S_m < S_{n_3} + \tau_3 & \text{für} \quad m > n_3, \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \\ S_{n_i} - \tau_i < S_m < S_{n_i} + \tau_i & \text{für} \quad m > n_i, \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \end{cases}$$

Betrachten wir jetzt die Reihe der Zahlen:

$$S_{n_1} - \tau_1, \quad S_{n_2} - \tau_2, \quad S_{n_3} - \tau_3, \cdots S_{n_i} - \tau_i, \cdots.$$

Die erste wollen wir mit p_1 bezeichnen, die größere von den beiden ersten mit p_2, die größte unter den drei ersten mit p_3 usw., allgemein die größte unter den i ersten mit p_i. Ferner betrachten wir die Reihe der Zahlen:

$$S_{n_1} + \tau_1, \quad S_{n_2} + \tau_2, \quad S_{n_3} + \tau_3, \cdots S_{n_i} + \tau_i, \cdots.$$

Die erste werde mit q_1 bezeichnet, die kleinere von den beiden ersten mit q_2, die kleinste unter den drei ersten mit q_3 usw., allgemein die kleinste unter den i ersten mit q_i. Alsdann ist

$$p_1 \leqq p_2 \leqq p_3 \leqq \cdots \leqq p_i \leqq \cdots$$

und

$$q_1 \geqq q_2 \geqq q_3 \geqq \cdots \geqq q_i \geqq \cdots$$

Ferner ist

$$p_1 < q_1, \quad p_2 < q_2, \quad p_3 < q_3, \cdots p_i < q_i, \cdots.$$

Außerdem:

$$q_1 - p_1 = 2\tau_1, \quad q_2 - p_2 \leqq 2\tau_2, \cdots q_i - p_i \leqq 2\tau_i, \cdots.$$

Denn z. B. $2\tau_2$ ist das kleinere der beiden Intervalle $2\tau_1$ und $2\tau_2$, ferner $2\tau_3$ das kleinste der drei Intervalle $2\tau_1$, $2\tau_2$, $2\tau_3$ usw., weil $\tau_1 > \tau_2 > \tau_3 \ldots$ angenommen wurde.

Wählen wir nun den Index m größer als alle i Indizes $n_1, n_2, \ldots n_i$, so lehren die ersten i Ungleichungen (3), daß

$$p_1 < S_m < q_1, \quad p_2 < S_m < q_2, \ldots p_i < S_m < q_i$$

ist. Die Summe S_m ist also zwischen zwei Folgen $p_1, p_2, \ldots p_i, \ldots$ und $q_1, q_2, \ldots q_i, \ldots$ eingeschlossen, die genau so wie die in Nr. 2 betrachteten Folgen Intervalle $q_1 - p_1$, $q_2 - p_2, \ldots q_i - p_i$ haben, von denen jedes folgende innerhalb des vorhergehenden liegt, weil die Summe S_m zwischen p_i und q_i gelegen ist. Da die Reihe der gewählten Größen $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \ldots$ unbegrenzt bis zur Null abnehmen soll und $q_i - p_i \leqq 2\tau_i$ ist, so folgt:

Je größer wir i annehmen, um so enger rücken die Enden p_i und q_i der beiden Zahlenfolgen p und q aneinander. Zwischen ihnen liegt S_m, wenn m größer als $n_1, n_2, \ldots n_i$ gewählt wird. Nach Nr. 2 definieren jene beiden Folgen $p_1, p_2, \ldots p_i, \ldots$ und $q_1, q_2, \ldots q_i, \ldots$ eine *bestimmte endliche Zahl S.* Folglich wird

$$\lim_{m=\infty} S_m = S.$$

Der einzige Unterschied gegenüber der Betrachtung in Nr. 2, wo wir die irrationalen Zahlen erst einführten, ist der, daß dort die Folgen $p_1, p_2, \ldots p_i, \ldots$ und $q_1, q_2, \ldots q_i, \ldots$ aus lauter rationalen Zahlen bestanden, was jetzt nicht der Fall zu sein braucht und ohne Belang für die Definition der Zahl S als Grenze zwischen den p und q ist. Es hat sich somit ergeben:

Satz 2: Wenn die unendliche Reihe $u_0, u_1, u_2, \ldots u_n, \ldots$ konvergiert, so gibt es, sobald eine beliebig kleine positive Zahl τ vorgeschrieben wird, stets einen Indexwert n derart, daß für jedes ganze positive p

$$|u_n + u_{n+1} + \cdots + u_{n+p-1}| < \tau$$

wird. Umgekehrt: Liegt eine unendliche Reihe $u_0, u_1, u_2, \ldots u_n, \ldots$ vor und ist diese Bedingung erfüllt, so ist die Reihe auch konvergent.

[**102**

103. Folgerungen. Ist τ wie in dem letzten Satze eine beliebig kleine vorgegebene positive Zahl und n der zugehörige Indexwert, so daß im Falle einer konvergenten Reihe für jedes positive p

$$|u_n + u_{n+1} + \cdots + u_{n+p-1}| < \tau$$

ist, so folgt, wenn p durch $p + q$ ersetzt wird, auch:

$$|u_n + u_{n+1} + \cdots + u_{n+p+q-1}| < \tau.$$

Aus Satz 2 in Nr. 4 folgt aber:

$$|u_n + u_{n+1} + \cdots + u_{n+p+q-1} - (u_n + u_{n+1} + \cdots + u_{n+p-1})|$$
$$\leqq |u_n + u_{n+1} + \cdots + u_{n+p+q-1}| + |u_n + u_{n+1} + \cdots + u_{n+p-1}|,$$

so daß

$$(1) \qquad |u_{n+p} + u_{n+p+1} + \cdots + u_{n+p+q-1}| < 2\tau$$

ist. Daraus ergibt sich insbesondere für $q = 1$, wenn wir 2τ mit σ bezeichnen:

Satz 3: Ist die unendliche Reihe $u_0, u_1, \ldots u_n, \ldots$ konvergent und σ eine beliebig kleine vorgegebene positive Zahl, so sind alle Glieder der Reihe von einem gewissen Gliede an absolut genommen kleiner als σ, so daß

$$\lim_{n=\infty} u_n = 0$$

wird.

Hieraus folgt sofort:

Satz 4: Streben die Glieder einer unendlichen Reihe $u_0, u_1, \ldots u_n, \ldots$ nicht dem Grenzwerte Null zu, haben sie also entweder einen von Null verschiedenen oder keinen bestimmten Grenzwert $\lim u_n$ für $\lim n = \infty$, so ist die Reihe divergent.

Ein Beispiel zu dem Falle, daß die Glieder keinen bestimmten Grenzwert haben, begegnete uns schon in Nr. 101, nämlich bei der Reihe $1, -1, +1, -1, +1, \cdots$.

Aber die Bedingung $\lim u_n = 0$ für $\lim n = \infty$ ist *kein hinreichendes* Kennzeichen für die Konvergenz. Denn z. B. bei der Reihe

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots \frac{1}{n}, \ldots$$

ist augenscheinlich $\lim u_n = 0$, aber die Reihe divergiert. In der Tat ist ja

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} > \frac{2}{4} = \frac{1}{2},$$

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} > \frac{4}{8} = \frac{1}{2},$$

$$\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \cdots + \frac{1}{16} > \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$$

usw. Die Summation der Reihe gibt daher $+\infty$.

Ist die Reihe $u_0, u_1, \ldots u_n, \ldots$ konvergent und c irgend eine Zahl, so folgt, wenn S_n die Summe der n ersten Glieder bedeutet und S die Summe der Reihe bezeichnet, aus Satz 31 in Nr. 24 sofort:

$$\lim_{n=\infty}(cu_0 + cu_1 + \cdots + cu_{n-1}) = c \lim_{n=\infty} S_n = cS.$$

Also:

Satz 5: Multipliziert man alle Glieder einer konvergenten Reihe mit der nämlichen Zahl c, so entsteht wieder eine konvergente Reihe. Ihre Summe ist das c-fache der Summe der ursprünglichen Reihe.

Es mögen $u_0, u_1, \ldots u_n \ldots$ und $v_0, v_1, \ldots v_n, \ldots$ konvergente Reihen mit den Summen S und S' sein. Bezeichnen S_n und S_n' die Summen ihrer n ersten Glieder, so folgt aus Satz 30 in Nr. 24:

$$\lim_{n=\infty}[(u_0 + v_0) + (u_1 + v_1) + \cdots + (u_{n-1} + v_{n-1})] = \lim_{n=\infty}(S_n + S_n')$$
$$= \lim_{n=\infty} S_n + \lim_{n=\infty} S_n' = S + S'.$$

Also:

Satz 6: Wenn man entsprechende Glieder zweier konvergenter Reihen $u_0, u_1, \ldots u_n, \ldots$ und $v_0, v_1, \ldots v_n, \ldots$ addiert, so geht wieder eine konvergente Reihe $u_0 + v_0, u_1 + v_1, \ldots u_n + v_n, \ldots$ hervor. Ihre Summe ergibt sich durch Addition der Summen der beiden ursprünglichen Reihen.

Mehrmalige Anwendung dieses Satzes gibt:

Satz 7: Derselbe Satz gilt, wenn man eine begrenzte Anzahl von konvergenten Reihen gliedweise addiert.

104. Unbedingte Konvergenz. Es gilt der

Satz 8: Eine unendliche Reihe $u_0, u_1, \ldots u_n, \ldots$ konvergiert insbesondere dann, wenn die Reihe der absoluten Beträge $|u_0|, |u_1|, \ldots |u_n|, \ldots$ ihrer Glieder konvergiert.

Denn wenn wir Satz 2 in Nr. 102 auf die Reihe der absoluten Beträge anwenden, so gibt es wegen ihrer vorausgesetzten Konvergenz zu jeder noch so kleinen positiven Zahl τ einen Indexwert n derart, daß

$$|u_n| + |u_{n+1}| + \cdots + |u_{n+p-1}| < \tau$$

wird. Die Summe links ist aber nach Satz 2 in Nr. 4 mindestens ebenso groß wie der absolute Betrag von $u_n + u_{n+1} + \cdots + u_{n+p-1}$. Also ist um so mehr:

$$|u_n + u_{n+1} + \cdots + u_{n+p-1}| < \tau,$$

womit die Konvergenz der Reihe $u_0, u_1, \ldots u_n, \ldots$ ebenfalls nach Satz 2 in Nr. 102 bewiesen ist.

Der Satz 8 läßt sich jedoch nicht umkehren; es gibt vielmehr unendliche Reihen, die konvergieren, obwohl es die Reihen der absoluten Beträge nicht tun. Hierfür werden wir nachher ein Beispiel geben. Vorher wollen wir den folgenden Satz beweisen:

Satz 9: Wenn die Glieder einer unendlichen Reihe abwechselnd positiv und negativ sind, ferner ihre absoluten Beträge beständig abnehmen und zwar bis zur Grenze Null, so ist die Reihe konvergent.

Wir betrachten also eine Reihe

$$u_0, \quad -u_1, \quad u_2, \quad -u_3, \ldots,$$

bei der für die absoluten Beträge $u_0, u_1, u_2, u_3, \ldots$ der Glieder die Ungleichungen gelten:

$$u_0 \geqq u_1 \geqq u_2 \geqq u_3 \geqq \cdots \tag{1}$$

und außerdem

$$\lim_{n=\infty} u_n = 0 \tag{2}$$

ist. Alsdann setzen wir:

$$\begin{aligned} p_1 &= u_0 - u_1, & q_1 &= u_0 - u_1 + u_2, \\ p_2 &= u_0 - u_1 + u_2 - u_3, & q_2 &= u_0 - u_1 + u_2 - u_3 + u_4, \\ p_3 &= u_0 - u_1 + u_2 - u_3 + u_4 & q_3 &= u_0 - u_1 + u_2 - u_3 + u_4 \\ &\quad - u_5, & &\quad - u_5 + u_6 \end{aligned}$$

usw. Nach (1) ist $p_2 = p_1 + u_2 - u_3 \geqq p_1$, ferner $p_3 = p_2 +$

$+ u_4 - u_5 \geqq p_2$ usw. Dagegen ist $q_2 = q_1 - (u_3 - u_4) \leqq q_1$, $q_3 = q_2 - (u_5 - u_6) \leqq q_2$ usw. Außerdem ist $q_1 = p_1 + u_2 \geqq p_1$, $q_2 = p_2 + u_4 \geqq p_2 \geqq p_1$ usw. Alle $p_1, p_2, p_3, \ldots$ bilden also eine wachsende, alle $q_1, q_2, q_3, \ldots$ eine abnehmende Folge und kein q ist kleiner als ein p. Ferner ist

$$q_1 - p_1 = u_2, \quad q_2 - p_2 = u_4, \quad q_3 - p_3 = u_6, \cdots,$$

so daß die Intervalle $q_1 - p_1$, $q_2 - p_2, \ldots$ nach (1) immer kleiner werden und nach (2) bis zur Null streben. Nach Nr. 2 also wird durch beide Folgen $p_1, p_2, \ldots$ und $q_1, q_2, \ldots$ eine bestimmte endliche Zahl S definiert als Wert der Summe $u_0 - u_1 + u_2 - - u_3 + \cdots$.

Beispiel: Die unendliche Reihe $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \cdots \pm \frac{1}{n}, \cdots$ ist hiernach konvergent. Dagegen ist die Reihe der absoluten Beträge $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \cdots \frac{1}{n}, \cdots$, wie sich in Nr. 103 ergab, divergent. Wir haben also einen Fall vor uns, der zeigt, *daß sich der Satz 8 nicht umkehren läßt.*

Hiernach kann man alle konvergenten unendlichen Reihen in zwei Klassen einteilen, nämlich in solche, bei denen auch die Reihe der absoluten Beträge der Glieder konvergiert, und solche, bei denen dies nicht der Fall ist. Die der ersten Klasse heißen aus einem Grunde, der später (in Nr. 109) einleuchten wird, *unbedingt konvergent*, die der zweiten Klasse *bedingt konvergent.* Z. B. die geometrische Progression $a, ax, ax^2, ax^3, \ldots$ ist nach Satz 1 in Nr. 101 für $|x| < 1$ unbedingt konvergent, dagegen die Reihe $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \cdots$ nur bedingt konvergent.

Liegt eine unendliche Reihe mit lauter *positiven* Gliedern vor, so sind nur zwei Fälle denkbar: Entweder konvergiert sie unbedingt, oder aber sie divergiert. Die Divergenz besteht im zweiten Falle darin, daß die Summe S_n der n ersten Glieder der Reihe mit endlos wachsendem n über jeden endlichen Wert wächst, da $S_{n+1} \geqq S_n$ ist, während der Fall, daß S_n einen *unbestimmten* Grenzwert hat, wie es ja sonst mitunter vorkommt (vgl. das Beispiel in Nr. 101 für $x = -1$), hier garnicht auftreten kann.

105. Hilfsmittel zur Feststellung der Konvergenz oder Divergenz. Wir haben zwar in Satz 2 in Nr. 102 ein notwendiges und hinreichendes Merkmal der Konvergenz einer unendlichen Reihe gewonnen; jedoch bei den Anwendungen auf bestimmte Fälle wird es meistens nicht möglich sein, unmittelbar die Summen $u_n + u_{n+1} + \cdots + u_{n+p-1}$ daraufhin zu untersuchen, ob sie die Bedingungen des Satzes erfüllen. Vielmehr muß man andere Reihen, deren Konvergenz oder Divergenz schon feststeht, zur *Vergleichung* heranziehen, und zwar auf Grund des folgenden Satzes:

Satz 10: Wenn von zwei unendlichen Reihen $u_0, u_1, \ldots u_n, \ldots$ *und* $v_0, v_1, \ldots v_n, \ldots$ *die zweite lauter positive Glieder hat und konvergent ist und wenn überdies die absoluten Beträge der Glieder der ersten Reihe nicht größer als die entsprechenden Glieder der zweiten Reihe sind, also jedes* $|u_n| \leqq v_n$ *ist, so konvergiert die erste unbedingt. — Wenn dagegen die zweite Reihe mit lauter positiven Gliedern divergiert und die absoluten Beträge der Glieder der ersten Reihe nicht kleiner als die entsprechenden Glieder der zweiten Reihe sind, also jedes* $|u_n| \geqq v_n$ *ist, so divergiert die Reihe* $|u_0|, |u_1|, \ldots |u_n|, \ldots$ *der absoluten Beträge der Glieder der ersten Reihe ebenfalls.*

Der Beweis ist einfach: Wäre im ersten Falle die Reihe

$$|u_0|, \ |u_1|, \ |u_2|, \ldots$$

divergent, so würde die Summe von lauter positiven Zahlen:

$$|u_0| + |u_1| + \cdots + |u_n|$$

mit wachsendem n über jede Grenze wachsen, um so mehr also die Summe $v_0 + v_1 + \cdots + v_n$, was der Voraussetzung widerspricht. Im zweiten Falle wächst die Summe $v_0 + v_1 + \cdots + v_n$ mit wachsendem n über jede Grenze, um so mehr also die Summe

$$|u_0| + |u_1| + \cdots + |u_n|.$$

Aus dem Satze 10 können wir nun folgern:

Satz 11: Die unendliche Reihe $u_0, u_1, \ldots u_n, \ldots$ *konvergiert unbedingt, wenn für alle Werte von* n*, die größer als ein bestimmter Index* m *sind, der Quotient* $|u_{n+1} : u_n|$ *kleiner als eine positive Zahl* k *wird, die selbst kleiner als Eins ist; sie*

divergiert dagegen, wenn der Quotient größer als eine positive Zahl k wird, die selbst größer als Eins ist.

In allen beiden Fällen können wir von den Gliedern $u_0, u_1, \ldots u_m$ absehen, da ja ihre Anzahl begrenzt ist und sie also eine bestimmte Summe haben. Es handelt sich nur noch um die unendliche Reihe $u_{m+1}, u_{m+2}, \ldots u_n, \ldots$.

Betrachten wir den ersten Fall des Satzes: Vorausgesetzt wird, daß

$$\left|\frac{u_{m+1}}{u_m}\right| < k, \quad \left|\frac{u_{m+2}}{u_{m+1}}\right| < k, \cdots \left|\frac{u_{m+p}}{u_{m+p-1}}\right| < k$$

sei, woraus durch Multiplikation folgt:

$$\left|\frac{u_{m+p}}{u_m}\right| < k^p \text{ oder } |u_{m+p}| < k^p\,|u_m|.$$

Daher sind die Glieder der Reihe

$$|u_{m+1}|, \quad |u_{m+2}|, \quad |u_{m+3}|, \cdots$$

kleiner als die entsprechenden Glieder der geometrischen Progression:

$$(1) \qquad k\,|u_m|, \quad k^2\,|u_m|, \quad k^3\,|u_m|, \ldots,$$

wobei $k < 1$ ist. Diese geometrische Progression konvergiert nach Satz 1 in Nr. 101; folglich lehrt der erste Teil des Satzes 10, daß die Reihe $u_{m+1}, u_{m+2}, \ldots$ unbedingt konvergiert.

Im zweiten Falle des Satzes 11 wird vorausgesetzt, daß

$$\left|\frac{u_{m+1}}{u_m}\right| > k, \quad \left|\frac{u_{m+2}}{u_{m+1}}\right| > k, \cdots \left|\frac{u_{m+p}}{u_{m+p-1}}\right| > k$$

sei, woraus durch Multiplikation folgt:

$$|u_{m+p}| > k^p\,|u_m|.$$

Da jetzt $k > 1$ sein soll, divergiert die Progression (1), also auch die Reihe $u_{m+1}, u_{m+2}, \ldots$ nach dem zweiten Teile des Satzes 10.

Wir können entsprechend beweisen:

Satz 12: Die unendliche Reihe $u_0, u_1, \ldots u_n, \ldots$ konvergiert unbedingt, wenn für alle Werte von n, die größer als ein bestimmter Index m sind, die positive n^{te} Wurzel aus dem absoluten Betrage von u_n, also $\sqrt[n]{|u_n|}$, kleiner als eine positive Zahl k

wird, die selbst kleiner als Eins ist; sie divergiert dagegen, wenn diese Wurzel größer als eine positive Zahl k wird, die selbst größer als Eins ist.

Zum Beweise brauchen wir wieder nur die Glieder von u_{m+1} an zu betrachten. Machen wir die Voraussetzungen des ersten Falles des Satzes, so ist:

$$\sqrt[n]{|u_n|} < k, \quad \sqrt[n+1]{|u_{n+1}|} < k, \cdots,$$

d. h.

$$|u_n| < k^n, \quad |u_{n+1}| < k^{n+1}, \cdots.$$

Die geometrische Progression $k^n, k^{n+1}, \ldots$ konvergiert aber, da $k < 1$ ist, so daß also die Schlüsse wie beim Beweise des vorigen Satzes zu machen sind. Im zweiten Falle ist dagegen

$$|u_n| > k^n, \; |u_{n+1}| > k^{n+1}, \cdots,$$

und die geometrische Progression divergiert, da $k > 1$ ist, so daß wie beim Beweise des vorigen Satzes weiter geschlossen wird.

Wir wollen den Sätzen 11 und 12 noch speziellere Formen geben. Dabei bemerken wir allgemein, daß nach der Definition des Grenzwertes A einer Funktion $f(n)$ für endlos wachsendes n in Nr. 18 zu jeder beliebig kleinen positiven Zahl σ eine Zahl m so gefunden werden kann, daß für jedes $n > m$:

$$-\sigma < f(n) - A < \sigma,$$

also

(2) $$f(n) < A + \sigma \quad \text{und} \quad f(n) > A - \sigma$$

ist. Ist $A < 1$, so können wir σ so klein wählen, daß auch $A + \sigma < 1$, etwa gleich k, wird. Ist dagegen $A > 1$, so können wir σ so klein wählen, daß auch $A - \sigma > 1$, etwa gleich k, wird. Im ersten Falle lehrt die erste Ungleichung (2), daß für jedes $n > m$ auch

$$f(n) < k < 1$$

ist, im zweiten Falle lehrt die zweite Ungleichung (2), daß für jedes $n > m$ auch

$$f(n) > k > 1$$

ist.

Wählen wir nun insbesondere für $f(n)$ den Quotienten

$$f(n) = \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|$$

oder die positive n^{te} Wurzel

$$f(n) = \sqrt[n]{|u_n|},$$

so folgt sofort aus unseren Sätzen 11 und 12:

Satz 13: Die unendliche Reihe $u_0, u_1, \ldots u_n, \ldots$ konvergiert unbedingt oder divergiert, wenn es einen bestimmten Grenzwert

$$\lim_{n=\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right|$$

gibt, der kleiner als Eins bzw. größer als Eins ist.

Satz 14: Die unendliche Reihe $u_0, u_1, \ldots u_n, \ldots$ konvergiert unbedingt oder divergiert, wenn es einen bestimmten Grenzwert der positiven Wurzel:

$$\lim_{n=\infty} \sqrt[n]{|u_n|}$$

gibt, der kleiner als Eins bzw. größer als Eins ist.

Diese Sätze sind spezieller als die Sätze 11 und 12, weil in ihnen vorausgesetzt wird, daß $|u_{n+1} : u_n|$ bzw. $\sqrt[n]{|u_n|}$ einen *Grenzwert* habe. Die Sätze 11 und 12 sagen im Falle $k = 1$ und die Sätze 13 und 14 im Falle des Grenzwertes Eins nichts über Konvergenz oder Divergenz aus. In der Tat kann man an Beispielen erkennen, daß dann sowohl Konvergenz als auch Divergenz vorkommen kann.

Beispiel: Es liege die unendliche Reihe von lauter positiven Gliedern vor:

$$\frac{1}{1^{1+\varrho}}, \quad \frac{1}{2^{1+\varrho}}, \quad \frac{1}{3^{1+\varrho}}, \ldots \frac{1}{n^{1+\varrho}}, \ldots,$$

wo $\varrho > -1$ sei (wegen Satz 4, Nr. 103). In diesem Beispiele versagen unsere Sätze. Hier ist nämlich das n^{te} Glied:

$$u_n = \frac{1}{n^{1+\varrho}},$$

folglich

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{1+\varrho},$$

also nach Satz 29 in Nr. 24:

$$\lim_{n=\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \left(\lim_{n=\infty} \frac{n}{n+1}\right)^{1+\varrho} = 1^{1+\varrho} = 1,$$

so daß Satz 13 versagt. Auch Satz 14; denn es ist:

$$\ln \lim_{n=\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n=\infty} \ln \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n=\infty} \frac{\ln u_n}{n} = \lim_{n=\infty} \frac{-(1+\varrho)\ln n}{n}$$

$$= -(1+\varrho) \lim_{n=\infty} \frac{\ln n}{n} = 0.$$

Setzen wir nämlich $n = e^N$, so ist $\ln n : n = N : e^N$, und dieser Bruch hat für $\lim N = \infty$ den Grenzwert Null, da $e > 1$ ist. Mithin ergibt sich, daß $\sqrt[n]{u_n}$ den Grenzwert Eins hat, so daß Satz 14 nicht zur Entscheidung führt.

Durch eine geschickte Anwendung des Satzes 10 läßt sich aber doch entscheiden, für welche Werte von ϱ die Reihe konvergiert oder divergiert. Bezeichnet man nämlich das erste Glied der Reihe mit w_0, die Summe der *beiden* folgenden mit w_1, die Summe der *vier* folgenden mit w_2, die Summe der *acht* folgenden mit w_3 usw., so kommt, *sobald* ϱ *positiv ist*:

$$w_0 = \frac{1}{1^{1+\varrho}} = 1,$$

$$w_1 = \frac{1}{2^{1+\varrho}} + \frac{1}{3^{1+\varrho}} < \frac{2}{2^{1+\varrho}} = \frac{1}{2^\varrho},$$

$$w_2 = \frac{1}{4^{1+\varrho}} + \frac{1}{5^{1+\varrho}} + \frac{1}{6^{1+\varrho}} + \frac{1}{7^{1+\varrho}} < \frac{4}{4^{1+\varrho}} = \frac{1}{4^\varrho},$$

usw. Folglich sind die Glieder der Reihe $w_0, w_1, w_2, \ldots$ nicht größer als die entsprechenden Glieder der Reihe

$$1, \ \frac{1}{2^\varrho}, \ \frac{1}{4^\varrho}, \ \frac{1}{8^\varrho}, \ldots$$

oder also der geometrischen Progression

$$1, \ \frac{1}{2^\varrho}, \ \left(\frac{1}{2^\varrho}\right)^2, \ \left(\frac{1}{2^\varrho}\right)^3, \ldots,$$

die nach Satz 1 in Nr. 101 für positives ϱ konvergiert. Nach Satz 10 konvergiert daher auch die Reihe $w_0, w_1, w_2, \ldots$. Die Summe $w_0 + w_1 + w_2 + \cdots$ ist aber nichts anderes als die Summe $u_0 + u_1 + u_2 + \cdots$ der Glieder der vorgelegten Reihe, die also für $\varrho > 0$ konvergiert.

Ist ϱ *negativ, aber größer als* -1, so bezeichnen wir das erste Glied der vorgelegten Reihe mit w_0, das zweite mit w_1, die Summe der *beiden* folgenden mit w_2, die Summe der *vier*

folgenden mit w_3, die Summe der *acht* folgenden mit w_4 usw. Dann ist, weil ϱ negativ, aber $1 + \varrho$ positiv ist:

$$w_0 = \frac{1}{1^{1+\varrho}} = 1,$$

$$w_1 = \frac{1}{2^{1+\varrho}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^\varrho},$$

$$w_2 = \frac{1}{3^{1+\varrho}} + \frac{1}{4^{1+\varrho}} > \frac{2}{4^{1+\varrho}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4^\varrho},$$

$$w_3 = \frac{1}{5^{1+\varrho}} + \frac{1}{6^{1+\varrho}} + \frac{1}{7^{1+\varrho}} + \frac{1}{8^{1+\varrho}} > \frac{4}{8^{1+\varrho}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8^\varrho},$$

usw. Folglich sind die Glieder der Reihe $w_0, w_1, w_2, \ldots$ nicht kleiner als die entsprechenden Glieder der Reihe

$$1, \quad \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^\varrho}, \quad \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4^\varrho}, \quad \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8^\varrho}, \ldots,$$

die aber vom zweiten Gliede an die geometrische Progression

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^\varrho}, \quad \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2^\varrho}\right)^2, \quad \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2^\varrho}\right)^3, \ldots$$

ist und für negatives ϱ und für $\varrho = 0$ nach Satz 1 in Nr. 101 divergiert, so daß auch die Reihe $w_0, w_1, w_2, \ldots$ nach Satz 10 divergiert. Die Summe $w_0 + w_1 + w_2 + \cdots$ ist aber nichts anderes als die Summe $u_0 + u_1 + u_2 + \cdots$ der Glieder der vorgelegten Reihe, die also für $\varrho \leqq 0$ divergiert. Im Falle $\varrho = 0$ wurde die Divergenz schon gelegentlich in Nr. 103 bewiesen.

106. Beispiele. Bisher haben wir die unendlichen Reihen immer durch Gliederfolgen $u_0, u_1, u_2, \ldots u_n, \ldots$ bezeichnet. Da es uns darauf ankommt, zu untersuchen, ob sie eine Summe haben, so werden wir sie von jetzt ab als Summen $u_0 + u_1 + {} + u_2 + \cdots$ schreiben. *Solche Summe haben aber nur dann einen Sinn, wenn die Reihen wirklich konvergieren.*

1. Beispiel: Die Reihen

$$1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \cdots + \frac{x^n}{1 \cdot 2 \cdots n} + \cdots,$$

$$1 - \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \cdots \pm \frac{x^{2n}}{1 \cdot 2 \cdots (2n)} \mp \cdots,$$

$$x - \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{x^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \cdots \pm \frac{x^{2n+1}}{1 \cdot 2 \cdots (2n+1)} \mp \cdots$$

konvergieren unbedingt für jeden Wert von x. Denn in der ersten Reihe ist das Verhältnis eines Gliedes zum vorhergehenden allgemein $x:n$ und $\lim(|x|:n) = 0$ für $\lim n = \infty$, in der zweiten und dritten Reihe dagegen allgemein $\pm x^2 : n(n+1)$ und ebenfalls $\lim [x^2 : n(n+1)] = 0$ für $\lim n = \infty$, so daß die Reihen nach Satz 13 der vorigen Nummer unbedingt konvergieren.

2. Beispiel: Die Reihe

$$-\frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \cdots \pm \frac{x^n}{n} \mp \cdots$$

konvergiert unbedingt für alle x des Intervalles $-1 < x < +1$; für $x = 1$ konvergiert sie bedingt; für $x = -1$ und jedes andere x divergiert sie. Denn hier ist

$$\lim_{n=\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n=\infty} \frac{|x|}{1 + \frac{1}{n}} = |x|.$$

Nach Satz 13 in Nr. 105 konvergiert die Reihe unbedingt, wenn $|x| < 1$ ist, und divergiert sie, wenn $|x| > 1$ ist. Für $x = +1$ konvergiert sie nach Satz 9 in Nr. 104, aber nur bedingt, da sich die Reihe ihrer absoluten Beträge für $x = -1$ ergibt und wir von ihr schon wissen, daß sie divergiert.

107. Verschiedene Anordnungen bedingt konvergenter Reihen. Wir wollen an einem Beispiele zeigen, daß sich die Summe einer bedingt konvergenten Reihe ändern kann, wenn man ihre Glieder in einer anderen Reihenfolge summiert.

Nach dem Beispiele in Nr. 104 konvergiert die Reihe

$$(1) \qquad 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots \pm \frac{1}{n} \mp \cdots$$

nur bedingt. Wir bilden eine zweite Reihe mit denselben Gliedern, aber in anderer Anordnung, nämlich so, daß jedem negativen Gliede zwei positive vorangehen und folgen, also die Reihe:

$$(2) \qquad 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \cdots,$$

Sie enthält alle Glieder der Reihe (1) und sonst keine. Bezeichnen wir nun mit S_{2n} die Summe aller Glieder der Reihe

(1) bis zum Gliede $-1:4n$, dies eingeschlossen, und mit S_n' die Summe aller Glieder der Reihe (2) bis zum Gliede $-1:2n$, dies eingeschlossen, so ist

$$(3) \qquad S_{2n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{4n-1} - \frac{1}{4n},$$

$$S_n' = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \cdots + \frac{1}{4n-3} + \frac{1}{4n-1} - \frac{1}{2n}$$

oder

$$S_{2n} = \sum_1^n{}^m \left(\frac{1}{4m-3} - \frac{1}{4m-2} + \frac{1}{4m-1} - \frac{1}{4m}\right),$$

$$S_n' = \sum_1^n{}^m \left(\frac{1}{4m-3} + \frac{1}{4m-1} - \frac{1}{2m}\right),$$

also

$$S_n' - S_{2n} = \sum_1^n{}^m \left(\frac{1}{4m-2} + \frac{1}{4m} - \frac{1}{2m}\right) = \frac{1}{2}\sum_1^n{}^m \left(\frac{1}{2m-1} - \frac{1}{2m}\right).$$

Die letzte Summe rechts ist ausgeschrieben die Summe

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n},$$

die nach (3) mit S_n zu bezeichnen ist. Also haben wir:

$$S_n' = S_{2n} + \tfrac{1}{2} S_n.$$

Wenn wir nun die Summe der konvergenten Reihe (1) mit S bezeichnen, so ist

$$\lim_{n=\infty} S_{2n} = S \quad \text{und} \quad \lim_{n=\infty} S_n = S,$$

so daß folgt:

$$\lim_{n=\infty} S_n' = \tfrac{3}{2} S.$$

Die beiden Reihen (1) *und* (2) *haben dieselben Glieder und sind beide konvergent, und dennoch ist die Summe der zweiten Reihe das anderthalbfache der Summe der ersten Reihe.*

Es kann auch vorkommen, daß von zwei Reihen, die beide dieselben Glieder enthalten, die eine konvergiert und die andere divergiert. Ein Beispiel hierzu ist die Reihe

$$(4) \qquad 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \cdots \pm \frac{1}{\sqrt{n}} \mp \cdots,$$

die wir in entsprechender Weise wie die Reihe (1) so anordnen:

$$(5) \quad 1 + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{7}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{9}} + \frac{1}{\sqrt{11}} - \frac{1}{\sqrt{6}} + \cdots,$$

Die Quadratwurzeln sollen sämtlich positiv sein. Die Reihe (4) ist nach Satz 9 in Nr. 104 konvergent, die Reihe (5) jedoch ist, wie wir zeigen wollen, divergent. Es sei nämlich S_n die Summe der Glieder der Reihe (4) bis zum Gliede $-1 : \sqrt{2n}$, dies eingeschlossen, und ebenso S_n' die Summe der Glieder der Reihe (5) bis zu demselben Gliede. Dann wird:

$$S_n' - S_n = \frac{1}{\sqrt{2n+1}} + \frac{1}{\sqrt{2n+3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{2n+(2n-1)}}.$$

Von den n Summanden ist der letzte der kleinste, so daß

$$S_n' - S_n > \frac{n}{\sqrt{4n-1}} = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{4 - \frac{1}{n}}}$$

wird. Für $\lim n = \infty$ hat der Nenner den Grenzwert 2, der Zähler aber den Grenzwert Unendlich. Also ist $\lim S_n' - \lim S_n$ unendlich groß. Da nun $\lim S_n$ als Summe der konvergenten Reihe (4) endlich ist, so muß $\lim S_n' = \infty$ sein.

Übrigens konvergiert die Reihe (4) nur bedingt, da die Reihe der absoluten Beträge

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \cdots$$

divergiert, denn es ist allgemein:

$$\frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n}}{n} > \frac{1}{n};$$

von der Reihe mit kleineren Gliedern:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$$

wissen wir aber schon, vgl. Nr. 103, daß sie divergiert.

Die beiden Reihen (4) *und* (5) *haben dieselben Glieder; während aber die erste bedingt konvergent ist, ist die zweite divergent.*

108. Satz über bedingt konvergente Reihen. Wir knüpfen an das Vorhergehende eine einfache Bemerkung: Liegt eine bedingt konvergente unendliche Reihe $u_0, u_1, \ldots u_n, \ldots$ vor, so enthält sie notwendig Glieder mit verschiedenen Vorzeichen, und es seien $v_0, v_1, v_2, \ldots$ die positiven Glieder so,

wie sie in der vorgelegten Reihe wirklich aufeinander folgen, und $w_0, w_1, w_2, \ldots$ die absoluten Beträge der negativen Glieder in der gegebenen Folge.

Die Summe der absoluten Beträge der n ersten Glieder der gegebenen Reihe, also

$$S_n = |u_0| + |u_1| + |u_2| + \cdots + |u_{n-1}|,$$

enthalte etwa die n_1 ersten Glieder der Reihe $v_0, v_1, v_2, \ldots$ und die n_2 ersten Glieder der Reihe $w_0, w_1, w_2, \ldots$, und die Summen dieser n_1 bzw. n_2 Glieder seien mit S'_{n_1} und S''_{n_2} bezeichnet. Dann ist:

$$S_n = S'_{n_1} + S''_{n_2},$$

folglich:

$$\lim S_n = \lim S'_{n_1} + \lim S''_{n_2}.$$

Wenn nun die Reihen $v_0, v_1, v_2, \ldots$ und $w_0, w_1, w_2, \ldots$ beide konvergierten, so ständen rechts endliche Werte, d. h. die Reihe der absoluten Beträge der Glieder der ursprünglichen Reihe wäre konvergent, was damit im Widerspruche steht, daß die ursprüngliche Reihe nach Voraussetzung nur bedingt konvergiert. Eine der beiden Reihen $v_0, v_1, v_2, \ldots$ und $w_0, w_1, w_2, \ldots$ muß also gewiß divergent sein. Nun ist aber

$$u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{n-1} = S'_{n_1} - S''_{n_2}.$$

Wäre also etwa $\lim S'_{n_1}$ endlich und $\lim S''_{n_2}$ unendlich groß (als Grenzwert bei einer Reihe von lauter *positiven* Gliedern, vgl. letzte Bemerkung in Nr. 104), so wäre hiernach die vorgelegte Reihe auch divergent, ebenso, wenn $\lim S'_{n_1}$ unendlich groß und $\lim S''_{n_2}$ endlich wäre. Daher:

Satz 15: Konvergiert eine unendliche Reihe bedingt, so ist sowohl die Reihe ihrer positiven Glieder als auch die Reihe ihrer negativen Glieder divergent.

Man kann übrigens beweisen, daß sich die Glieder einer bedingt konvergenten Reihe so anordnen lassen, daß die Reihe konvergiert und irgend einen vorgeschriebenen Wert zur Summe hat. Wir gehen hierauf aber nicht ein.

109. Die Summe einer unbedingt konvergenten Reihe. Die Einzelheiten in Nr. 107 und 108 waren notwendig, um die Bedeutung des folgenden Satzes richtig zu schätzen, der sich auf unbedingt konvergente Reihen bezieht.

Satz 16: Wenn eine unendliche Reihe unbedingt konvergiert, so kann man die Reihenfolge der Glieder beliebig ändern, ohne daß sie divergent wird oder der Summenwert der Reihe irgend eine Änderung erleidet.

Sind

$$(1) \qquad u_0,\ u_1,\ u_2, \ldots u_n, \ldots$$

die Glieder der unbedingt konvergenten Reihe, so ist die Behauptung die, daß die Reihe

$$(2) \qquad u_\alpha,\ u_\beta,\ u_\gamma, \ldots u_\omega, \ldots,$$

in der die Indizes $\alpha, \beta, \gamma, \ldots \omega, \ldots$ nach irgend einem anderen Gesetze als dem der natürlichen Zahlenreihe aufeinander folgen, konvergent ist und die nämliche Summe hat wie die Reihe (1). Wählen wir in der Reihe (2) die Anzahl der Glieder so groß, daß die n ersten Glieder der Reihe (1) darin enthalten sind, so wird

$$(3) \quad u_\alpha + u_\beta + u_\gamma + \cdots + u_\omega = u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1} + R,$$

wenn man unter R die Summe aller derjenigen Glieder auf der linken Seite versteht, deren Index größer ist als $n-1$. Diese Glieder seien mit $u_p, u_q, u_r, \ldots u_s$ bezeichnet, so daß

$$R = u_p + u_q + u_r + \cdots + u_s$$

ist. Der absolute Betrag von R ist nicht größer als die Summe

$$|u_p| + |u_q| + \cdots + |u_s|.$$

Die Summe

$$R_n = |u_n| + |u_{n+1}| + |u_{n+2}| + \cdots$$

hat einen bestimmten endlichen Wert. Denn die Reihe $|u_0| + |u_1| + |u_2| + \cdots$ konvergiert, und ihre Summe ist gleich:

$$|u_0| + |u_1| + \cdots + |u_{n-1}| + R_n;$$

andererseits ist ihre Summe aber gleich

$$\lim_{n=\infty} (|u_0| + |u_1| + \cdots + |u_{n-1}|);$$

folglich kommt:

$$\lim_{n=\infty} R_n = 0.$$

Da ferner sämtliche Indizes $p, q, \ldots s$ größer sind als $n-1$, so ist auch

$$|R| < R_n \quad \text{oder} \quad |R| = \theta \cdot R_n,$$

wobei θ eine zwischen 0 und 1 gelegene Zahl bedeutet. Wenn also S_n die Summe der n ersten Glieder der Reihe (1) darstellt, so wird die Gleichung (3):

$$u_\alpha + u_\beta + u_\gamma + \cdots + u_\omega = S_n \pm \theta R_n.$$

Ist nun S die Summe der Reihe (1), so wird $\lim S_n = S$, während, wie wir sahen, $\lim R_n = 0$ ist. Folglich konvergiert auch die Summe

$$u_\alpha + u_\beta + u_\gamma + \cdots + u_\omega$$

nach dem Werte S, wenn man die Anzahl der Glieder in der Anordnung (2) unbegrenzt vermehrt.

Durch den Satz 16 wird die Bezeichnung: *unbedingte* Konvergenz erklärt. Sie besagt, daß die Reihe bei jeder Anordnung der Glieder konvergiert und stets denselben Wert behält.

110. Multiplikation zweier unbedingt konvergenter Reihen. Es gilt der

Satz 17: Sind $u_0, u_1, \ldots u_n \ldots$ und $v_0, v_1, \ldots v_n \ldots$ zwei unbedingt konvergente Reihen mit den Summen S und S', so konvergiert auch diejenige unendliche Reihe $w_0, w_1, \ldots w_n, \ldots$ unbedingt, deren allgemeines Glied

$$w_n = u_0 v_n + u_1 v_{n-1} + u_2 v_{n-2} + \cdots + u_{n-1} v_1 + u_n v_0$$

ist, und ihre Summe ist gleich dem Produkte SS' der Summen der beiden ursprünglichen Reihen.

Es sei nämlich

$$S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1},$$
$$S_n' = v_0 + v_1 + \cdots + v_{n-1},$$
$$S_n'' = w_n + w_1 + \cdots + w_{n-1},$$

also

$$S_n'' = u_0 v_0 + (u_0 v_1 + u_1 v_0) + (u_0 v_2 + u_1 v_1 + u_2 v_0) + \cdots$$
$$\cdots + (u_0 v_{n-1} + u_1 v_{n-2} + \cdots + u_{n-1} v_0).$$

Wir nehmen *zunächst* an, daß alle Glieder der gegebenen Reihen *positiv* seien. Das Produkt $S_n S_n'$ enthält alle Glieder von S_n'', außerdem aber noch andere positive Glieder. Mithin ist

$$S_n S_n' > S_n''.$$

Bezeichnen wir mit m die größte ganze Zahl, die in $\frac{1}{2} n$ enthalten ist, also $\frac{1}{2} n$ oder $\frac{1}{2}(n-1)$, je nachdem n gerade

oder ungerade ist, so bilden, wie leicht einzusehen ist, die Glieder des Produktes $S_m S'_m$ einen Teil der Glieder, aus denen S_n'' besteht; demnach haben wir:

$$S_m S'_m < S_n''.$$

Für $\lim n = \infty$ wird auch $\lim m = \infty$. Die Größen S_n und S_m konvergieren dabei nach der Grenze S, die Größen S_n' und S'_m nach der Grenze S'. Also ist S_n'' zwischen zwei Größen eingeschlossen, deren gemeinsame Grenze das Produkt SS' ist; mithin hat (vgl. Satz 34 in Nr. 25) auch S_n'' die Grenze SS':

$$\lim_{n=\infty} S_n'' = SS'.$$

Wir nehmen jetzt *zweitens* an, daß die gegebenen Reihen sowohl positive als auch negative Glieder enthalten. Da sie unbedingt konvergieren sollen, so bleiben sie konvergent, auch wenn man jedes negative Glied durch seinen absoluten Betrag ersetzt. Es ist:

$$(1)\quad S_n S_n' - S_n'' = u_{n-1} v_{n-1} + (u_{n-1} v_{n-2} + u_{n-2} v_{n-1}) + \cdots$$
$$\cdots + (u_{n-1} v_1 + u_{n-2} v_2 + \cdots + u_2 v_{n-2} + u_1 v_{n-1}).$$

Wir haben soeben erkannt, daß $S_n S_n' - S_n''$ den Grenzwert Null hat, wenn die Größen u und v sämtlich positiv sind. Unserer Annahme nach bleiben aber die gegebenen Reihen konvergent, wenn man die Vorzeichen der negativen Glieder ändert; also hat die vorstehende Summe den Grenzwert Null, wenn jedes Glied u oder v durch seinen absoluten Betrag ersetzt wird. Solch eine Änderung kann aber den absoluten Betrag der vorstehenden Summe nicht verkleinern, und folglich ist auch jetzt:

$$\lim_{n=\infty} (S_n S_n' - S_n'') = 0.$$

Also hat S_n'' wieder die Grenze SS':

$$\lim_{n=\infty} S_n'' = SS'.$$

Schließlich muß noch bewiesen werden, daß die Reihe $w_0, w_1, \ldots w_n, \ldots$ *unbedingt* konvergiert. Es ist nach Satz 1 und 2 in Nr. 4

$$(2)\qquad |w_n| \leqq |u_0|\,|v_n| + |u_1|\,|v_{n-1}| + \cdots + |u_n|\,|v_0|.$$

Da die Reihen

$$|u_0|,\ |u_1|,\ |u_2|, \ldots \quad \text{und} \quad |v_0|,\ |v_1|,\ |v_2|, \ldots$$

nach Voraussetzung konvergieren, so konvergiert nach dem Bewiesenen auch die Reihe mit dem allgemeinen Gliede

$$|u_0|\,|v_n| + |u_1|\,|v_{n-1}| + \cdots + |u_n|\,|v_0|,$$

folglich wegen (2) die Reihe mit dem allgemeinen Gliede $|w_n|$ nach Satz 10 in Nr. 105.

Der bewiesene Satz gilt nicht mehr stets, wenn die gegebenen Reihen nur *bedingt* konvergieren. Man überzeugt sich hiervon, indem man als erste und zweite gegebene Reihe die Reihe (4) aus Nr. 107 wählt:

$$1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{5}} - \cdots.$$

Die Reihe der w wird hier:

$$1 - \frac{2}{\sqrt{2}} + \left(\frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{2}{\sqrt{4}} + \frac{2}{\sqrt{6}}\right) + \left(\frac{2}{\sqrt{5}} + \frac{2}{\sqrt{8}} + \frac{1}{3}\right) - \cdots$$

und ist divergent, weil ihre Glieder nicht bis zur Null abnehmen (vgl. Satz 4 in Nr. 103), denn ein allgemeines Glied mit Pluszeichen wird:

$$\frac{1}{\sqrt{n \cdot n}} + \frac{2}{\sqrt{(n-1)(n+1)}} + \frac{2}{\sqrt{(n-2)(n+2)}} + \cdots$$
$$\cdots + \frac{2}{\sqrt{2(2n-2)}} + \frac{2}{\sqrt{1(2n-1)}} > \frac{2n-1}{\sqrt{n \cdot n}} = 2 - \frac{1}{n}.$$

§ 2. Der Taylorsche Satz für Funktionen von einer Veränderlichen.

111. Der Taylorsche Satz für einen Spezialfall. Es seien $f(x)$ und $F(x)$ zwei Funktionen von x, die nebst ihren ersten Ableitungen in dem Intervalle von x_0 bis $x_0 + h$ bestimmte endliche Werte haben. Verschwindet die Ableitung $F'(x)$ nirgends im *Innern* des Intervalles und ist $F(x_0) \neq F(x_0 + h)$, so kommt nach Satz 10 in Nr. 31:

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{F(x_0 + h) - F(x_0)} = \frac{f'(x_0 + h_1)}{F'(x_0 + h_1)}.$$

Dabei bedeutet h_1 eine zwischen 0 und h gelegene Größe, verschieden von 0 und h. Ist nun insbesondere:

$$f(x_0) = 0 \quad \text{und} \quad F(x_0) = 0, \quad \text{also auch} \quad F(x_0 + h) \neq 0,$$

so reduziert sich die Gleichung auf:

$$\frac{f(x_0 + h)}{F(x_0 + h)} = \frac{f'(x_0 + h_1)}{F'(x_0 + h_1)}. \tag{1}$$

Haben ferner auch $f''(x)$ und $F''(x)$ in dem Intervalle von x_0 bis $x_0 + h$ bestimmte endliche Werte, so läßt sich derselbe Schluß von neuem machen, wenn wir annehmen, daß auch

$$f'(x_0) = 0 \quad \text{und} \quad F'(x_0) = 0$$

sei, dagegen $F''(x)$ nirgends im *Innern* des Intervalles verschwinde. Es kommt also:

$$\frac{f'(x_0 + h_1)}{F'(x_0 + h_1)} = \frac{f''(x_0 + h_2)}{F''(x_0 + h_2)},$$

wobei h_2 eine Größe zwischen 0 und h_1 bezeichnet, verschieden von 0 und h_1.

Wir nehmen nun allgemein an, daß die Funktionen $f(x)$ und $F(x)$ und ebenso alle ihre Ableitungen bis einschließlich derjenigen n^{ter} Ordnung für alle Werte von x zwischen x_0 und $x_0 + h$ (einschließlich dieser Grenzen) bestimmte endliche Werte haben und daß die Ableitungen von $F(x)$ im *Innern* des Intervalles nirgends gleich Null seien. Wenn dann überdies

$$f(x_0) = 0, \quad f'(x_0) = 0, \ldots f^{(n-1)}(x_0) = 0,$$
$$F(x_0) = 0, \quad F'(x_0) = 0, \ldots F^{(n-1)}(x_0) = 0,$$
$$\text{aber} \quad F(x_0 + h) \neq 0$$

ist, so ergibt sich:

$$\frac{f(x_0 + h)}{F(x_0 + h)} = \frac{f'(x_0 + h_1)}{F'(x_0 + h_1)} = \frac{f''(x_0 + h_2)}{F''(x_0 + h_2)} = \cdots = \frac{f^{(n)}(x_0 + h_n)}{F^{(n)}(x_0 + h_n)},$$

wobei $h, h_1, h_2, \ldots h_n$ Größen von einerlei Vorzeichen bedeuten, deren absolute Werte eine abnehmende Reihe bilden, aber sämtlich von Null verschieden sind. Bedeutet θ einen positiven echten Bruch, verschieden von Null und Eins, so kann man deshalb $h_n = \theta h$ setzen, und es wird:

$$\frac{f(x_0 + h)}{F(x_0 + h)} = \frac{f^{(n)}(x_0 + \theta h)}{F^{(n)}(x_0 + \theta h)} \tag{2}$$

Wählt man insbesondere

$$F(x) = (x - x_0)^n,$$

also

$$F^{(m)}(x) = n(n-1)\cdots(n-m+1)(x-x_0)^{n-m}$$

und

$$F^{(n)}(x) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n = n!,$$

so sind alle Bedingungen, die für $F(x)$ aufgestellt wurden, erfüllt, und die Gleichung (2) ergibt:

$$f(x_0 + h) = \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x_0 + \theta h). \tag{3}$$

Diese Gleichung ist es, die wir aufstellen wollten. Sie liefert uns einen Satz, der ein Spezialfall des allgemeinen Taylorschen Satzes ist, den wir in der nächsten Nummer ableiten werden.

Satz 18: Wenn die Funktion $f(x)$ in dem Intervalle von x_0 bis $x_0 + h$ nebst ihren Ableitungen bis zur einschließlich n^{ten} Ordnung bestimmte endliche Werte hat und an der Stelle $x = x_0$ nebst ihren $n - 1$ ersten Ableitungen verschwindet, so ist:

$$f(x_0 + h) = \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x_0 + \theta h),$$

wo θ einen positiven echten Bruch, verschieden von Null und Eins, bedeutet.

112. Der allgemeine Taylorsche Satz. Es sei $F(x)$ eine Funktion der Veränderlichen x, die nebst ihren n ersten Ableitungen für alle Werte x von x_0 bis $x_0 + h$ bestimmte endliche Werte hat.

Bezeichnet $\varphi(x)$ die ganze Funktion $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades von x:

$$\left\{\begin{aligned} \varphi(x) = F(x_0) + \frac{x-x_0}{1!} F'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!} F''(x_0) + \cdots \\ + \frac{(x-x_0)^{n-1}}{(n-1)!} F^{(n-1)}(x_0), \end{aligned}\right. \tag{1}$$

so ist ihre Ableitung m^{ter} Ordnung für $m < n$:

$$\varphi^{(m)}(x) = F^{(m)}(x_0) + \frac{x-x_0}{1!} F^{(m+1)}(x_0) + \cdots + \frac{(x-x_0)^{n-m-1}}{(n-m-1)!} F^{(n-1)}(x_0).$$

Für $x = x_0$ kommt also:

$$\varphi(x_0) = F(x_0), \quad \varphi^{(m)}(x_0) = F^{(m)}(x_0).$$

Hieraus folgt, daß der soeben gefundene Satz auf die Funktion

$$f(x) = F(x) - \varphi(x)$$

anwendbar ist; denn diese Funktion erfüllt alle in dem Satze angegebenen Bedingungen. Es kommt also, weil überdies $\varphi^{(n)}(x) = 0$ ist:

$$F(x_0 + h) - \varphi(x_0 + h) = \frac{h^n}{n!} F^{(n)}(x_0 + \theta h) \qquad (0 < \theta < 1).$$

Der Wert von $\varphi(x_0 + h)$ kann nun aus der Gleichung (1) berechnet werden. Wird er eingesetzt, so geht hervor:

$$(2) \qquad F(x_0 + h) = F(x_0) + \frac{h}{1!} F'(x_0) + \frac{h^2}{2!} F''(x_0) + \cdots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} F^{(n-1)}(x_0) + \frac{h^n}{n!} F^{(n)}(x_0 + \theta h).$$

Wir wollen von jetzt an x_0 mit x bezeichnen, so daß wir finden:

$$(3) \qquad F(x + h) = F(x) + \frac{h}{1!} F'(x) + \frac{h^2}{2!} F''(x) + \cdots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} F^{(n-1)}(x) + R_n.$$

Dabei ist:

$$(4) \qquad R_n = \frac{h^n}{n!} F^{(n)}(x + \theta h).$$

Man nennt diesen Wert von R_n die *Lagrangesche Restform.*

Die Gleichungen (3) und (4) sind offenbar nur eine Verallgemeinerung unseres Mittelwertsatzes in Nr. 28, der wieder hervorgeht, wenn wir $n = 1$ setzen. Es hat sich also ergeben:

Satz 19 (Verallgemeinerter Mittelwertsatz): Hat die Funktion $F(x)$ in dem Intervalle von x bis $x + h$ nebst ihren n ersten Ableitungen bestimmte endliche Werte, so gibt es immer einen positiven echten Bruch θ derart, daß

$$F(x + h) = F(x) + \frac{h}{1!} F'(x) + \frac{h^2}{2!} F''(x) + \cdots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} F^{(n-1)}(x) + \frac{h^n}{n!} F^{(n)}(x + \theta h)$$

ist.

Bleiben nun die Voraussetzungen, die soeben ausgesprochen wurden, erhalten, wie groß auch der Index n werden mag, und ist außerdem für alle Werte $x + \theta h$, die dem Intervalle angehören:

$$\lim_{n=\infty} R_n = \lim_{n=\infty} \frac{h^n}{n!} F^{(n)}(x + \theta h) = 0,$$

so kommen wir zu der *unendlichen* Reihe:

$$(5) \qquad F(x+h) = F(x) + \frac{h}{1!} F'(x) + \frac{h^2}{2!} F''(x) + \cdots,$$

die wegen $\lim R_n = 0$ konvergiert. Denn wenn die Summe ihrer n ersten Glieder mit S_n bezeichnet wird, so ist $F(x+h)$ gleich $S_n + R_n$ nach Satz 19, daher in der Tat:

$$\lim_{n=\infty} S_n = F(x+h) - \lim_{n=\infty} R_n = F(x+h).$$

Die unendliche Reihe (5) heißt die *Taylorsche Reihe.* Da uns der genaue Wert des positiven echten Bruches θ nicht bekannt ist, so vermögen wir nur dann zu behaupten, daß die Gleichung (5) gilt, wenn R_n für *alle* positiven echten Brüche θ den Grenzwert Null hat. Daher ergibt sich der

Satz 20 (Taylorscher Satz): Hat die Funktion $F(x)$ in dem ganzen Intervalle von x bis $x+h$ nebst allen ihren Ableitungen bestimmte endliche Werte und ist der Grenzwert des Lagrangeschen Restes:

$$R_n = \frac{h^n}{n!} F^{(n)}(x + \theta h)$$

für $\lim n = \infty$ *und für jeden positiven echten Bruch θ gleich Null, so läßt sich $F(x+h)$ in eine konvergente und nach ganzen positiven Potenzen von h fortschreitende unendliche Reihe entwickeln:*

$$F(x+h) = F(x) + \frac{h}{1!} F'(x) + \frac{h^2}{2!} F''(x) + \cdots.$$

Man nennt eine nach Potenzen einer Größe h fortschreitende unendliche Reihe kurz eine *Potenzreihe.* Hierbei möge man beachten: Bedeutet k eine irgendwie gewählte Zahl zwischen 0 und h und ist wirklich $\lim R_n = 0$, so gilt dasselbe, wenn h durch k ersetzt wird, denn $x + \theta k$ ist ja ein zwischen x und $x+h$ gelegener Wert. *Demnach kommt für jeden Wert k zwischen 0 und h:*

$$F(x+k) = F(x) + \frac{k}{1!} F'(x) + \frac{k^2}{2!} F''(x) + \cdots.$$

[112

113. Cauchysche Restform. Dem Reste R_n kann man eine andere Form geben, die oft von Nutzen ist. Um sie zu erhalten, ersetzen wir h in der Gleichung (3) der vorigen Nummer durch $z - x$. Der Rest R_n wird dadurch eine Funktion von x und z, und wir bezeichnen ihn als Funktion von x mit $f(x)$. Es ist alsdann

$$(1)\quad \begin{cases} F(z) = F(x) + \frac{z-x}{1!}F'(x) + \frac{(z-x)^2}{2!}F''(x) + \cdots \\ \qquad + \frac{(z-x)^{n-1}}{(n-1)!}F^{(n-1)}(x) + f(x). \end{cases}$$

Bilden wir die Ableitungen von beiden Seiten in bezug auf x, indem wir z als konstant ansehen, so heben sich alle rechts hervorgehenden Glieder bis auf eines gegenseitig fort, und es bleibt:

$$(2)\qquad f'(x) = -\frac{(z-x)^{n-1}}{(n-1)!}F^{(n)}(x).$$

Die Funktion $f(x)$ wird durch die Gleichung (1) definiert, denn diese Gleichung kann ja nach $f(x)$ aufgelöst werden, und die Funktion erfüllt nach unserer Voraussetzung über $F(x)$ die Forderung $\mathfrak{A}$ in Nr. 27 für alle Werte der Veränderlichen von x bis $x + h$ oder z. Nach dem Mittelwertsatze in Nr. 28 ist also, wenn θ einen gewissen positiven echten Bruch bezeichnet:

$$f(z) - f(x) = (z-x)f'[x + \theta(z-x)].$$

Aber die Gleichung (1) zeigt, daß $f(z)$ verschwindet. Mithin kommt:

$$(3)\qquad f(x) = -(z-x)f'[x + \theta(z-x)].$$

Die Gleichung (2) ergibt ferner, wenn darin x durch $x + \theta(z-x)$ ersetzt wird:

$$f'[x+\theta(z-x)] = -\frac{(z-x)^{n-1}(1-\theta)^{n-1}}{(n-1)!}F^{(n)}[x+\theta(z-x)],$$

und folglich ist nach (3):

$$(4)\qquad f(x) = \frac{(1-\theta)^{n-1}(z-x)^n}{(n-1)!}F^{(n)}[x + \theta(z-x)].$$

Führen wir schließlich an Stelle von z wieder den Wert $x + h$ ein, so folgt für den *Rest* $f(x)$ oder R_n in (1):

$$(5)\qquad R_n = \frac{(1-\theta)^{n-1}h^n}{(n-1)!}F^{(n)}(x + \theta h).$$

Dieser Wert heißt die *Cauchysche Restform.*

Satz 21: Die Restform R_n in Satz 20, Nr. 112, läßt sich durch die Cauchysche Restform

$$R_n = \frac{(1-\theta)^{n-1} h^n}{(n-1)!} F^{(n)}(x + \theta h)$$

ersetzen.

Die hier mit θ bezeichnete Größe braucht durchaus nicht dieselbe wie die in der Gleichung (4) oder in Satz 20 der vorigen Nummer zu sein; aber wie diese ist sie ein positiver echter Bruch.

114. Die Differenz ausgedrückt durch Differentiale. Setzt man

$$y = F(x),$$

so sind die Größen

$$hF'(x), \quad h^2F''(x), \quad h^3F'''(x), \ldots$$

die aufeinander folgenden Differentiale:

$$dy, \quad d^2y, \quad d^3y, \ldots$$

der Funktion y, sobald $dx = h$ gesetzt wird, vgl. Nr. 60. Dagegen ist

$$\varDelta y = F(x+h) - F(x)$$

die zum Zuwachs h von x gehörige Differenz von y. Bezeichnet man ferner mit

$$d'^n y$$

die Größe $h^n F^{(n)}(x + \theta h)$, die das Differential n^{ter} Ordnung von y ist, aber gebildet für einen Wert $x + \theta h$ der Veränderlichen zwischen x und $x + h$, so erhält die Gleichung (3) der Nr. 112 die Form:

$$\varDelta y = \frac{dy}{1!} + \frac{d^2y}{2!} + \frac{d^3y}{3!} + \cdots + \frac{d^{n-1}y}{(n-1)!} + \frac{d'^n y}{n!}.$$

Sind die Bedingungen des Taylorschen Satzes erfüllt, so ist demnach die unendliche Taylorsche Reihe darstellbar in der Form:

$$\varDelta y = \frac{dy}{1!} + \frac{d^2y}{2!} + \frac{d^3y}{3!} + \cdots.$$

Sie zeigt, daß die *Differenz* $\varDelta y$ mittels der *Differentiale* dy, d^2y, $d^3y, \ldots$ ausgedrückt werden kann.

115. Bemerkungen zum Taylorschen Satze. Die Gleichung des Satzes 19 in Nr. 112 kann bis zu einem bestimmten Werte von n richtig sein, für größere Werte aber ungültig werden. Es sei z. B.

$$F(x) = (x - x_0)^\mu,$$

wobei μ irgend eine positive *gebrochene* Zahl bedeute. Ist m die größte ganze in μ enthaltene Zahl, so gilt jene Gleichung insbesondere für $x = x_0$ nur so lange, als n nicht größer als m ist; denn die $(m+1)^{\text{te}}$ Ableitung von $F(x)$ wird für $x = x_0$ unendlich.

Um die Gültigkeit der Taylorschen Reihe behaupten zu können, genügt es nicht, daß man nur auf Grund der Sätze des § 1 beweist, daß diese Reihe

$$F(x) + \frac{h}{1!}F'(x) + \frac{h^2}{2!}F''(x) + \cdots$$

konvergiert. Denn wenn man z. B.

$$F(x) = e^{-\frac{1}{(x-x_0)^2}}$$

wählt, so wird für jeden Wert von n an der Stelle $x = x_0$

$$F^{(n)}(x_0) = 0,$$

weil die Funktion $e^{-\frac{1}{(x-x_0)^2}}$ ebenso wie alle ihre Ableitungen für $x = x_0$ verschwindet, was in Nr. 131 bewiesen werden wird. Also konvergiert hier die Taylorsche Reihe und ist gleich Null, während sie doch den Wert

$$F(x_0 + h) = e^{-\frac{1}{h^2}}$$

haben sollte. Man muß sich also nicht damit begnügen, irgendwie zu beweisen, daß die Taylorsche Reihe konvergiert, sondern stets nachweisen, daß der Rest R_n entweder in der Lagrangeschen oder in der Cauchyschen Form den Grenzwert Null hat.

Wir können ferner den wichtigen Satz beweisen:

Satz 22: Gelten die Voraussetzungen des verallgemeinerten Mittelwertsatzes 19 in Nr. 112 und ist $F^{(n-1)}(x) \neq 0$, *so läßt sich der absolute Betrag von h so klein wählen, daß der absolute Betrag des vorletzten Gliedes*

$$\frac{h^{n-1}}{(n-1)!}F^{(n-1)}(x)$$

der dort angegebenen Entwicklung den absoluten Betrag des letzten, also des Restgliedes, übertrifft.

Denn hätten wir die Entwicklung statt bis h^n nur bis h^{n-1} geführt, so hätten wir statt der Summe der letzten beiden Glieder, die wir mit

$$u_{n-1} = \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} F^{(n-1)}(x) \quad \text{und} \quad R_n = \frac{h^n}{n!} F^{(n)}(x + \theta h)$$

bezeichnen wollen, ein Restglied

$$R_{n-1} = \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} F^{(n-1)}(x + \vartheta h)$$

erhalten, wo ϑ wie θ ein positiver echter Bruch ist. Also muß $u_{n-1} + R_n$ gleich R_{n-1} sein, woraus folgt:

$$\frac{R_n}{u_{n-1}} = \frac{R_{n-1} - u_{n-1}}{u_{n-1}} = \frac{F^{(n-1)}(x + \vartheta h) - F^{(n-1)}(x)}{F^{(n-1)}(x)}.$$

Da $F^{(n-1)}(x)$ nach den Voraussetzungen des Satzes und nach Satz 1 in Nr. 27 stetig ist, hat die rechte Seite für $\lim h = 0$ den Grenzwert Null, d. h. wählt man $|h|$ hinreichend klein, so kann man $|R_n : u_{n-1}|$ beliebig klein machen.

Eine andere nützliche Bemerkung ist diese:

Satz 23: Hat die Funktion $F(x)$ nebst ihren sämtlichen Ableitungen in dem ganzen Intervalle von x bis $x + h$ bestimmte endliche Werte, so läßt sich $F(x + h)$ in die konvergente Taylorsche Reihe

$$F(x + h) = F(x) + \frac{h}{1!} F'(x) + \frac{h^2}{2!} F''(x) + \cdots$$

insbesondere stets dann entwickeln, wenn alle Ableitungen von $F(x)$ von einer bestimmten Ordnung an absolut genommen überall im Intervalle kleiner sind als eine bestimmte positive Zahl.

Denn wenn dies etwa von $F^{(m)}(x)$ an gilt, so wählen wir $n > m$. Bedeutet k irgend eine bestimmte positive Zahl, so ist in dem Reste

$$R_n = \frac{h}{1} \cdot \frac{h}{2} \cdot \frac{h}{3} \cdots \frac{h}{n} F^{(n)}(x + \theta h)$$

die Anzahl derjenigen Faktoren

$$\frac{h}{1}, \quad \frac{h}{2}, \quad \frac{h}{3}, \quad \cdots,$$

die absolut genommen größer als k sind, sicher endlich.

Es seien dies die i ersten Faktoren. Ihr Produkt, multipliziert mit $F^{(n)}(x+\theta h)$, sei mit P_n bezeichnet, da es noch von n abhängt. Es bleibt $F^{(n)}(x+\theta h)$ nach Voraussetzung, wie groß auch n sein mag, stets absolut genommen endlich, nämlich unterhalb einer bestimmten Zahl. Nun ist $|R_n| < |P_n| k^{n-i}$, da alle $n-i$ Faktoren

$$\frac{h}{i+1}, \quad \frac{h}{i+2}, \cdots \frac{h}{n}$$

absolut genommen kleiner als k sind. Wählen wir $k<1$, so hat k^{n-i} für $\lim n=\infty$ den Grenzwert Null, während P_n einen endlichen Wert behält. Also ist $\lim R_n = 0$.

116. Die Maclaurinsche Reihe. Setzt man $x=0$ in der Gleichung (3) von Nr. 112 und bezeichnet man alsdann h mit x, so kommt:

$$(1)\quad F(x)=F(0)+\frac{x}{1!}F'(0)+\frac{x^2}{2!}F''(0)+\cdots+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}F^{(n-1)}(0)+R_n,$$

wobei entweder nach (4) in Nr. 112 zu setzen ist:

$$(2)\qquad R_n=\frac{x^n}{n!}F^{(n)}(\theta x)$$

oder nach (5) in Nr. 113:

$$(3)\qquad R_n=\frac{(1-\theta)^{n-1}}{(n-1)!}x^n F^{(n)}(\theta x).$$

Dabei bedeutet θ in beiden Formeln positive echte Brüche. Die Gleichung (1) ist unter der Bedingung bewiesen, daß die Funktion $F(x)$ und ihre n ersten Ableitungen in dem Intervalle von 0 bis x bestimmte endliche Werte haben.

Genügen *alle* Ableitungen der Funktion $F(x)$ dieser Bedingung und hat der Rest R_n bei unbegrenzt wachsenden Werten von n den Grenzwert Null, so gibt die Gleichung (1) eine Entwicklung der Funktion $F(x)$ in eine konvergente und nach ganzen positiven Potenzen von x geordnete unendliche Reihe, nämlich:

$$(4)\quad F(x)=F(0)+\frac{x}{1!}F'(0)+\frac{x^2}{2!}F''(0)+\frac{x^3}{3!}F'''(0)+\cdots.$$

Dies ist die nach *Maclaurin* benannte Reihe; die Gleichungen (2) oder (3) gestatten, Grenzen für den Fehler zu bestimmen, den man begeht, wenn man die Reihe mit irgend einem Gliede abbricht.

Satz 24 (Maclaurinscher Satz): Hat die Funktion $F(x)$ in dem Intervalle von Null bis zu einem betrachteten Werte x nebst ihren sämtlichen Ableitungen bestimmte endliche Werte und ist der Grenzwert des Lagrangeschen oder Cauchyschen Restes

$$R_n = \frac{x^n}{n!} F^{(n)}(\theta x) \quad \text{oder} \quad R_n = \frac{(1-\theta)^{n-1}}{(n-1)!} x^n F^{(n)}(\theta x)$$

für $\lim n = \infty$ und für jeden positiven echten Bruch θ gleich Null, so gilt die konvergente unendliche Reihe:

$$F(x) = F(0) + \frac{x}{1!} F'(0) + \frac{x^2}{2!} F''(0) + \cdots.$$

Hieraus kann man rückwärts wieder den Taylorschen Satz in Nr. 112 gewinnen, wenn man den Satz 24 auf die Funktion $F(x+h)$ statt auf $F(x)$ anwendet und schließlich in der hervorgehenden Formel h mit x vertauscht.

§ 3. Reihenentwicklungen spezieller Funktionen.

117. Reihen für Exponentialfunktionen. Die Entwicklung einer Funktion in eine Potenzreihe hat den Zweck, die Funktion durch einen Ausdruck darzustellen, der ihre Berechnung für die verschiedenen Werte der unabhängigen Veränderlichen ermöglicht. Durch die Definitionen, die wir für e^x, $\log x$, $\sin x$, $\cos x$ usw. früher gegeben haben, ist ja noch keine Methode zur wirklichen Berechnung dieser Funktionen gegeben. Wir wollen jetzt zeigen, wie man sie berechnen kann.

Alle Ableitungen der Funktion e^x sind gleich e^x, bleiben also endlich, welchen Wert man auch der Veränderlichen x beilegen mag. Hieraus folgt nach Satz 23 in Nr. 115, daß e^x in eine Potenzreihe, der Maclaurinschen Formel gemäß, entwickelbar ist, die für alle endlichen Werte von x gilt. Für $x = 0$ reduzieren sich die Werte der Funktion und ihrer Ableitungen auf Eins, und man hat daher:

$$(1) \qquad e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots.$$

Die Konvergenz dieser Reihe wurde schon in Nr. 106 nachgewiesen; soeben haben wir aber auch erkannt, daß ihre Summe e^x ist, was ja nach einer Bemerkung in Nr. 115 mit jenem Nachweise noch nicht dargetan war.

Der Rest der Reihe nach dem n^{ten} Gliede ist in der Lagrangeschen Form:

$$R_n = \frac{x^n}{n!} e^{\theta x}. \tag{2}$$

Es sei a irgend eine positive Zahl. Wir ersetzen x durch $x \ln a$; dann folgt aus (1) wegen der Gleichung $a^x = e^{x \ln a}$ für jedes endliche x:

$$a^x = 1 + \frac{x \ln a}{1!} + \frac{x^2 (\ln a)^2}{2!} + \frac{x^3 (\ln a)^3}{3!} + \cdots, \tag{3}$$

und beim Abbrechen nach dem n^{ten} Gliede kann der Rest so dargestellt werden:

$$R_n = \frac{x^n (\ln a)^n}{n!} a^{\theta x}. \tag{4}$$

Nach Nr. 8 und Nr. 48 geben die Reihen (1) und (3) die *positiven* Werte von e^x und a^x, z. B im Falle $x = \frac{1}{2}$ die *positiven* Quadratwurzeln aus e und a.

Die halbe Differenz bzw. Summe von e^x und e^{-x} pflegt man als den *Sinus hyperbolicus* und *Cosinus hyperbolicus* von x zu bezeichnen, abgekürzt mit $\mathfrak{Sin}\, x$ und $\mathfrak{Cos}\, x$ oder auch snh x und csh x:

$$\mathfrak{Sin}\, x = \tfrac{1}{2}(e^x - e^{-x}), \quad \mathfrak{Cos}\, x = \tfrac{1}{2}(e^x + e^{-x}). \tag{5}$$

Sie stehen nämlich in einer ähnlichen Beziehung zur Fläche einer gleichseitigen Hyperbel wie die goniometrischen Funktionen sin x und cos x zur Fläche eines Kreissektors, worauf wir jedoch hier nicht näher eingehen wollen. Es kommt:

$$\frac{d\,\mathfrak{Sin}\, x}{dx} = \mathfrak{Cos}\, x, \quad \frac{d\,\mathfrak{Cos}\, x}{dx} = \mathfrak{Sin}\, x. \tag{6}$$

Alle Ableitungen von $\mathfrak{Sin}\, x$ und $\mathfrak{Cos}\, x$ sind daher endlich für jeden Wert von x. Nach Satz 23, Nr. 115, lassen sich also auch $\mathfrak{Sin}\, x$ und $\mathfrak{Cos}\, x$ für jedes x als konvergente Maclaurinsche Reihen darstellen. Weil sich $\mathfrak{Sin}\, x$ und $\mathfrak{Cos}\, x$ für $x = 0$ auf 0 bzw. 1 reduzieren, so ergibt sich:

$$\begin{cases} \mathfrak{Sin}\, x = \frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!} + \cdots, \\ \mathfrak{Cos}\, x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^{2m}}{(2m)!} + \cdots. \end{cases} \tag{7}$$

Es sei bei dieser Gelegenheit hinzugefügt: Infolge von (5) ist:

$$\text{(8)}\qquad \begin{cases} \mathfrak{Cof}^2 x - \mathfrak{Sin}^2 x = 1, \\ e^x = \mathfrak{Cof}\, x + \mathfrak{Sin}\, x, \quad e^{-x} = \mathfrak{Cof}\, x - \mathfrak{Sin}\, x. \end{cases}$$

Der Quotient von $\mathfrak{Sin}\, x$ und $\mathfrak{Cof}\, x$ heißt der *Tangens hyperbolicus* von x, bezeichnet mit $\mathfrak{Tg}\, x$ oder tgh x:

$$\text{(9)}\qquad \mathfrak{Tg}\, x = \frac{\mathfrak{Sin}\, x}{\mathfrak{Cof}\, x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

Die Ableitung von $\mathfrak{Tg}\, x$ ist:

$$\text{(10)}\qquad \frac{d\,\mathfrak{Tg}\, x}{dx} = \frac{1}{\mathfrak{Cof}^2 x}.$$

$\mathfrak{Sin}\, x$, $\mathfrak{Cof}\, x$ und $\mathfrak{Tg}\, x$ heißen zusammen die *hyperbolischen Funktionen.*

118. Die Zahl e. Man kann leicht beweisen, daß die Zahl e nicht nur irrational ist, sondern auch nicht Wurzel einer Gleichung zweiten Grades mit ganzzahligen Koeffizienten sein kann. Denn wäre dies der Fall, so müßte eine Gleichung bestehen von der Form

$$\text{(1)}\qquad \alpha e \pm \frac{\beta}{e} = \pm \gamma,$$

worin α, β, γ bestimmte *positive ganze* Zahlen bedeuten. Nun ist aber nach (1) und (2) in voriger Nummer:

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{(n-1)!} + \frac{e^\theta}{n!} \qquad (0 < \theta < 1),$$

$$\frac{1}{e} = e^{-1} = 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{(-1)^n e^{-\eta}}{n!} \qquad (0 < \eta < 1).$$

Die Substitution dieser Werte in (1) ergibt:

$$\alpha \left[1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{(n-1)!} + \frac{e^\theta}{n!}\right]$$
$$\pm \beta \left[1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{(-1)^n e^{-\eta}}{n!}\right] = \pm \gamma.$$

Multipliziert man mit $(n-1)!$, so folgt, daß die Größe

$$\mu = \frac{\alpha e^\theta \pm \beta (-1)^n e^{-\eta}}{n}$$

eine ganze Zahl sein müßte. Da man für n eine gerade oder ungerade Zahl wählen kann, so läßt sich das Vorzeichen von

$\pm(-1)^n$ willkürlich fixieren. Wählt man das Pluszeichen, so müßte also

$$\mu = \frac{\alpha e^{\theta} + \beta e^{-\eta}}{n}$$

eine ganze Zahl sein, was jedoch zu einem Widerspruche führt. Denn μ ist, wenn n hinreichend groß gewählt wird, ein positiver echter Bruch. Also ist die Behauptung bewiesen.

119. Reihen für Sinus und Kosinus. Die Ableitungen n^{ter} Ordnung der Funktionen $\cos x$ und $\sin x$ sind nach Nr. 61

$$\cos(x + \tfrac{1}{2}n\pi) \quad \text{bzw.} \quad \sin(x + \tfrac{1}{2}n\pi)$$

und bleiben also endlich für jeden beliebigen Wert von x. Hieraus folgt nach Satz 23 in Nr. 115, daß sich die Funktionen $\cos x$ und $\sin x$ nach der Maclaurinschen Formel für jeden Wert von x entwickeln lassen.

Für $x = 0$ bilden die Werte der Funktion $\cos x$ und ihrer Ableitungen eine periodische Folge, deren Periode

$$1, \quad 0, \quad -1, \quad 0$$

ist; ebenso bilden die Werte der Funktion $\sin x$ und ihrer Ableitungen für $x = 0$ eine periodische Folge mit der Periode:

$$0, \quad 1, \quad 0, \quad -1.$$

Also hat man für jedes x:

$$(1) \qquad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^m \frac{x^{2m}}{(2m)!} + \cdots,$$

$$(2) \qquad \sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^m \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!} + \cdots.$$

Um den Rest der Reihe (1) zu erhalten, wenn man sie nach dem Gliede vom Grade $2m$ abbricht, hat man in der Lagrangeschen Formel für R_n statt n den Wert $2m+2$ zu setzen; dann wird:

$$R_{2m+2} = \frac{x^{2m+2}}{(2m+2)!} \cos[\theta x + (m+1)\pi].$$

Ebenso wird, wenn die zweite Reihe nach dem Gliede vom Grade $2m+1$ abgebrochen wird, ihr Rest:

$$R_{2m+3} = \frac{x^{2m+3}}{(2m+3)!} \sin\left[\theta x + \frac{2m+3}{2}\pi\right]$$
$$= \frac{x^{2m+3}}{(2m+3)!} \cos[\theta x + (m+1)\pi].$$

Liegt x zwischen Null und $\frac{1}{2}\pi$ und gibt man m nacheinander die Werte $0, 1, 2, 3, \ldots$, so wird der Wert von R_{2m+2} oder R_{2m+3} abwechselnd negativ und positiv. Hieraus folgt, daß sich, wenn man die Reihe (1) oder (2) mit dem ersten, mit dem zweiten Gliede usw. abbricht, eine Reihe von Werten ergibt, die abwechselnd größer und kleiner sind als die Werte $\cos x$ und $\sin x$. So ist im besonderen:

$$\cos x < 1, \quad \cos x > 1 - \frac{x^2}{2!}, \quad \cos x < 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!},$$

$$\sin x < x, \quad \sin x > x - \frac{x^3}{3!} \quad \sin x < x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}.$$

120. Reihe für den natürlichen Logarithmus. Für den natürlichen Logarithmus ist:

$$\frac{d \ln(1+x)}{dx} = \frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1}$$

und allgemein:

$$\frac{d^n \ln(1+x)}{dx^n} = (-1)^{n-1}(n-1)!(1+x)^{-n}.$$

Für $x = 0$ geben diese Werte bzw. 1 und $(-1)^{n-1}(n-1)!$. Ferner ist $\ln(1+x) = 0$ für $x = 0$. Also kommt:

$$(1) \quad \ln(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-2}\frac{x^{n-1}}{n-1} + R_n$$

und nach der Lagrangeschen Restformel:

$$(2) \qquad R_n = \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n(1+\theta x)^n}$$

oder nach der Cauchyschen Restformel:

$$(3) \qquad R_n = \frac{(-1)^{n-1}(1-\theta)^{n-1}x^n}{(1+\theta x)^n}.$$

Wenn also der Rest R_n für unbegrenzt wachsende Werte von n den Grenzwert Null hätte, so erhielte man nach der Maclaurinschen Formel:

$$(4) \qquad \ln(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots.$$

Da diese Reihe nach Nr. 106 nur für $-1 < x \leqq +1$ konvergiert, so kann der Rest sicher nicht für andere Werte von x den Grenzwert Null haben. Wir können uns also bei der Untersuchung des Grenzwertes auf $-1 < x \leqq +1$ beschränken.

a) Ist $x > 0$, aber $\leqq 1$, so wenden wir die Form (2) des Restes an, nämlich

$$R_n = (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n} \left(\frac{x}{1+\theta x}\right)^n.$$

Der Faktor $1:n$ hat den Grenzwert Null. Der letzte Faktor hat auch den Grenzwert Null, sobald $x < 1$ ist, und wird im Falle $x = 1$ selbst für $\theta = 0$ nie größer als Eins. Also wird $\lim R_n = 0$ für $0 < x \leqq 1$.

b) Wenn $x < 0$, aber > -1 ist, so benutzen wir die Form (3) des Restes. Wenn wir darin $x = -z$ setzen, so daß $0 < z < 1$ ist, so kommt:

$$R_n = \frac{-z}{1-\theta z} \left(\frac{z-\theta z}{1-\theta z}\right)^{n-1}.$$

Der erste Faktor ist für jeden echten Bruch θ endlich, der zweite wird kleiner als z^{n-1} und hat daher den Grenzwert Null. Mithin ist $\lim R_n = 0$ für $-1 < x < 0$.

Die Gleichung:

$$\ln(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots$$

gilt also für jedes x in dem Intervalle $-1 < x \leqq +1$.

Ist x positiv, so hat der Rest das Zeichen von $(-1)^{n-1}$, und sein absoluter Wert ist kleiner als $x^n : n$. Dieser Rest kann also auch in der Form

$$R_n = (-1)^{n-1} \cdot \frac{\theta x^n}{n} \qquad (0 < \theta < 1)$$

dargestellt werden.

Ist x negativ und gleich $-z$, so wird $-R_n$ für $z < 1$ gleich einem Produkte von zwei positiven Faktoren, die kleiner sind als $z:(1-z)$ bzw. z^{n-1}. Demnach kann man dann setzen:

$$R_n = -\frac{\theta z^n}{1-z} \quad \text{oder} \quad R_n = (-1)^{n-1} \cdot \frac{\theta x^n}{(1+x)} \qquad (0 < \theta < 1).$$

Für $n = 2$ ist also, wenn x, θ und θ' Größen zwischen 0 und 1 bezeichnen:

$$(5) \qquad \ln(1+x) = x - \frac{\theta x^2}{2}, \quad \ln(1-x) = -x - \frac{\theta' x^2}{1+x}.$$

121. Berechnung der natürlichen Logarithmen. Ist die Größe x zwischen 0 und 1 enthalten, so hat man die beiden konvergenten Reihen:

$$(1)\qquad \ln(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots,$$

$$(2)\qquad \ln(1-x) = -\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \cdots.$$

Zieht man die zweite gliedweise von der ersten ab, was nach Satz 6 in Nr. 103 geschehen darf, so folgt:

$$(3)\qquad \ln\frac{1+x}{1-x} = 2\left(\frac{x}{1} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots\right).$$

Setzt man in (1) für x den Wert $h:N$, so wird $\ln(1+x) = \ln(N+h) - \ln N$. Also ist, wenn h und N positiv sind und $h < N$ gewählt wird:

$$(4)\qquad \ln(N+h) - \ln N = \frac{h}{N} - \frac{h^2}{2N^2} + \frac{h^3}{3N^3} - \cdots.$$

Setzt man ferner in der Gleichung (3)

$$x = \frac{h}{2N+h} \quad \text{oder} \quad \frac{1+x}{1-x} = \frac{N+h}{N},$$

so folgt *für jedes positive h und N:*

$$(5)\ \ln(N+h) - \ln N = 2\left[\frac{h}{2N+h} + \frac{h^3}{3(2N+h)^3} + \frac{h^5}{5(2N+h)^5} + \cdots\right].$$

Die Gleichungen (4) und (5) wendet man an, um den natürlichen Logarithmus einer Zahl $N+h$ zu bestimmen, wenn der Logarithmus der Zahl N schon bekannt ist. Die absoluten Beträge der Glieder dieser Reihen nehmen schnell ab, sobald nur N einigermaßen größer als h ist. Im besonderen wird für $h = 1$:

$$(6)\quad \ln(N+1) - \ln N = \frac{1}{N} - \frac{1}{2N^2} + \frac{1}{3N^3} - \cdots \ (N > 1),$$

$$(7)\ \ln(N+1) - \ln N = 2\left[\frac{1}{2N+1} + \frac{1}{3(2N+1)^3} + \frac{1}{5(2N+1)^5} + \cdots\right].$$

122. Der Modul der gewöhnlichen Logarithmen. Es ist, wenn $\log x$ den gewöhnlichen Logarithmus mit der Basis 10 bezeichnet:

$$e^{\ln x} = 10^{\log x} = x.$$

Bildet man von beiden Seiten die natürlichen Logarithmen, so folgt

$$\ln x = \log x \cdot \ln 10.$$

Wird $1 : \ln 10 = M$ gesetzt, so ist also:

$$(1)\qquad \log x = M \cdot \ln x.$$

Demnach ergeben sich die gewöhnlichen Logarithmen, indem man die natürlichen Logarithmen mit der Konstanten M multipliziert, die der *Modul* der gewöhnlichen Logarithmen genannt wird.

Die Formeln der vorigen Nummer gestatten nun die Berechnung von M; zunächst ergibt die Formel (7) für $N = 1$:

$$\ln 2 = 2\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 3^3} + \frac{1}{5 \cdot 3^5} + \frac{1}{7 \cdot 3^7} + \frac{1}{9 \cdot 3^9} + \cdots\right). \tag{2}$$

Die Formel (5) gibt sodann, wenn $N = 8$ und $h = 2$ gesetzt wird:

$$\ln 10 = 3 \ln 2 + 2\left(\frac{1}{9} + \frac{1}{3 \cdot 9^3} + \frac{1}{5 \cdot 9^5} + \cdots\right), \tag{3}$$

und man hat folglich:

$$\frac{1}{M} = 6\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 3^3} + \frac{1}{5 \cdot 3^5} + \cdots\right) + 2\left(\frac{1}{9} + \frac{1}{3 \cdot 9^3} + \frac{1}{5 \cdot 9^5} + \cdots\right). \tag{4}$$

Die Glieder dieser Reihen nehmen rasch genug ab; aber es lassen sich auch viele andere bilden, in denen die Glieder noch rascher abnehmen. Wenn man z. B. in der Gleichung (5) von Nr. 121 für N den Wert $4096 = 2^{12}$ und $h = 4$, also $N + h = 4100$, und in (7) für N den Wert $40 = 2^2 \cdot 10$ setzt, so folgt:

$$\ln 41 + 2 \ln 10 = 12 \ln 2 + 2\left(\frac{1}{2049} + \frac{1}{3 \cdot 2049^3} + \frac{1}{5 \cdot 2049^5} + \cdots\right),$$

$$\ln 41 = \ln 10 + 2 \ln 2 + 2\left(\frac{1}{81} + \frac{1}{3 \cdot 81^3} + \frac{1}{5 \cdot 81^5} + \cdots\right).$$

Eliminiert man $\ln 41$ und $\ln 2$ aus diesen Gleichungen und der Gleichung (3), so kommt:

$$\frac{1}{M} = 20\left(\frac{1}{9} + \frac{1}{3 \cdot 9^3} + \frac{1}{5 \cdot 9^5} + \cdots\right) + 6\left(\frac{1}{81} + \frac{1}{3 \cdot 81^3} + \frac{1}{5 \cdot 81^5} + \cdots\right) - 6\left(\frac{1}{2049} + \frac{1}{3 \cdot 2049^3} + \cdots\right). \tag{5}$$

Berechnet man jedes Glied der Gleichung (4) oder (5) auf 28 Dezimalstellen, um für die Werte von $1 : M$ und von M 25 Dezimalen zu erhalten, so findet man:

$$\frac{1}{M} = 2{,}30258\ 50929\ 94045\ 68401\ 7991\overline{4},$$

$$M = 0{,}43429\ 44819\ 03251\ 82765\ 11289.$$

123. Berechnung der gewöhnlichen Logarithmen. Die Formeln (4) und (5) in Nr. 121 dienen zur Berechnung der gewöhnlichen Logarithmen, wenn man ihre rechten Seiten mit dem Modul M multipliziert. Man hat also:

$$\log(N+h) - \log N = M\left[\frac{h}{N} - \frac{h^2}{2N^2} + \frac{h^3}{3N^3} - \cdots\right],$$

$$\log(N+h) - \log N = 2M\left[\frac{h}{2N+h} + \frac{h^3}{3(2N+h)^3} + \cdots\right]$$

und, wenn man $h = 1$ setzt:

$$\log(N+1) - \log N = M\left[\frac{1}{N} - \frac{1}{2N^2} + \frac{1}{3N^3} - \cdots\right],$$

$$\log(N+1) - \log N = 2M\left[\frac{1}{2N+1} + \frac{1}{3(2N+1)^3} + \cdots\right].$$

Da der Modul M bekannt ist, so kann man mittels dieser Gleichungen die Berechnung ausführen.

124. Das Einschalten in den Logarithmentafeln. Bei der Benutzung der Logarithmentafeln nimmt man an, daß kleine Änderungen des Numerus proportional den entsprechenden Änderungen des Logarithmus seien. Wir wollen zeigen, daß diese Annahme für diejenige Annäherung, die man zu erreichen wünscht, zulässig ist. Zu dem Zwecke benutzen wir die erste Gleichung (5) aus Nr. 120:

$$\ln(1+x) = x - \frac{\theta x^2}{2},$$

worin x und θ positive echte Brüche sind. Ersetzen wir x durch $h : N$ und multiplizieren wir mit dem Modul M, so ergibt sich als Differenz der gewöhnlichen Logarithmen von $N + h$ und N:

$$\Delta = \log(N+h) - \log N = M\left(\frac{h}{N} - \frac{\theta h^2}{2N^2}\right). \tag{1}$$

Hierbei sei N eine ganze positive Zahl und h ein positiver echter Bruch, so daß $N + h$ zwischen N und $N + 1$ liegt. Die *Einschaltung* oder *Interpolation* in den Logarithmentafeln besteht nun darin, daß man die für $h = 1$ hervorgehende Differenz

$$D = \log(N+1) - \log N = M\left(\frac{1}{N} - \frac{\theta'}{2N^2}\right), \tag{2}$$

wo θ' auch ein positiver echter Bruch ist, berechnet, sie im Verhältnis $h : 1$ teilt und alsdann hD zu $\log N$ addiert,

um angenähert $\log(N+h)$ zu finden, während in Wahrheit Δ zu $\log N$ zu addieren wäre. Also ist $\varepsilon = \Delta - hD$ der *Fehler* beim Interpolieren der Logarithmen. Es ergibt sich aus (1) und (2):

$$\varepsilon = \frac{M(\theta' - \theta h)h}{2N^2}.$$

Wenn man dagegen den Numerus $N+h$ aus dem gegebenen Logarithmus $\log(N+h)$ bestimmen will, so berechnet man Δ und D und benutzt statt des zu N zu addierenden h den Bruch $\Delta : D$, so daß $\eta = h - \Delta : D$ der *absolute Fehler* beim Interpolieren des Numerus ist. Es ergibt sich aus (1) und (2):

$$\eta = \frac{(\theta h - \theta')h}{2N - \theta'}.$$

Als *relativen* Fehler beim Interpolieren des Numerus können wir $\eta : N$ bezeichnen. Da θ, θ' und h positive echte Brüche sind und $M < \frac{1}{2}$ ist, so wird:

$$|\varepsilon| < \frac{1}{4N^2}, \quad \left|\frac{\eta}{N}\right| < \frac{1}{N(2N-1)}.$$

Man sieht hieraus, daß, wenn N größer ist als 10000, wie es bei *siebenstelligen Tafeln* der Fall ist, der absolute Betrag von ε kleiner wird als der vierte Teil der achten Dezimaleinheit. Der relative Fehler $\eta : N$ übersteigt absolut genommen kaum die Hälfte der achten Dezimaleinheit. In *fünfstelligen Tafeln* ist N größer als 1000, daher der absolute Betrag von ε kleiner als der vierte Teil der sechsten Dezimaleinheit und der absolute Betrag des relativen Fehlers $\eta : N$ kaum größer als die Hälfte der sechsten Dezimaleinheit.

125. Die Binomialreihe. Wollen wir die m^{te} Potenz eines *Binoms* $a + b$ für *irgend einen* Wert des Exponenten m betrachten, so müssen wir $a + b$ nach Nr. 5 *positiv* annehmen und unter $(a+b)^m$ den *positiven* Wert der Potenz verstehen. Setzen wir $b : a = x$, so wird die Potenz gleich $a^m(1+x)^m$. Wir stellen uns daher die Aufgabe, *den positiven Wert von* $(1+x)^m$ *für positive Werte von* $1+x$, *d. h. für* $x > -1$, *als eine Potenzreihe von* x *darzustellen.*

Da nach Nr. 61

$$\frac{d^n(1+x)^m}{dx^n} = m(m-1)\cdots(m-n+1)(1+x)^{m-n}$$

ist und für $x = 0$ gleich $m(m-1)\cdots(m-n+1)$ wird, so gibt die Maclaurinsche Formel (1) in Nr. 116:

$$(1)\qquad (1+x)^m = 1 + \frac{m}{1}x + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}x^2 + \cdots + \frac{m(m-1)\cdots(m-n+2)}{1\cdot 2\cdots(n-1)}x^{n-1} + R_n,$$

wo nach (2) und (3) in Nr. 116 entweder

$$(2)\qquad R_n = \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n(1+\theta x)^{m-n}$$

oder

$$(3)\qquad R_n = \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{(n-1)!}x^n(1-\theta)^{n-1}(1+\theta x)^{m-n}$$

ist, wobei θ in (2) und (3) verschiedene positive echte Brüche vorstellt. Wäre nachgewiesen worden, daß für jeden Wert von θ zwischen Null und Eins der Grenzwert von R_n für $\lim n = \infty$ gleich Null wäre, so würden wir zu der sogenannten *Binomialreihe* gelangen:

$$(4)\qquad (1+x)^m = 1 + \frac{m}{1!}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \cdots$$

die übrigens mit ihrem $(m+1)^{\text{ten}}$ Gliede endigt, sobald m eine positive ganze Zahl ist, indem alsdann alle folgenden Glieder verschwinden. Wir nehmen aber im folgenden für m eine beliebige Zahl an.

In der Reihe (4) ist das Verhältnis des $(n+1)^{\text{ten}}$ Gliedes zum n^{ten} Gliede gleich $(m-n+1)x:n$ oder

$$-\left(1 - \frac{m+1}{n}\right)x$$

und hat für $\lim n = \infty$ den Grenzwert $-x$. Nach Satz 13 in Nr. 105 divergiert daher die Reihe (4) für $|x| > 1$. Bei der Untersuchung des Grenzwertes des Restes R_n können wir uns also von vornherein auf das Intervall $-1 < x < +1$ beschränken. Was im Falle $x = -1$ oder $x = +1$ eintritt, wollen wir erst später (in Nr. 126) untersuchen.

Je nachdem x positiv oder negativ ist, empfiehlt es sich, die Restformel (2) oder (3) zu benutzen.

a) Ist $0 < x < +1$, aber $x \neq +1$, so wird nach (2):

$$R_n = \frac{mx}{1}\cdot\frac{(m-1)x}{2}\cdot\frac{(m-2)x}{3}\cdots\frac{(m-n+1)x}{n}\cdot\frac{1}{1+(\theta x)^{n-m}}.$$

Der letzte Faktor hat, wenn $n > m$ gewählt wird, im Nenner eine positive Potenz der zwischen 1 und 2 gelegenen Zahl $1 + \theta x$, so daß der Grenzwert dieses Faktors für $\lim n = \infty$ gleich Null oder gleich Eins wird. Der zweite Fall tritt für $x = 0$ oder $\theta = 0$ ein. Das Produkt der n ersten Faktoren hat, behaupten wir, den Grenzwert Null. Denn sobald n um eine Einheit wächst, tritt ein neuer Faktor

$$\frac{(m-n)x}{n+1} \quad \text{oder} \quad -x\left(1 - \frac{m+1}{n+1}\right)$$

hinzu, dessen Grenzwert für $\lim n = \infty$ gleich $-x$ wird. Es leuchtet also ein, daß, wenn n wächst, die Zahl derjenigen Faktoren in R_n, die absolut genommen größer als Eins sind, endlich ist, während die Zahl derjenigen Faktoren, die absolut genommen kleiner als Eins sind, ohne Ende mit n wächst. Es gibt daher eine positive Zahl $k < 1$ derart, daß immer mehr und mehr Faktoren absolut genommen kleiner als k werden. Da nun k^r für $\lim r = \infty$ den Grenzwert Null hat, so folgt, daß $\lim R_n = 0$ für $\lim n = \infty$ sein muß.

b) Ist $-1 < x < 0$, aber $x \neq -1$, so setzen wir $x = -z$ und betrachten nach (3) den Rest:

$$R_n = (-1)^n \frac{(m-1)z}{1} \cdot \frac{(m-2)z}{2} \cdots \frac{(m-n+1)z}{n-1} \cdot mz \cdot (1-\theta z)^{m-1} \left(\frac{1-\theta}{1-\theta z}\right)^{n-1}.$$

Das Produkt der Faktoren in der ersten Zeile hat, wie wir vorhin sahen, da ja jetzt $0 < z < +1$ ist, den Grenzwert Null, der nächste Faktor mz ist endlich, ebenso der folgende. Der letzte Faktor ist eine Potenz, deren Basis absolut genommen zwischen 0 und 1 liegt und höchstens gleich Eins (für $z = 0$ oder $\theta = 0$) wird, so daß diese Potenz für $\lim n = \infty$ gleich Null oder Eins ist. Folglich ist $\lim R_n = 0$ für $\lim n = \infty$.

Wir haben also erkannt, *daß die Binomialformel* (4) *für* $|x| > 1$ *falsch ist, richtig dagegen für* $-1 < x < +1$, während es noch dahingestellt bleibt, was sich im Falle $x = +1$ und im Falle $x = -1$ ergibt.

126. Weitere Untersuchung der Binomialreihe. Wenn $x = +1$ ist, geht die Binomialreihe in:

$$(1) \qquad 1 + \frac{m}{1} + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \cdots$$

über, dagegen, wenn $x = -1$ ist, in:

$$(2) \qquad 1 - \frac{m}{1} + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} - \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \cdots$$

In beiden Reihen ist das Verhältnis des $(n+1)^{\text{ten}}$ Gliedes zum n^{ten} Gliede absolut genommen gleich

$$\left| 1 - \frac{m+1}{n} \right|,$$

demnach größer als Eins für $m + 1 < 0$. In diesem Falle kann daher der Grenzwert des n^{ten} Gliedes für $\lim n = \infty$ gewiß nicht gleich Null sein, d. h. *beide Reihen divergieren für* $m < -1$, nach Satz 4, Nr. 103.

Ferner ergeben sich augenscheinlich *divergente Reihen für* $m = -1$. Im folgenden setzen wir daher m größer als -1 voraus.

Zunächst liege m im Intervalle von -1 bis 0, sei aber weder gleich -1 noch gleich 0. Dann besteht die Reihe (1) aus abwechselnd positiven und negativen Gliedern, die Reihe (2) dagegen aus lauter positiven Gliedern. Dabei ist die Reihe (2) die der absoluten Beträge der Glieder der Reihe (1). Da jetzt kein Glied der Reihe (2) kleiner als das entsprechende Glied der Reihe

$$1 - \frac{m}{1} - \frac{m}{2} - \frac{m}{3} - \cdots$$

ist, die ebenfalls nur positive Glieder hat und divergiert, weil die Reihe $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots$ nach Nr. 103 divergent ist, so folgt aus Satz 10, Nr. 105: *Die Reihe (2) divergiert für* $-1 < m < 0$. Hiernach kann die Reihe (1), falls sie konvergiert, sicher nur bedingt konvergieren. Da ihre Glieder abwechselnde Vorzeichen haben, ihre absoluten Beträge aber abnehmen und nach Null streben, so lehrt Satz 9, Nr. 104: *Die Reihe (1) konvergiert bedingt für* $-1 < m < 0$.

Im Falle $m = 0$ reduzieren sich beide Reihen auf ihr erstes Glied.

Wir kommen endlich zu dem Falle $m > 0$. Bezeichnen wir den absoluten Betrag des n^{ten} Gliedes der Reihe (1) oder,

was dasselbe ist, der Reihe (2) mit u_n, so haben wir zunächst, wie schon gesagt wurde:

$$(3) \qquad \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{m+1}{n}.$$

Wir lassen hier die Striche, die den absoluten Betrag der rechten Seite andeuten, deshalb fort, weil wir annehmen können, daß n größer als $m+1$ gewählt worden sei. Betrachten wir andererseits die Reihe

$$\frac{1}{1^{m+1}} + \frac{1}{2^{m+1}} + \cdots + \frac{1}{n^{m+1}} + \cdots,$$

die für $m > 0$ nach dem Beispiele in Nr. 105 konvergiert. Ist v_n ihr n^{tes} Glied, so haben wir:

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-m-1}.$$

Diese Potenz kann nach (1) und (2) in Nr. 125 entwickelt werden, wenn in jener Formel x durch $1:n$, m durch $-m-1$ und n insbesondere durch 2 ersetzt wird. Dann kommt:

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = 1 - \frac{m+1}{n} + \frac{(m+1)(m+2)}{2n^2}\left(1 + \frac{\theta}{n}\right)^{-m-3},$$

wobei θ einen positiven echten Bruch bedeutet. Da der letzte Summand positiv ist, so zeigt die Vergleichung mit (3), daß

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < \frac{v_{n+1}}{v_n}, \quad \text{d. h.} \quad \frac{u_{n+1}}{v_{n+1}} < \frac{u_n}{v_n}$$

wird. Wenn nun für irgend einen bestimmten Wert n etwa $u_n = kv_n$ ist, so folgt hieraus $u_{n+1} < kv_{n+1}$, $u_{n+2} < kv_{n+2}$ usw. Die Reihe $u_1 + u_2 + \cdots$ mit lauter positiven Gliedern konvergiert mithin, weil die Reihe $v_1 + v_2 + \cdots$ konvergent ist (vgl. Satz 10, Nr. 105). Also folgt: *Die Reihen (1) und (2) sind unbedingt konvergent für* $m > 0$.

Zusammengefaßt: *Die Reihe (1) konvergiert für* $m \geqq 0$ *unbedingt und für* $-1 < m < 0$ *bedingt, die Reihe (2) konvergiert für* $m \geqq 0$ *unbedingt. In allen andern Fällen sind die Reihen divergent.*

Da $(1+x)^m$ für $x = +1$ gleich 2^m und für $x = -1$ und $m > 0$ gleich Null ist, so ist zu vermuten, daß die erste Reihe, falls sie konvergiert, gleich 2^m, die zweite gleiche Null ist, was in der Tat von *Abel* bewiesen worden ist. Wir gehen hierauf jedoch nicht ein.

§ 4. Reihenentwicklungen nach positiven und negativen Potenzen.

127. Allgemeine Regeln. Wird die Funktion $f(x)$ oder eine ihrer Ableitungen für $x = x_0$ unstetig, so kann man $f(x_0 + h)$ *nicht* nach dem Taylorschen Satze in eine unendliche Reihe entwickeln, z. B. nicht $\ln h$ für $x_0 = 0$. Dies ist der Grund, weshalb wir in Nr. 120 nicht $\ln x$, sondern $\ln(1 + x)$ entwickelt haben.

Um aber auch in solchen Fällen eine Methode zur Berechnung der Funktion abzuleiten, wollen wir annehmen, die Funktion $f(x)$ habe, wenn x nach einem gewissen Werte x_0 hinstrebt, den Grenzwert $+\infty$ oder $-\infty$. Die einfachste derartige Funktion ist

$$\frac{1}{x - x_0}.$$

Nun kann es sein, daß man eine solche Potenz von $x - x_0$ mit *positivem* Exponenten m ausfindig machen kann, daß das Produkt von $f(x)$ mit ihr für $x = x_0$ nicht mehr den Grenzwert Unendlich, sondern einen endlichen und von Null verschiedenen Grenzwert hat, daß also

$$(1) \qquad \lim_{x = x_0} (x - x_0)^m f(x) = A$$

ist, wo A eine endliche Zahl $\neq 0$ bedeutet. Dann sagt man, daß $f(x)$ an der Stelle x_0 *in der m^{ten} Ordnung mit* $1 : (x - x_0)$ *unendlich* wird. Es kann, wenn überhaupt, nur *eine* solche Zahl geben, denn jede andere Potenz $(x - x_0)^n$ ist in der Form $(x - x_0)^m (x - x_0)^{n-m}$ darstellbar, also:

$$\lim_{x = x_0} (x - x_0)^n f(x) = \lim_{x = x_0} (x - x_0)^{n-m} \cdot \lim_{x = x_0} (x - x_0)^m f(x)$$

nach Satz 31 in Nr. 24, so daß aus (1) folgt:

$$\lim_{x = x_0} (x - x_0)^n f(x) = A \lim_{x = x_0} (x - x_0)^{n-m}.$$

Für $n < m$ ist dieser Grenzwert Unendlich, für $n > m$ Null.

Wir geben bei dieser Gelegenheit zugleich eine zweite Definition: Wenn $f(x)$ für $x = x_0$ den *Grenzwert Null* hat, so sagt man, daß $f(x)$ an der Stelle x_0 *in der m^{ten} Ordnung mit* $x - x_0$ *zu Null wird*, wenn man eine *positive* Zahl m so ausfindig machen kann, daß

(2) $$\lim_{x=x_0} \frac{f(x)}{(x-x_0)^m} = A,$$

d. h. zu einem endlichen und von Null verschiedenen Werte wird. Hier kann man entsprechend beweisen, daß, wenn es überhaupt eine solche Zahl m gibt, dann nur eine vorhanden ist.

In jedem der beiden Fälle (1) und (2) wird

$$(x-x_0)^m f(x) \quad \text{bzw.} \quad \frac{f(x)}{(x-x_0)^m}$$

eine solche Funktion $f_1(x)$ von x, die für $x = x_0$ einen endlichen und von Null verschiedenen Wert A annimmt. Wir können also beide Formeln in die eine zusammenfassen:

(3) $$f(x) = (x-x_0)^n f_1(x),$$

wobei $f_1(x)$ für $x = x_0$ endlich und von Null verschieden ist und n sowohl positiv als auch negativ sein kann. Ist $n > 0$, so hat $f(x)$ für $x = x_0$ den Grenzwert Null und ist dort gleich Null in der n^{ten} Ordnung; ist $n < 0$, so hat $f(x)$ für $x = x_0$ den Grenzwert Unendlich und wird dort unendlich groß in der $(-n)^{\text{ten}}$ Ordnung.

Bedeutet A wie vorhin den endlichen und von Null verschiedenen Wert, den $f_1(x)$ für $x = x_0$ erreicht, so ist $f_1(x) - A$ eine Funktion, die für $x = x_0$ den Grenzwert Null hat. Wird sie dort gleich Null in der n_1^{ten} Ordnung, so ergibt sich analog (3):

(4) $$f_1(x) - A = (x-x_0)^{n_1} f_2(x),$$

wo $f_2(x)$ für $x = x_0$ einen endlichen und von Null verschiedenen Wert A_1 hat, so daß $f_2(x) - A_1$ für $x = x_0$ wieder den Grenzwert Null hat. Wird $f_2(x) - A_1$ dort gleich Null in der n_2^{ten} Ordnung, so kommt entsprechend weiter:

(5) $$f_2(x) - A_1 = (x-x_0)^{n_2} f_3(x),$$

wo nun $f_3(x_0)$ endlich und von Null verschieden ist, usw. Nach (3) und (4) wird:

$$f(x) = A(x-x_0)^n + (x-x_0)^{n+n_1} f_2(x),$$

also nach (5):

(6) $$f(x) = A(x-x_0)^n + A_1(x-x_0)^{n+n_1} + (x-x_0)^{n+n_1+n_2} f_3(x),$$

usw. Kann man in dieser Weise eine Anzahl einzelner Schritte machen, so erhält man allgemein:

$$f(x) = A(x-x_0)^n + A_1(x-x_0)^{n+n_1} + A_2(x-x_0)^{n+n_1+n_2} + \cdots$$
$$\cdots + A_k(x-x_0)^{n+n_1+n_2+\cdots+n_k} + R_k,$$

wo dann noch eine Funktion von x als *Rest* R_k übrig bleibt. Es ist dies eine Entwicklung nach *steigenden* Potenzen von $x - x_0$, da $n_1, n_2, n_3, \ldots n_k$ sämtlich *positiv* sind; aber die wachsenden Exponenten

$$n, n + n_1, n + n_1 + n_2, \cdots n + n_1 + n_2 + \cdots + n_k$$

können sehr wohl *negative* Zahlen sein. *Sie brauchen auch keine ganzen Zahlen zu sein.*

Hieraus ergibt sich eine *endlose* Entwicklung der Funktion $f(x)$ nach steigenden Potenzen von $x - x_0$, wenn dasselbe Verfahren auch auf den Rest R_k anwendbar ist *und* $\lim R_k = 0$ *wird für* $\lim k = \infty$.

128. Beispiel. Zur Erläuterung betrachten wir die Funktion

$$f(x) = \sqrt{\sin x - \sin x_0},$$

die für $x = x_0$ den Grenzwert Null hat und nicht nach dem Taylorschen Satze entwickelt werden kann, weil $f'(x)$ für $x = x_0$ unstetig ist. Die Quadratwurzel habe hier wie im folgenden etwa das Pluszeichen. Da für jedes x die Taylorsche Entwicklung

$$\sin x - \sin x_0 = \cos x_0 \frac{x-x_0}{1!} - \sin x_0 \frac{(x-x_0)^2}{2!} - \cos x_0 \frac{(x-x_0)^3}{3!} +$$
$$+ \sin x_0 \frac{(x-x_0)^4}{4!} + \cos x_0 \frac{(x-x_0)^5}{5!} - \cdots$$

gilt, so folgt:

$$\lim_{x=x_0} \frac{f(x)}{\sqrt{x-x_0}} = \sqrt{\cos x_0} = A.$$

Also wird $f(x)$ für $x = x_0$ in der Ordnung $n = \frac{1}{2}$ zu Null. Es ist nun die Funktion $f_1(x) = f(x) : \sqrt{x - x_0}$ zu bilden und alsdann zu untersuchen, in welcher Ordnung die Differenz

$$f_1(x) - A = \frac{f(x)}{\sqrt{x-x_0}} - \sqrt{\cos x_0}$$

für $x = x_0$ gleich Null wird. Sie läßt sich so schreiben:

$$f_1(x) - A$$
$$= \sqrt{\cos x_0 - \sin x_0 \frac{x-x_0}{2!} - \cos x_0 \frac{(x-x_0)^2}{3!} + \cdots} - \sqrt{\cos x_0}$$
$$= \frac{-\sin x_0 \frac{x-x_0}{2!} - \cos x_0 \frac{(x-x_0)^2}{3!} + \cdots}{\sqrt{\cos x_0 - \sin x_0 \frac{x-x_0}{2!} - \cos x_0 \frac{(x-x_0)^2}{3!} + \cdots} + \sqrt{\cos x_0}}.$$

Hieraus folgt

$$A_1 = \lim_{x=x_0} \frac{f_1(x)-A}{x-x_0} = -\frac{1}{4} \frac{\sin x_0}{\sqrt{\cos x_0}},$$

so daß die Zahl n_1 in (4), Nr. 127, gleich Eins ist. Nunmehr kommt:

$$f_2(x) = \frac{f_1(x)-A}{x-x_0}.$$

Jetzt ist zu untersuchen, in welcher Ordnung die Differenz $f_2(x) - A_1$ für $x = x_0$ gleich Null wird, usw. Die Entwicklung von $f(x)$ beginnt folglich so:

$$\sqrt{\sin x - \sin x_0} = \sqrt{\cos x_0}\,\sqrt{x-x_0} - \tfrac{1}{4}\frac{\sin x_0}{\sqrt{\cos x_0}}\sqrt{x-x_0}^{\,3} + R_2,$$

wo der Rest ist:

$$R_2 = \sqrt{x-x_0}^{\,3}\left(f_2(x) + \frac{\sin x_0}{4\sqrt{\cos x_0}}\right).$$

Schneller kommt man in diesem Beispiele zum Ziele, wenn man $x - x_0 = z^2$ setzt, denn dann wird die Funktion

$$f(x) = z\sqrt{\cos x_0 - \sin x_0 \cdot \frac{z^2}{2!} - \cos x_0 \cdot \frac{z^4}{3!} + \sin x_0 \cdot \frac{z^6}{4!} + \cdots}$$

nach ganzen positiven Potenzen von z nach dem Maclaurinschen Satze entwickelbar, und zwar treten nur die ungeraden Potenzen von z auf, so daß sich eine Reihe ergibt von der Form:

$$f(x) = a_1 z + a_3 z^3 + a_5 z^5 + \cdots + a_{2n-1} z^{2n-1} + R_{2n+1}.$$

Mithin ist $f(x)$ darstellbar in einer solchen Form:

$$\sqrt{\sin x - \sin x_0} = \sqrt{x-x_0}\,[a_1 + a_3(x-x_0) + a_5(x-x_0)^2 + \cdots$$
$$\cdots + a_{2n-1}(x-x_0)^{n-1}] + R_{2n+1}.$$

Auf die Berechnung der Koeffizienten gehen wir nicht näher ein.

128]

§ 5. Bestimmung von Grenzwerten.

129. Grenzwert eines Bruches an einer Stelle, wo Zähler und Nenner verschwinden. Wenn eine Funktion in der Form eines Bruches $f(x):F(x)$ gegeben ist, so kann es eintreten, daß Zähler und Nenner für einen speziellen Wert x_0 von x beide gleich Null werden.

Es handelt sich dann darum, zu ermitteln, welchen Grenzwert der Bruch $f(x):F(x)$ für $x = x_0$ hat, d. h. welchen Wert er annimmt, wenn x sich ohne Ende dem Werte x_0 nähert. Wir wollen annehmen, daß sowohl $f(x)$ als auch $F(x)$ in der Umgebung der Stelle x_0 nebst ihren ersten Ableitungen $f'(x)$ und $F'(x)$ stetig seien.

Wählen wir alsdann den absoluten Betrag von h so klein, daß $x_0 + h$ in der Umgebung von x_0 liegt, so ergibt sich nach Satz 10 in Nr. 31 und Satz 4 in Nr. 21:

$$\frac{f(x_0+h)}{F(x_0+h)} = \frac{f'(x_0+h_1)}{F'(x_0+h_1)},$$

vorausgesetzt, daß $F'(x_0) \neq 0$ ist. Dabei bedeutet h_1 eine zwischen 0 und h gelegene Zahl. Für $\lim h = 0$ ergibt sich also:

$$\lim_{x=x_0} \frac{f(x)}{F(x)} = \lim_{x=x_0} \frac{f'(x)}{F'(x)},$$

mithin:

Satz 25: Wenn die Funktionen $f(x)$ und $F(x)$ für $x = x_0$ beide gleich Null sind und wenn sie in der Umgebung von x_0 nebst ihren ersten Ableitungen stetig sind, so ist:

$$\lim_{x=x_0} \frac{f(x)}{F(x)} = \lim_{x=x_0} \frac{f'(x)}{F'(x)}.$$

Wir heben hierbei hervor, daß es noch dahingestellt bleibt, ob überhaupt ein Grenzwert von $f'(x):F'(x)$ für $x = x_0$ vorhanden ist. Gibt es einen, so ist er notwendig der gesuchte Grenzwert.

Die Voraussetzung, daß $F'(x_0) \neq 0$ sei, haben wir in diesem Satze fortgelassen, weil er auch gilt, wenn $F'(x_0) = 0$ ist. Zum Beweise gehen wir, da der angewandte Satz 10 in Nr. 31 für diesen Fall nicht bewiesen wurde, auf den Mittelwertsatz 3 in Nr. 28 zurück, wonach wegen $f(x_0) = 0$ und $F(x_0) = 0$:

$$f(x_0 + h) = hf'(x_0 + \theta h),$$
$$F(x_0 + h) = hF'(x_0 + \vartheta h)$$

ist, wenn θ und ϑ gewisse positive echte Brüche bedeuten Hiernach gilt in der Umgebung von x_0 die Formel:

$$\frac{f(x_0 + h)}{F(x_0 + h)} = \frac{f'(x_0 + \theta h)}{F'(x_0 + \vartheta h)}.$$

Da nun $f'(x)$ und $F'(x)$ in der Umgebung von x_0 stetig sind, so ergibt sich wieder für $\lim h = 0$ die Formel des Satzes, auch wenn $F'(x_0) = 0$ ist. In diesem Falle kann als Grenzwert $+\infty$ oder $-\infty$ hervorgehen.

Die Ermittelung des Grenzwertes des Bruches für $x = x_0$ wird durch den Satz 25 auf die Ermittelung des Grenzwertes des Bruches $f'(x):F'(x)$ für $x = x_0$ zurückgeführt. Wenn nun $f'(x)$ und $F'(x)$ beide für $x = x_0$ gleich Null sind, so können wir den Satz 25 statt auf $f(x):F(x)$ auf $f'(x):F'(x)$ anwenden, so daß wir dann finden:

$$\lim_{x=x_0} \frac{f'(x)}{F'(x)} = \lim_{x=x_0} \frac{f''(x)}{F''(x)},$$

vorausgesetzt, daß $f'(x)$ und $F'(x)$ in der Umgebung von x_0 nebst ihren Ableitungen $f''(x)$ und $F''(x)$ stetig sind. Diesen Schluß können wir wiederholen, wenn $f''(x_0)$ und $F''(x)$ gleich Null sind, usw. Hiernach leuchtet ein, daß der folgende Satz gilt:

Satz 26: Wenn die Funktionen $f(x)$ und $F(x)$ nebst ihren n ersten Ableitungen in der Umgebung der Stelle $x = x_0$ stetig sind und nebst ihren $n-1$ ersten Ableitungen für $x = x_0$ verschwinden, so ist

$$\lim_{x=x_0} \frac{f(x)}{F(x)} = \lim_{x=x_0} \frac{f^{(n)}(x)}{F^{(n)}(x)}.$$

Die Sätze 25 und 26 gelten auch, wenn der Wert x_0, für den der Grenzwert zu bestimmen ist, $+\infty$ oder $-\infty$ ist. Es genügt zu beweisen, daß Satz 25 richtig bleibt für $\lim x_0 = \infty$.

Wir setzen zu diesem Zwecke $x = 1:z$, so daß

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{f\left(\frac{1}{z}\right)}{F\left(\frac{1}{z}\right)}$$

wird. Für $\lim x_0 = \infty$ wird dann $z = 0$, also:

$$\lim_{x=\infty} \frac{f(x)}{F(x)} = \lim_{z=0} \frac{f\left(\frac{1}{z}\right)}{F\left(\frac{1}{z}\right)}. \tag{1}$$

Wenn nun die rechts auftretenden Funktionen, aufgefaßt als Funktionen von z, den Voraussetzungen des Satzes 25 genügen, so ist nach diesem Satze:

$$\lim_{z=0} \frac{f\left(\frac{1}{z}\right)}{F\left(\frac{1}{z}\right)} = \lim_{z=0} \frac{-\frac{1}{z^2} f'\left(\frac{1}{z}\right)}{-\frac{1}{z^2} F'\left(\frac{1}{z}\right)} = \lim_{z=0} \frac{f'\left(\frac{1}{z}\right)}{F'\left(\frac{1}{z}\right)}. \tag{2}$$

Wir haben aber:

$$\frac{f'\left(\frac{1}{z}\right)}{F'\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{f'(x)}{F'(x)}. \tag{3}$$

Mithin folgt aus (1), (2) und (3):

$$\lim_{x=\infty} \frac{f(x)}{F(x)} = \lim_{x=\infty} \frac{f'(x)}{F'(x)},$$

was zu beweisen war.

130. Grenzwert eines Bruches an einer Stelle, wo Zähler und Nenner unendlich werden. Der Satz 25 der vorigen Nummer gilt auch für den Fall, daß $f(x)$ und $F(x)$ für $x = x_0$ beide unendlich werden. Wir werden nämlich jetzt den folgenden Satz beweisen:

Satz 27: Wenn die Funktionen $f(x)$ und $F(x)$ für $x = x_0$ den Grenzwert $+\infty$ oder $-\infty$ haben, wenn sie ferner nebst ihren Ableitungen für jeden Wert von x in der Umgebung von x_0, abgesehen von x_0 selbst, bestimmte endliche Werte haben und wenn außerdem in dieser Umgebung $F'(x)$ nirgends gleich Null ist, so wird:

$$\lim_{x=x_0} \frac{f(x)}{F(x)} = \lim_{x=x_0} \frac{f'(x)}{F'(x)}.$$

Dies gilt auch für $\lim x = \pm \infty$.

Wie bei Satz 25 machen wir darauf aufmerksam, daß wir nicht beweisen werden, daß der Grenzwert rechter Hand existiert, sondern nur, daß der gesuchte Grenzwert eben dieser Grenzwert sein muß, falls er vorhanden ist.

Wir wollen den Satz zuerst für $\lim x_0 = +\infty$ beweisen. *Unter der Umgebung von x_0 ist dann die Gesamtheit aller Zahlen x zu verstehen, die größer als eine gewisse Zahl n sind.* Bedeuten x_1 und x zwei solche Zahlen und ist $x > x_1$, so gibt es nach Satz 10 in Nr. 31 einen Wert x_2 zwischen x_1 und x derart, daß

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{F(x)-F(x_1)} = \frac{f'(x_2)}{F'(x_2)}$$

wird. Diese Gleichung kann auch so geschrieben werden:

$$\frac{f(x)}{F(x)} \cdot \frac{1-\frac{f(x_1)}{f(x)}}{1-\frac{F(x_1)}{F(x)}} = \frac{f'(x_2)}{F'(x_2)} \quad (x_1 < x_2 < x). \tag{1}$$

a) Es sei nun zunächst ein endlicher Grenzwert

$$\lim_{x=+\infty} \frac{f'(x)}{F'(x)} = A \tag{2}$$

vorhanden. Wenn man dann eine beliebig kleine positive Zahl σ vorschreibt, so gibt es eine Zahl x_1 derart, daß nicht nur

$$\left|\frac{f'(x_1)}{F'(x_1)} - A\right| < \sigma$$

wird, vielmehr diese Ungleichung auch für jedes größere x besteht. Da $x_2 > x_1$ ist, wird also:

$$A - \sigma < \frac{f'(x_2)}{F'(x_2)} < A + \sigma.$$

Die Gleichung (1) liefert demnach:

$$A - \sigma < \frac{f(x)}{F(x)} \cdot \frac{1-\frac{f(x_1)}{f(x)}}{1-\frac{F(x_1)}{F(x)}} < A + \sigma.$$

Setzen wir jetzt für x den Grenzwert $+\infty$, während x_1 fest bleibt, so ergibt sich:

$$A - \sigma < \lim_{x=+\infty} \frac{f(x)}{F(x)} \cdot \lim_{x=+\infty} \frac{1-\frac{f(x_1)}{f(x)}}{1-\frac{F(x_1)}{F(x)}} < A + \sigma.$$

Der zweite Grenzwert ist gleich Eins, also folgt:

$$A - \sigma < \lim_{x=+\infty} \frac{f(x)}{F(x)} < A + \sigma.$$

Da σ aber beliebig klein gewählt worden war, so bedeutet dies:

$$\lim_{x=+\infty} \frac{f(x)}{F(x)} = A$$

oder wegen Gleichung (2):

$$\lim_{x=+\infty} \frac{f(x)}{F(x)} = \lim_{x=+\infty} \frac{f'(x)}{F'(x)}.$$

b) Ist nun andererseits:

$$\lim_{x=+\infty} \frac{f'(x)}{F'(x)} = +\infty,$$

so kann man n so groß wählen, daß für $x > n$

$$\frac{f'(x)}{F'(x)} > N$$

wird, wo N eine beliebig große vorgeschriebene Zahl bedeutet. Alsdann liefert die Gleichung (1):

$$\frac{f(x)}{F(x)} \cdot \frac{1 - \frac{f(x_1)}{f(x)}}{1 - \frac{F(x_1)}{F(x)}} > N$$

und durch Übergang zur Grenze für $\lim x = +\infty$:

$$\lim_{x=+\infty} \frac{f(x)}{F(x)} > N,$$

d. h.:

$$\lim_{x=+\infty} \frac{f(x)}{F(x)} = +\infty = \lim_{x=+\infty} \frac{f'(x)}{F'(x)}.$$

c) Ist drittens

$$\lim_{x=+\infty} \frac{f'(x)}{F'(x)} = -\infty,$$

so verfahren wir wie unter b, nur ist $> N$ durch $< -N$ zu ersetzen.

Der Beweis des Satzes 27 für $\lim x = -\infty$ ist natürlich ganz entsprechend zu führen.

Um nun den Satz für den Fall zu beweisen, daß x_0 einen *endlichen* Wert hat, setzen wir $x = x_0 + 1 : z$. Für $\lim z = \pm\infty$ ist dann $x = x_0$, und daher kommt nach dem Vorhergehenden:

$$\lim_{x=x_0} \frac{f(x)}{F(x)} = \lim_{z=\infty} \frac{f\left(x_0 + \frac{1}{z}\right)}{F\left(x_0 + \frac{1}{z}\right)} = \lim_{z=\infty} \frac{-f'\left(x_0 + \frac{1}{z}\right) \cdot \frac{1}{z^2}}{-F'\left(x_0 + \frac{1}{z}\right) \cdot \frac{1}{z^2}}$$

$$= \lim_{z=\infty} \frac{f'\left(x_0 + \frac{1}{z}\right)}{F'\left(x_0 + \frac{1}{z}\right)} = \lim_{x=x_0} \frac{f'(x)}{F'(x)}.$$

Mithin gilt auch in diesem Falle der Satz 27.

131. Beispiele.

1. Beispiel: In den beiden Brüchen:

$$\frac{\sin x}{x} \quad \text{und} \quad \frac{\operatorname{tg} x}{x}$$

werden Zähler und Nenner für $x = 0$ gleich Null. Nach Satz 25 in Nr. 129 ist also, wie sich schon in Nr. 26 ergab:

$$\lim_{x=0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x=0} \frac{\cos x}{1} = 1,$$

$$\lim_{x=0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim_{x=0} \frac{1}{\cos^2 x} = 1.$$

2. Beispiel: Zähler und Nenner des Bruches

$$\frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}$$

werden ebenso wie ihre ersten und zweiten Ableitungen für $x = 0$ sämtlich gleich Null. Die Ableitungen dritter Ordnung sind bezüglich

$$e^x + e^{-x} \quad \text{und} \quad \cos x$$

und haben für $x = 0$ die Werte 2 und 1. Folglich hat der Bruch nach Satz 26 in Nr. 129 für $x = 0$ den Grenzwert 2.

3. Beispiel: Zähler und Nenner des Bruches

$$\frac{x^x - x}{x - 1 - \ln x}$$

sind gleich Null für $x = 1$, desgleichen ihre Ableitungen erster Ordnung:

$$x^x(1 + \ln x) - 1 \quad \text{und} \quad 1 - \frac{1}{x}.$$

Die Ableitungen zweiter Ordnung

$$x^x\left[(1 + \ln x)^2 + \frac{1}{x}\right] \quad \text{und} \quad \frac{1}{x^2}$$

sind für $x = 1$ bezüglich gleich 2 und 1. Folglich ist der Grenzwert des Bruches für $x = 1$ gleich 2.

4. *Beispiel:* Wenn in dem Bruche $a^x : x^n$ die Konstante $a > 1$ und n eine ganze positive Zahl ist, so werden Zähler und Nenner unendlich für $\lim x = +\infty$. Nach Satz 27 in Nr. 130 ist also

$$\lim_{x=+\infty} \frac{a^x}{x^n} = \lim_{x=+\infty} \frac{a^x \cdot \ln a}{n x^{n-1}}.$$

Auch in dem Bruche rechts werden Zähler und Nenner unendlich für $\lim x = +\infty$. Wendet man auf ihn wiederholt dieselbe Regel an, so erhält man, indem man bis zur n^{ten} Ableitung vorgeht:

$$\lim_{x=+\infty} \frac{a^x}{x^n} = \lim_{x=+\infty} \frac{a^x (\ln a)^n}{n!} = +\infty.$$

Man sagt deshalb: *Die Exponentialfunktion a^x wird für $a > 1$ und $\lim x = +\infty$ von höherer Ordnung unendlich als jede positive Potenz von x* (vgl. Nr. 127).

5. *Beispiel:* Ist $a > 1$ und n eine positive ganze Zahl, so werden Zähler und Nenner des Bruches

$$\frac{a^{-\frac{1}{x}}}{x^n}$$

gleich Null für $x = 0$, sobald sich x der Null *abnehmend* nähert. Setzen wir $x = 1 : z$, so kommt:

$$\lim_{x=0} \frac{a^{-\frac{1}{x}}}{x^n} = \lim_{z=\infty} \frac{z^n}{a^z}.$$

Da x abnehmend zu Null werden soll, also positive Werte hat, so ist hier $\lim z = +\infty$ zu nehmen. Nach dem vorigen Beispiele ergibt sich der Grenzwert Null. Wenn dagegen x *wachsend* zu Null wird, so hat der Bruch den Grenzwert $+\infty$, wenn n gerade, und $-\infty$, wenn n ungerade ist.

6. *Beispiel:* Ist α eine positive Zahl, so werden Zähler und Nenner des Bruches $\ln x : x^\alpha$ unendlich für $\lim x = +\infty$. Es kommt:

$$\lim_{x=+\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = \lim_{x=+\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\alpha x^{\alpha-1}} = \lim_{x=+\infty} \frac{1}{\alpha x^\alpha} = 0.$$

Man sagt deshalb: *Der Logarithmus von* x *wird für* $\lim x = +\infty$ *von niederer Ordnung unendlich als jede positive Potenz von* x.

Ebenso ist:

$$\lim_{x=0} \frac{\ln x}{x^{-\alpha}} = \lim_{x=0} \frac{\frac{1}{x}}{-\alpha x^{-\alpha-1}} = \lim_{x=0} \frac{-x^{\alpha}}{\alpha} = 0.$$

Man sagt daher: $\ln x$ *wird für* $x = 0$ *von niederer Ordnung unendlich als jede positive Potenz von* $1:x$. Natürlich muß hier angenommen werden, daß x *abnehmend* zu Null wird, da $\ln x$ nur für positives x definiert ist.

7. *Beispiel:* Eine bestimmte Ordnung des Unendlichwerdens der Funktion $x^n \ln x$ für $\lim x = +\infty$ existiert nicht, wenn n eine positive Zahl bedeutet, denn die Ordnung läßt sich durch keine Zahl ausdrücken und ist doch nicht gleich oder kleiner als n und nicht größer als irgend eine Zahl größer als n. In der Tat, dividiert man die Funktion durch x^r, so ist

$$\lim_{x=+\infty} \frac{x^n \ln x}{x^r}$$

gleich Null für $r > n$, dagegen unendlich, wenn r gleich oder kleiner als n ist.

8. *Beispiel:* Die Funktion $f(x) = e^{-\frac{1}{(x-x_0)^2}}$ verschwindet für $x = x_0$, denn der Exponent wächst absolut genommen über jeden Betrag. Man erhält für die Ableitung

$$f'(x) = \frac{2}{(x-x_0)^3} e^{-\frac{1}{(x-x_0)^2}},$$

und dieser Wert ist für $x = x_0$ nach dem 5. Beispiele gleich Null. Aus der Differentiation der Gleichung

$$f'(x)(x-x_0)^3 = 2e^{-\frac{1}{(x-x_0)^2}}$$

folgt weiter:

$$f''(x)(x-x_0)^3 + 3f'(x)(x-x_0)^2 = \frac{2 \cdot 2}{(x-x_0)^3} e^{-\frac{1}{(x-x_0)^2}}$$

und hieraus, daß auch $f''(x_0) = 0$ wird; ebenso erkennt man, daß alle höheren Ableitungen für $x = x_0$ verschwinden. Hiervon wurde schon gelegentlich in Nr. 115 Gebrauch gemacht.

132. Bestimmung des Grenzwertes eines Bruches durch Reihenentwicklung. Die Sätze in Nr. 129 und 130 führen die Untersuchung des Grenzwertes des Bruches $f(x):F(x)$ für den kritischen Wert $x = x_0$ auf die Bestimmung des Wertes zurück, den der Bruch $f'(x):F'(x)$ annimmt. Dabei kann es indessen eintreten, daß dieser zweite Bruch dieselben Schwierigkeiten wie der erste bietet. Man kann dann den Grenzwert finden, sobald die Funktionen $f(x_0+h)$ und $F(x_0+h)$ in Reihen entwickelbar sind, die nach *steigenden* positiven oder negativen, ganzen oder gebrochenen Potenzen von h geordnet sind. In diesem Falle genügt es nämlich, das erste Glied Ah^n der einen Reihe und ebenso das erste Glied Bh^m der anderen zu bestimmen, denn alsdann erhält man

$$f(x_0+h) = h^n(A+\varepsilon), \quad F(x_0+h) = h^m(B+\eta),$$

wobei ε und η mit h verschwinden, also:

$$\frac{f(x_0+h)}{F(x_0+h)} = h^{n-m}\frac{A+\varepsilon}{B+\eta}.$$

Ist $n = m$, so hat man

$$\lim_{x=x_0}\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{A}{B},$$

während der Grenzwert gleich Null oder Unendlich ist, je nachdem $n > m$ oder $n < m$ ist.

133. Beispiele.

1. Beispiel: In dem Bruche

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{\sqrt{x}-\sqrt{x_0}+\sqrt{x-x_0}}{\sqrt{x^2-x_0{}^2}}$$

werden Zähler und Nenner gleich Null, wenn x abnehmend zu x_0 wird und die Wurzeln mit dem Pluszeichen berechnet werden; man erkennt leicht, daß alle Ableitungen für $x = x_0$ unendlich werden. Setzt man $x = x_0 + h$, so wird $\sqrt{x-x_0}=\sqrt{h}$ mit h gleich Null in der Ordnung $\frac{1}{2}$, dagegen $\sqrt{x}-\sqrt{x_0} = \sqrt{x_0}\left(\sqrt{1+h:x_0}-1\right)$ mit h gleich Null in der ersten Ordnung, wie man durch Anwendung der binomischen Reihe in Nr. 125 erkennt. Also ist $f(x_0+h) = \sqrt{h}\,(1+\varepsilon)$, wo ε mit h gleich Null wird. Der Nenner $F(x)$ wird gleich $\sqrt{h}\sqrt{2x_0+h}$, so

daß er die Form $\sqrt{h}(\sqrt{2x_0}+\eta)$ hat, wo η mit h gleich Null wird. Folglich ist:

$$\frac{f(x_0+h)}{F(x_0+h)}=\frac{1+\varepsilon}{\sqrt{2x_0}+\eta},\quad \text{d. h.:}\quad \lim_{x=x_0}\frac{f(x)}{F(x)}=\frac{1}{\sqrt{2x_0}}.$$

2. *Beispiel:* Zähler und Nenner des Bruches

$$\frac{f(x)}{F(x)}=\frac{x-\frac{1}{3}\operatorname{tg}x-\frac{2}{3}\sin x}{x^5}$$

sind gleich Null für $x=0$. Multipliziert man Zähler und Nenner mit $3\cos x$, so folgt:

$$\frac{f(x)}{F(x)}=\frac{3x\cos x-\sin x-\sin 2x}{3x^5\cos x}.$$

Entwickelt man $\cos x$, $\sin x$ und $\sin 2x$ nach Nr. 119 in ihre Potenzreihen, so erhält man

$$f(x)=3x\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}\cdots\right)-\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}\cdots\right)-\left(2x-\frac{8x^3}{3!}+\frac{32x^5}{5!}\cdots\right),$$

$$F(x)=3x^5\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}\cdots\right)$$

oder, wenn ε und η Größen sind, die mit x zu Null werden:

$$f(x)=x^5\left(-\frac{3}{20}+\varepsilon\right),\quad F(x)=x^5(3+\eta).$$

Hieraus schließt man:

$$\lim_{x=0}\frac{f(x)}{F(x)}=-\frac{1}{20}.$$

134. Grenzwert eines Produktes an einer Stelle, wo der eine Faktor gleich Null, der andere unendlich wird. Unsere Untersuchung umfaßt auch den Fall einer Funktion, die ein Produkt aus zwei Funktionen $f(x)$ und $F(x)$ ist, von denen die eine für $x=x_0$ verschwindet, die andere unendlich wird. Denn setzt man

$$f(x)\cdot F(x)=\frac{f(x)}{[F(x)]^{-1}},\quad \text{oder}\quad f(x)\cdot F(x)=\frac{F(x)}{[f(x)]^{-1}},$$

so liegt ein Quotient vor, dessen Glieder für $x=x_0$ entweder verschwinden oder unendlich werden.

Auf diesen Fall kann man auch leicht die Untersuchung einer Funktion von der Form

$$y = u^v$$

zurückführen, wenn für $x = x_0$ entweder

$$u = 0 \quad \text{und} \quad v = 0$$

oder

$$u = \infty \quad \text{und} \quad v = 0$$

oder

$$u = 1 \quad \text{und} \quad v = \infty$$

wird. Denn wegen

$$\ln y = v \ln u$$

ist $\ln y$ ein Produkt von zwei Faktoren, von denen der eine für $x = x_0$ verschwindet, der andere unendlich wird.

135. Beispiel. Ist der Grenzwert von x^x für $x = 0$ zu bestimmen, so berechnet man

$$\ln x^x = \frac{\ln x}{x^{-1}}.$$

Mithin ist

$$\lim_{x=0} \ln x^x = \lim_{x=0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = -\lim_{x=0} x = 0.$$

Folglich hat die Funktion x^x für $x = 0$ den Grenzwert Eins.

136. Bestimmung von $\lim \left(1 + \frac{x}{m}\right)^m$. Ist x eine bestimmte Größe und m veränderlich, so kann man nach Nr. 134 den Grenzwert des Ausdruckes

$$\left(1 + \frac{x}{m}\right)^m$$

für $\lim m = \infty$ berechnen. Man erhält

$$\ln \left(1 + \frac{x}{m}\right)^m = m \ln \left(1 + \frac{x}{m}\right) = \frac{\ln \left(1 + \frac{x}{m}\right)}{\frac{1}{m}}.$$

Zähler und Nenner des letzten Bruches sind gleich Null für $\lim m = \infty$. Folglich kommt, indem nach m zu differenzieren ist:

$$\lim_{m=\infty} \ln\left(1+\frac{x}{m}\right)^m = \lim_{m=\infty} \frac{-\frac{x}{m^2}}{\left(1+\frac{x}{m}\right)\left(-\frac{1}{m^2}\right)} = \lim_{m=\infty} \frac{x}{1+\frac{x}{m}} = x,$$

also

$$\lim_{m=\infty} \left(1+\frac{x}{m}\right)^m = e^x.$$

Die transzendente Funktion e^x ist also die Grenze eines Ausdruckes, der eine algebraische, ja sogar eine ganze Funktion m^{ten} Grades ist, wenn man m unbegrenzt wachsen läßt. Man kann hiernach schreiben:

$$e^x = \left(1+\frac{x}{m}\right)^m + \varepsilon,$$

wobei ε eine Größe bezeichnet, die verschwindet, wenn m unendlich wird. Hieraus folgt:

$$x = m(\sqrt[m]{e^x - \varepsilon} - 1).$$

Es ist aber nach Nr. 125:

$$\sqrt[m]{e^x - \varepsilon} = \sqrt[m]{e^x}\left(1 - \frac{\varepsilon}{e^x}\right)^{\frac{1}{m}} = \sqrt[m]{e^x}\left(1 - \frac{\varepsilon}{m} e^{-x} + \cdots\right),$$

sobald $|m|$ hinreichend groß ist, also:

$$m\sqrt[m]{e^x - \varepsilon} = m\sqrt[m]{e^x} + \eta,$$

wobei η für $\lim m = \infty$ verschwindet; mithin kommt:

$$x = m(\sqrt[m]{e^x} - 1) + \eta.$$

Schreibt man x an Stelle von e^x und folglich $\ln x$ an Stelle von x, so kommt:

$$\ln x = m(\sqrt[m]{x} - 1) + \eta$$

oder:

$$\ln x = \lim_{m=\infty} m(\sqrt[m]{x} - 1).$$

Mithin ist auch die transzendente Funktion $\ln x$ die Grenze einer algebraischen Funktion von x.

136]

§ 6. Der Taylorsche Satz für Funktionen von mehreren Veränderlichen.

137. Der verallgemeinerte Taylorsche Satz. Ist $u = F(x, y, z, \ldots)$ eine Funktion von mehreren Veränderlichen, so entsteht die Aufgabe, die Funktion

$$u + \Delta u = F(x + h, y + k, z + l, \cdots)$$

in eine Reihe zu entwickeln, die nach ganzen positiven Potenzen der Größen $h, k, l, \ldots$ fortschreitet. Die Größe $u + \Delta u$ ist der Wert, den die *Funktion von t:*

$$U = F(x + ht, y + kt, z + lt, \cdots)$$

für $t = 1$ annimmt. Um die Aufgabe zu lösen, wird es also ausreichen, U nach der Maclaurinschen Formel in eine Reihe, geordnet nach Potenzen von t, zu entwickeln und schließlich $t = 1$ zu setzen. Substituiert man

$$x + ht = \xi, \quad y + kt = \eta, \quad z + lt = \zeta, \cdots,$$

so hat man:

$$U = F(\xi, \eta, \zeta, \ldots)$$

und nach Nr. 75:

$$dU = \frac{\partial U}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial U}{\partial \eta} d\eta + \frac{\partial U}{\partial \zeta} d\zeta + \cdots.$$

Da $\xi, \eta, \zeta, \ldots$ lineare Funktionen der unabhängigen Veränderlichen t sind, kann man das Differential n^{ter} Ordnung $d^n U$ nach Satz 13 in Nr. 76 aus der n^{ten} Potenz

$$\left(\frac{\partial U}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial U}{\partial \eta} d\eta + \frac{\partial U}{\partial \zeta} d\zeta + \cdots\right)^n$$

gewinnen. Dabei sei vorausgesetzt, daß alle partiellen Ableitungen von U, soweit sie gebraucht werden, stetige Funktionen von $\xi, \eta, \zeta, \ldots$ seien, so daß sie auch stetige Funktionen von t werden. Es sind nun $d\xi, d\eta, d\zeta, \ldots$ gleich $hdt, kdt, ldt, \ldots$. Außerdem ist

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial \xi}\frac{d\xi}{dx} = \frac{\partial U}{\partial \xi} \text{ usw.},$$

so daß $d^n U : dt^n$ aus der Potenz

$$(hU_x + kU_y + lU_z + \cdots)^n$$

gewonnen werden kann. Insbesondere für $t = 0$ wird $U = u$, so daß der Wert von $d^n U : dt^n$ für $t = 0$ aus der Potenz

$$(hu_x + ku_y + lu_z + \cdots)^n$$

gewonnen wird. Nach Satz 24 in Nr. 116 ergibt sich also:

$$U = u + (hu_x + ku_y + lu_z + \cdots)\frac{t}{1!} + \{hu_x + ku_y + lu_z + \cdots\}^2 \frac{t^2}{2!} +$$
$$\cdots + \{hu_x + ku_y + lu_z + \cdots\}^{n-1} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} + R_n,$$

wo wir durch geschweifte Klammern andeuten wollen, daß die Potenzen *symbolisch* aufzufassen sind, d. h. daß nach ihrer Ausrechnung jedes Produkt

$$u_x^\alpha u_y^\beta u_z^\gamma \cdots \quad \text{durch} \quad \frac{\partial^{\alpha+\beta+\gamma+\cdots} u}{\partial x^\alpha \partial y^\beta \partial z^\gamma \ldots}$$

ersetzt werden soll.

Der *Rest* R_n ist in der *Lagrange*schen Form gleich dem Produkte von $t^n : n!$ mit dem Werte, den $d^n U : dt^n$ annimmt, wenn darin t durch θt ersetzt wird, wo θ einen positiven echten Bruch bezeichnet. Also wird:

$$R_n = \frac{t^n}{n!}\{hu_x + ku_y + lu_z + \cdots\}^n_{x+h\theta t,\, y+k\theta t,\, z+l\theta t \cdots},$$

wo die Indizes $x + h\theta t$ usw. anzeigen, daß x durch $x + h\theta t$, y durch $y + k\theta t$ usw. ersetzt werden soll.

Schließlich ergibt sich für $t = 1$ als Verallgemeinerung des Satzes 19 in Nr. 112, wenn man bedenkt, welche Bedingungen für die Existenz der höheren Ableitungen nach Nr. 68 bestehen, der

Satz 28 (Verallgemeinerter Mittelwertsatz): Ist die Funktion u von $x, y, z, \ldots$ nebst allen ihren partiellen Ableitungen bis zu denen von der n^{ten} Ordnung für alle Werte der Veränderlichen in den Intervallen von x bis $x + h$, von y bis $y + k$, von z bis $z + l$ usw. stetig, so gibt es eine Entwicklung von der Form:

$$u(x + h, y + k, z + l, \cdots) = u(x, y, z, \cdots)$$
$$+ \frac{1}{1!}(hu_x + ku_y + lu_z + \cdots) + \frac{1}{2!}\{hu_x + ku_y + lu_z + \cdots\}^2 +$$
$$\cdots + \frac{1}{(n-1)!}\{hu_x + ku_y + lu_z + \cdots\}^{n-1} + R_n,$$

wobei der Rest R_n in der Form darstellbar ist:

$$R_n = \frac{1}{n!}\{hu_x + ku_y + lu_z + \cdots\}^n_{x+\theta h,\, y+\theta k,\, z+\theta l, \cdots}.$$

Dabei bedeuten die Indizes $x+\theta h$, $y+\theta k$, $z+\theta l, \ldots$, daß in der Restformel x, y, z usw. durch diese Werte ersetzt werden sollen. θ stellt einen gewissen positiven echten Bruch vor. Die Potenzen der geschweiften Klammern sind nur symbolisch zu verstehen, d. h. es soll allgemein

$$\{hu_x + ku_y + lu_z + \cdots\}^m$$

derjenige Ausdruck sein, der aus der ausgerechneten m^{ten} Potenz hervorgeht, wenn darin allgemein das Produkt

$$u^\alpha_x u^\beta_y u^\gamma_z \cdots \quad \text{durch} \quad u_{x^\alpha y^\beta z^\gamma} \cdots$$

ersetzt wird.

Man kann sofort hinzufügen:

Satz 29 (Verallgemeinerter Taylorscher Satz): Sind die Voraussetzungen des vorigen Satzes für alle Ableitungen von u überhaupt erfüllt und ist für alle positiven echten Brüche θ

$$\lim_{n=\infty} R_n = 0,$$

so ergibt sich für $u(x+h,\ y+k,\ z+l, \cdots)$ eine konvergente und nach ganzen positiven Potenzen von $h, k, l, \ldots$ fortschreitende unendliche Reihe

$$u(x+h, y+k, z+l, \cdots) = u(x, y, z, \cdots) + \frac{1}{1!}(hu_x + ku_y + lu_z + \cdots) + \\ + \frac{1}{2!}\{hu_x + ku_y + lu_z + \cdots\}^2 + \cdots.$$

Diese Formel läßt sich, da $\Delta u = u(x+h, y+k, z+l, \cdots) - u(x, y, z, \cdots)$ ist, auch so schreiben:

$$\Delta u = \frac{du}{1!} + \frac{d^2u}{2!} + \frac{d^3u}{3!} + \cdots,$$

denn die Potenzen in der Reihe sind die vollständigen Differentiale von u, sobald $h, k, l, \ldots$ die Differentiale von $x, y, z, \ldots$ bedeuten. Diese Formel ist eine Verallgemeinerung der Formel in Nr. 114.

Satz 28 gibt z. B. für eine Funktion $F(x, y)$ von *zwei* Veränderlichen die Entwicklung:

[137

$$F(x+h,\, y+k) = F(x,\, y) + \frac{1}{1!}\left(h\frac{\partial F}{\partial x} + k\frac{\partial F}{\partial y}\right)$$

$$+ \frac{1}{2!}\left(h^2\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + 2hk\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + k^2\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right) +$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+ \frac{1}{(n-1)!}\left(h^{n-1}\frac{\partial^{n-1} F}{\partial x^{n-1}} + \frac{n-1}{1}h^{n-2}k\frac{\partial^{n-1} F}{\partial x^{n-2}\partial y} + \cdots + k^{n-1}\frac{\partial^{n-1} F}{\partial y^{n-1}}\right) + R_n,$$

wo R_n der Wert ist, der aus

$$\frac{1}{n!}\left(h^n\frac{\partial^n F}{\partial x^n} + \frac{n}{1}h^{n-1}k\frac{\partial^n F}{\partial x^{n-1}\partial y} + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}h^{n-2}k^2\frac{\partial^n F}{\partial x^{n-2}\partial y^2} + \cdots + k^n\frac{\partial^n F}{\partial y^n}\right)$$

hervorgeht, wenn x bzw. y durch $x+\theta h$ bzw. $y+\theta k$ ersetzt wird.

138. Der verallgemeinerte Maclaurinsche Satz. Um die *Maclaurin*sche Formel für eine Funktion von mehreren Veränderlichen zu bilden, setzen wir in den Gleichungen der Sätze 28 und 29 für $x, y, z, \ldots$ den Wert Null und schreiben an Stelle von $h, k, l, \ldots$ die Größen $x, y, z, \ldots$. Drücken wir dann durch den Index 0 aus, daß die Größen $x, y, z, \ldots$, soweit sie in den Ableitungen von u auftreten, den Wert Null erhalten sollen, und durch die Indizes $\theta x, \theta y, \theta z, \ldots$, daß sie *diese* Werte annehmen sollen, so erhalten wir *symbolisch:*

$$u = u_0 + \frac{1}{1!}\left[x\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_0 + y\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_0 + z\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_0 + \cdots\right]$$

$$+ \frac{1}{2!}\left\{x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + z\frac{\partial u}{\partial z} + \cdots\right\}_0^2 +$$

$$\cdots + \frac{1}{(n-1)!}\left\{x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + z\frac{\partial u}{\partial z} + \cdots\right\}_0^{n-1} + R_n$$

und

$$R_n = \frac{1}{n!}\left\{x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + z\frac{\partial u}{\partial z} + \cdots\right\}_{\theta x,\, \theta y,\, \theta z,\, \cdots}^n.$$

Es erübrigt wohl, den verallgemeinerten Maclaurinschen Satz besonders zu formulieren.

139. Der Eulersche Satz über homogene Funktionen. Dieser Satz wurde schon in Nr. 91 bewiesen; da er von großer Bedeutung ist, wird es nicht überflüssig sein, hier noch einen anderen Beweis zu geben.

Es sei f eine homogene Funktion m^{ten} Grades von den n Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots x_n$. Multipliziert man alle Veränder-

lichen mit dem Faktor $1 + \alpha$, so erhält dadurch die Funktion den Faktor $(1 + \alpha)^m$; man hat also:

$$f(x_1 + \alpha x_1, x_2 + \alpha x_2, \cdots x_n + \alpha x_n) = (1 + \alpha)^m f(x_1, x_2, \cdots x_n).$$

Entwickelt man beide Seiten dieser Gleichung in eine nach Potenzen von α geordnete Reihe, so ergibt die linke Seite:

$$f(x_1, x_2, \cdots x_n) + \alpha \left(x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \cdots + x_n \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$$
$$+ \frac{\alpha^2}{2!}\left(x_1^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \cdots + x_n^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} + 2 x_1 x_2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} + \cdots\right) + \cdots$$

und die rechte Seite nach Nr. 125:

$$f(x_1, x_2, \cdots x_n)\left(1 + m\alpha + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2}\alpha^2 + \cdots\right).$$

Diese Reihe, die unendlich viele Glieder hat, wenn m keine ganze positive Zahl bedeutet, konvergiert nach Nr. 125, wenn $|\alpha| < 1$ ist. Die beiden nach Potenzen von α fortschreitenden Reihen müssen identisch sein; vergleicht man also die Koeffizienten gleich hoher Potenzen von α, so kommt:

$$x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \cdots + x_n \frac{\partial f}{\partial x_n} = m f(x_1, x_2, \cdots x_n),$$

$$x_1^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \cdots + x_n^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} + 2 x_1 x_2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} + \cdots = m(m-1) f(x_1, x_2, \cdots x_n),$$

. . . .

Die erste dieser Gleichungen drückt die wesentliche Eigenschaft homogener Funktionen aus, die wir von neuem ableiten wollten. Sie umfaßt alle folgenden Gleichungen, denn die linke Seite der ersten Gleichung ist, wie diese Gleichung selbst besagt, homogen von m^{ter} Ordnung. Daher geht aus dieser Gleichung eine richtige neue Gleichung hervor, wenn in ihr f durch

$$x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \cdots + x_n \frac{\partial f}{\partial x_n}$$

ersetzt wird. So ergibt sich die zweite Gleichung, aus ihr durch dasselbe Verfahren die dritte usw. Allgemein hat man *symbolisch:*

$$\{x_1 f_{x_1} + x_2 f_{x_2} + \cdots + x_n f_{x_n}\}^k = m(m-1)\cdots(m-k+1) f$$

und, wenn m eine ganze positive Zahl und $k > m$ ist, insbesondere:

$$\{x_1 f_{x_1} + x_2 f_{x_2} + \cdots + x_n f_{x_n}\}^k = 0.$$

Die Potenzen sollen hierbei so verstanden werden, daß nach der vollzogenen Ausrechnung jedes Produkt

$$f_{x_1}^{\alpha} f_{x_2}^{\beta} \cdots \quad \text{durch} \quad \frac{\partial^{\alpha+\beta+\cdots} f}{\partial x_1{}^{\alpha} \partial x_2{}^{\beta} \cdots}$$

zu ersetzen ist.

Sechstes Kapitel.

Theorie der Maxima und Minima.

§ 1. Funktionen von einer Veränderlichen.

140. Definition der Extremwerte. An die Spitze stellen wir die

Definition: Die Funktion $f(x)$ hat für $x = x_0$ ein Maximum, wenn es eine positive Zahl σ derart gibt, daß die Funktion überall in dem Intervalle von $x_0 - \sigma$ bis $x_0 + \sigma$ definiert ist und überdies für jeden von Null verschiedenen Wert von h zwischen $-\sigma$ und $+\sigma$

$$f(x_0 + h) < f(x_0)$$

wird. Wenn dagegen unter denselben Voraussetzungen für jedes von Null verschiedene h zwischen $-\sigma$ und $+\sigma$

$$f(x_0 + h) > f(x_0)$$

wird, so hat $f(x)$ für $x = x_0$ ein Minimum. Alsdann heißt der Wert $f(x_0)$ ein Maximal- bzw. Minimalwert der Funktion.

Da wir bisher, wenn eine Funktion mit wachsendem x zu- oder abnimmt, unterschiedslos gesagt haben, daß sie *wächst* — nämlich im Falle des Abnehmens um negative Beträge —, so wollen wir ausdrücklich bemerken, daß wir im folgenden nur dann von einem Wachsen der Funktion sprechen wollen, wenn sie wirklich *größere* Werte annimmt. Die unabhängige Veränderliche denken wir uns immer *wachsend*, d. h. sich in der Richtung von $-\infty$ nach $+\infty$ ändernd.

Setzen wir insbesondere voraus, daß $f(x)$ in dem Intervalle von $x_0 - \sigma$ bis $x_0 + \sigma$ überall eine stetige Ableitung $f'(x)$ habe, so folgt aus dem Mittelwertsatze 3 von Nr. 28, nach dem

$$f(x_0+h)-f(x_0)=hf'(x_0+\theta h)$$

ist, wobei θ einen positiven echten Bruch bedeutet: Im Falle des Maximums muß $hf'(x_0+\theta h)$ überall im Intervalle für positives und negatives h negativ sein, d. h. für jeden *positiven* Wert von h, der kleiner als σ ist, muß

$$f'(x_0-\theta h)>0, \quad f'(x_0+\theta h)<0$$

sein. Im Falle des Minimums ergibt sich dagegen umgekehrt:

$$f'(x_0-\theta h)<0, \quad f'(x_0+\theta h)>0.$$

Da diese Ungleichungen gelten, wie klein auch die positive Zahl h gewählt sein mag, und da die Ableitung stetig sein soll, so folgt für $\lim h=0$ in beiden Fällen:

$$f'(x_0)=0.$$

Dies also ist eine *notwendige* Bedingung des Maximums oder Minimums, falls die Ableitung stetig ist. Sie reicht jedoch nicht hin, wie das zweite der folgenden Beispiele zeigt.

Die Maxima und Minima einer Funktion heißen zusammen die *Extremwerte* der Funktion.

141. Beispiele.

1. Beispiel: Die Funktion $f(x)=x(a-x)$ hat eine überall stetige Ableitung $f'(x)=a-2x$, die gleich Null ist für $x=\frac{1}{2}a$. Vorher ist $f'(x)$ positiv, nachher negativ, d. h. nach Satz 9, Nr. 30, wächst $f(x)$, wenn x bis $\frac{1}{2}a$ zunimmt, und nimmt ab, wenn x weiter über $\frac{1}{2}a$ hinaus wächst. Demnach hat $f(x)$ für $x=\frac{1}{2}a$ ein Maximum, aber auch nur für $x=\frac{1}{2}a$. Der Maximalwert ist $\frac{1}{4}a^2$.

2. Beispiel: Auch bei der Funktion $f(x)=(a-x)^3$ ist die Ableitung $f'(x)=-3(a-x)^2$ überall stetig und insbesondere gleich Null für $x=a$. Vorher ist $f'(x)$ negativ und auch nachher, d. h. $f(x)$ nimmt ab, wenn x bis a wächst, und nimmt immer weiter ab, wenn x über a hinaus wächst. Die Funktion hat also weder ein Maximum noch ein Minimum (für *endliche* Werte von x).

3. Beispiel: Die Funktion $f(x)=\sqrt[3]{(x-a)^2}$ hat die Ableitung $f'(x)=2:3\sqrt[3]{x-a}$, die für $x<a$ stetig und negativ, für $x>a$ stetig und positiv ist, so daß $f(x)$ bis $x=a$ abnimmt und von da an wächst, also für $x=a$ ein Minimum,

nämlich Null, hat. An dieser Stelle $x = a$ wird aber $f'(x)$ nicht gleich Null; der Zeichenwechsel von $f'(x)$ kommt vielmehr dadurch zustande, daß $f'(x)$ für $x = a$ unstetig ist und zwar für bis a zunehmendes x den Grenzwert $-\infty$, dagegen für bis a abnehmendes x den Grenzwert $+\infty$ hat.

142. Notwendige und hinreichende Bedingungen für Extremwerte. Für den Fall, daß eine Funktion $f(x)$ in der Umgebung einer Stelle x_0 stetig ist und bestimmte endliche Ableitungen bis zu derjenigen Ordnung hat, die im folgenden noch gebraucht wird, können wir zu der in Nr. 140 gewonnenen *notwendigen* Bedingung des Maximums oder Minimums an der Stelle x_0, nämlich zu der Bedingung $f'(x_0) = 0$, leicht *hinreichende* Bedingungen hinzufügen.

Um sofort den allgemeinsten Fall ins Auge zu fassen, wollen wir annehmen, es sei x_0 ein solcher Wert, für den nicht nur $f'(x_0) = 0$ ist, sondern überdies die zweite, dritte usw. Ableitung von $f(x)$ gleich Null wird bis zu einschließlich der $(n-1)^{\text{ten}}$, dagegen sei $f^{(n)}(x_0) \neq 0$. Übrigens stellt $n = 2$ diejenige Annahme vor, die zumeist eintreten wird, weil ja im allgemeinen, wenn $f'(x)$ für $x = x_0$ verschwindet, nicht auch $f''(x)$ für $x = x_0$ zu verschwinden braucht.

Bei unseren Voraussetzungen gilt nun nach Satz 19 in Nr. 112 in der Umgebung der Stelle x_0 von $x_0 - \sigma$ bis $x_0 + \sigma$ für jeden Wert von h zwischen $-\sigma$ und $+\sigma$ eine Formel:

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f^{(n)}(x_0) \cdot \frac{h^n}{n!} + R_{n+1},$$

worin der Rest R_{n+1} nach Satz 22 in Nr. 115 dadurch, daß man σ genügend klein wählt, absolut genommen kleiner als das vorhergehende Glied gemacht werden kann. Dies bedeutet, daß die Differenz:

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = f^{(n)}(x_0) \cdot \frac{h^n}{n!} + R_{n+1},$$

wenn das Intervall von $x_0 - \sigma$ bis $x_0 + \sigma$ genügend eng gewählt wird, dasselbe Vorzeichen wie das erste Glied rechts für jedes h zwischen $-\sigma$ und $+\sigma$ hat.

Ist nun der Index n *gerade*, so wird h^n für negatives und positives h stets positiv, d. h. dann hat $f(x_0 + h) - f(x_0)$

dasselbe Vorzeichen wie $f^{(n)}(x_0)$. Ist $f^{(n)}(x_0)$ insbesondere negativ, so wird also überall im Intervalle $f(x_0+h) < f(x_0)$, so daß für $x = x_0$ ein Maximum eintritt. Ist dagegen $f^{(n)}(x_0)$ positiv, so wird überall im Intervalle $f(x_0+h) > f(x_0)$, so daß für $x = x_0$ ein Minimum eintritt.

Wenn jedoch der Index n *ungerade* ist, so wird h^n in der ersten Hälfte des Intervalles negativ und in der zweiten positiv, d. h. dann wechselt $f(x_0+h) - f(x_0)$ das Zeichen, wenn h den Wert Null passiert, so daß weder ein Maximum noch ein Minimum für $x = x_0$ eintritt. Folglich:

Satz 1: Die Funktion $f(x)$ kann für $x = x_0$ nur dann einen Extremwert haben, wenn $f'(x)$ für $x = x_0$ gleich Null und außerdem diejenige erste unter den Ableitungen $f''(x)$, $f'''(x)$, ..., die für $x = x_0$ nicht verschwindet, von gerader Ordnung ist. Wenn es die n^{te} Ableitung ist, so tritt ein Maximum oder Minimum ein, je nachdem $f^{(n)}(x_0)$ negativ bzw. positiv wird. Hierbei ist vorausgesetzt, daß die Funktion nebst ihren Ableitungen bis zur $(n+1)^{ten}$ Ordnung bestimmte endliche Werte in der Umgebung von x_0 habe.

§ 2. Anwendungen.

143. Beispiele. Der aufgestellte Satz gestattet, in vielen Fällen die Extremwerte einer Funktion rein rechnerisch ohne weiteres zu bestimmen. Hierzu einige Beispiele:

1. Beispiel: Die Funktion $f(x) = x(a-x)$ hat die Ableitungen $f'(x) = a - 2x$ und $f''(x) = -2$, so daß der Satz 1 in Nr. 142 zeigt, daß sie für $x = \frac{1}{2}a$ ein Maximum hat. Vgl. das 1. Beispiel in Nr. 141.

2. Beispiel: Bei der Funktion $f(x) = (a-x)^3$ ist $f'(x) = -3(a-x)^2$, $f''(x) = 6(a-x)$, $f'''(x) = -6$. Da $f'(x) = 0$ für $x = a$ ist und dort auch $f''(x) = 0$, aber $f'''(x) \neq 0$ ist, so hat diese Funktion kein Maximum oder Minimum. Vgl. das 2. Beispiel in Nr. 141.

3. Beispiel: Die Funktion $y = x^x$ ist nach Nr. 5 nur für positive Werte von x definiert und positiv. Hier haben wir:

$$y' = (\ln x + 1)\cdot x^x, \quad y'' = \left[\frac{1}{x} + (\ln x + 1)^2\right]\cdot x^x.$$

Es ist $y' = 0$ für $x = 1 : e$. Hier wird $y'' > 0$, so daß ein Minimum eintritt.

144. Ein andersartiges Beispiel. Es gibt Funktionen, bei denen die Anwendung des Satzes 1 in Nr. 142 unbequem ist, weil die höheren Ableitungen umständlich werden. In solchen Fällen ist es oft bequemer, direkt zu untersuchen, ob die Ableitung beim Durchgange des x durch einen Wert x_0, für den sie gleich Null ist, das Zeichen wechselt.

Liegt z. B. die Funktion $y = x^m (a - x)^n$ vor, wo a, m, n positive Konstanten seien und insbesondere m und n ganze Zahlen größer als Eins bedeuten mögen, so ist

$$y' = x^{m-1}(a - x)^{n-1}[ma - (m + n)x],$$

während y'' recht umständlich wird. Wir schließen daher so: Es sind y und y' für jedes x stetig. Insbesondere wird $y' = 0$ für $x = 0$, für $x = a$ und für $x = ma : (m + n)$, das kleiner als a, aber positiv ist. Passiert x wachsend den Wert Null, so wechselt y' nur dann das Zeichen, und zwar — in +, wenn m gerade ist, so daß y nach Satz 9 in Nr. 30 vorher abnimmt und nachher wächst, also für $x = 0$ ein Minimum eintritt. Passiert x wachsend den Wert a, so gilt dasselbe, wenn n gerade ist. Passiert x wachsend den Wert $ma : (m + n)$, so hat y' kurz vorher positive und kurz nachher negative Werte, so daß y vorher wächst und nachher abnimmt, also ein Maximum für $x = ma : (m + n)$ eintritt.

145. Das Fermatsche Problem. Zwei Räume seien wie in Fig. 23 durch eine Ebene E getrennt. Ein Punkt lege in der Zeiteinheit im ersten Raume α und im zweiten Raume β Längeneinheiten zurück, wobei α und β Konstanten seien, so daß in jedem Raume die von dem Punkte zurückgelegten Wege der dazu gebrauchten Zeit proportional sind. Das Fermatsche Problem besteht nun darin, daß der Weg bestimmt werden soll, auf dem der Punkt in kürzester Zeit von einer ge-

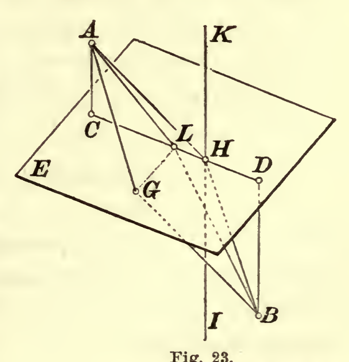


Fig. 23.

gebenen Stelle A des ersten Raumes nach einer gegebenen Stelle B des zweiten Raumes gelangt. Die Wege sind in jedem der beiden Räume augenscheinlich geradlinig. Daher wird ein Punkt G auf der Ebene E so gesucht, daß die Strecke AG, dividiert durch α, und die Strecke GB, dividiert durch β, die kleinste Summe geben. Legen wir durch A und B die Ebene senkrecht zu E, so wird sie E in einer Geraden CD schneiden. Bedeutet L den Fußpunkt des Lotes von G auf CD, so ist die Hypotenuse AG des rechtwinkligen Dreiecks ALG länger als die Kathete AL und die Hypotenuse GB des rechtwinkligen Dreiecks GLB länger als die Kathete LB. Daher muß der gesuchte Weg notwendig in jener Vertikalebene $ACDB$ liegen.

Es handelt sich mithin darum, einen Punkt H auf CD so zu finden, daß $AH:\alpha + HB:\beta$ ein Minimum wird. Es sei $AC = a$, $DB = b$, $CD = c$. Ferner sei H zunächst beliebig auf CD gewählt, so daß $CH = x$ zu setzen ist, positiv genommen etwa im Sinne von C nach D, während a, b, c absolut genommen seien. Alsdann ist $AH = \sqrt{x^2 + a^2}$ und $HB = \sqrt{(c-x)^2 + b^2}$, so daß also das Minimum der Funktion

$$y = \frac{1}{\alpha}\sqrt{x^2 + a^2} + \frac{1}{\beta}\sqrt{(c-x)^2 + b^2}$$

gesucht wird. Dabei sind die Wurzeln ebenso wie α und β positiv. Diese Funktion y von x ist überall stetig. Es kommt ferner:

$$(1) \qquad y' = \frac{x}{\alpha\sqrt{x^2 + a^2}} - \frac{c - x}{\beta\sqrt{(c-x)^2 + b^2}},$$

so daß auch y' überall stetig ist. Nach Satz 1 in Nr. 142 muß x so gewählt werden, daß $y' = 0$ wird. Wenn wir die Wurzeln durch Quadrieren entfernen, ergibt sich demnach für das gesuchte x die Gleichung vierten Grades:

$$\beta^2 x^2 (c-x)^2 + \beta^2 b^2 x^2 - \alpha^2 x^2 (c-x)^2 - \alpha^2 a^2 (c-x)^2 = 0.$$

Da sie durch Beseitigung der Wurzelzeichen hervorgegangen ist, gehören jedoch zu ihren Lösungen x auch diejenigen Werte, für die der Ausdruck (1) gleich Null ist, sobald die darin auftretenden Wurzeln irgendwelche Vorzeichen haben. Demnach sind nicht alle Lösungen der Gleichung vierten Grades brauchbar.

Wir können auf geometrischem Wege sehen, daß eine und nur eine Lösung dieser Gleichung in Betracht kommt, und finden dabei zugleich eine charakteristische Eigenschaft des gesuchten Punktes H. Es sei nämlich KI das Lot zur Ebene E in H, wobei HK im ersten und HI im zweiten Raume liege. Dann ist $\sin KHA = \sin CAH$ und $\sin IHB = \sin DBH$, also:

$$\frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \sin KHA, \quad \frac{c - x}{\sqrt{(c - x)^2 + b^2}} = \sin IHB.$$

Dabei ist $\sphericalangle KHA$ positiv für positives x, wenn also H auf derselben Seite von C liegt wie D, und $\sphericalangle IHB$ ist positiv für $x < c$, wenn also H auf derselben Seite von D liegt wie C. Die Forderung $y' = 0$ lautet nun nach (1):

$$(2) \qquad \frac{\sin KHA}{\sin IHB} = \frac{\alpha}{\beta}.$$

Nennen wir $\sphericalangle KHA$ den Einfallswinkel und $\sphericalangle IHB$ den Brechungswinkel, so folgt, daß *das Verhältnis der Sinus des Einfalls- und des Brechungswinkels gleich dem Verhältnisse* $\alpha : \beta$ *der Geschwindigkeiten sein muß, mit denen sich der Punkt im ersten bzw. zweiten Raume bewegt.* Da α und β positiv sind, muß H zwischen C und D liegen. Wenn x von 0 bis c wächst, d. h. wenn H von C nach D geht, so nimmt $\sin KHA$ von Null bis zu einem gewissen Werte < 1 zu, während $\sin IHB$ von einem gewissen positiven Werte < 1 bis Null abnimmt. Das Verhältnis der beiden Sinus wächst dabei folglich von Null bis $+\infty$, so daß es einen und nur einen Punkt H gibt, für den die Bedingung (2) erfüllt ist, und zwar liegt er zwischen C und D. Wird statt dieses Punktes H ein Punkt näher bei C gewählt, so wird der Minuend in (1) kleiner und der Subtrahend größer; wird dagegen ein Punkt näher bei D gewählt, so ist es umgekehrt. Daher hat y' vor dem Passieren jenes Punktes H negative, nachher positive Werte, so daß y vorher ab- und nachher zunimmt, also für H wirklich das Minimum eintritt.

146. Größte und kleinste Entfernungen eines Punktes von den Punkten einer Kurve in der Ebene. Gegeben sei in der Ebene eine Kurve und ein Punkt P. Gesucht werden die größten und kleinsten Entfernungen des

Punktes P von den Punkten M der Kurve. — Es mögen a und b die Koordinaten von P sein, während der laufende Punkt M der Kurve die Koordinaten x und y habe. Dabei bedeutet also y eine gegebene Funktion von x, da die Kurve gegeben ist. Alsdann wird gefragt, wann die Größe PM^2, nämlich

$$v = (x-a)^2 + (y-b)^2, \tag{1}$$

ein Maximum oder Minimum hat. Dabei muß beachtet werden, daß v eine zusammengesetzte Funktion von x allein ist, da y eine gegebene Funktion von x bedeutet. Deshalb ergeben sich die Differentialquotienten:

$$\frac{dv}{dx} = 2\left[(x-a) + (y-b)y'\right],$$

$$\frac{d^2v}{dx^2} = 2\left[1 + y'^2 + (y-b)y''\right]. \tag{2}$$

Wir fordern also zunächst nach Satz 1 in Nr. 142:

$$x - a + (y-b)y' = 0.$$

Da $(y-b):(x-a)$ der Tangens des Winkels ist, den die Gerade PM mit der x-Achse bildet, und y' der Tangens des Winkels, den die Tangente des Kurvenpunktes M mit der x-Achse bildet, so besagt die Forderung: *Der gesuchte Kurvenpunkt M muß so liegen, daß PM die Normale des Punktes M ist.* Wird nun M so gewählt, daß PM die Normale von M ist, so fragt es sich aber noch, ob wirklich ein Maximum oder Minimum des Abstandes vorliegt.

Ist zunächst an dieser Stelle M der Kurve $y'' = 0$, so wird $d^2v:dx^2$ nach (2) positiv, so daß PM ein Minimum des Abstandes des Punktes P von den Punkten der Kurve ist. Ist jedoch $y'' \neq 0$, so können wir immer eine Größe $\mathfrak{y}$ so bestimmen, daß

$$1 + y'^2 + (y-\mathfrak{y})y'' = 0 \tag{3}$$

ist. Zu diesem Werte $\mathfrak{y}$, aufgefaßt als eine Ordinate, gehört ein gewisser Punkt K oder $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$ der Normale PM. Wenn nun $y'' = -(1+y'^2):(y-\mathfrak{y})$ in (2) eingesetzt wird, so kommt:

$$\frac{d^2v}{dx^2} = 2(1+y'^2)\frac{b-\mathfrak{y}}{y-\mathfrak{y}}.$$

Dieser Wert ist positiv oder negativ, je nachdem $b - \mathfrak{y}$ und $y - \mathfrak{y}$ dasselbe oder verschiedene Vorzeichen haben, d. h. PM ist ein Maximum des Abstandes, wenn K zwischen M und P liegt, ein Minimum dagegen, wenn K nicht zwischen M und P liegt.

Liegt P in K selbst, so zeigen (3) und (2), daß $d^2v : dx^2$ verschwindet. Aus (2) berechnen wir dann:

$$\frac{d^3v}{dx^3} = 2[3y'y'' + (y-b)y'''].\tag{4}$$

Sobald also

$$x - a + (y-b)y' = 0, \quad 1 + y'^2 + (y-b)y'' = 0\tag{5}$$

ist, tritt weder ein Maximum noch ein Minimum ein, wenn nicht auch der Wert (4) gleich Null ist. Ist jedoch außerdem

$$3y'y'' + (y-b)y''' = 0,\tag{6}$$

so hängt die Entscheidung davon ab, welches Vorzeichen $d^4v : dx^4$ hat, worauf wir nicht näher eingehen.[1])

Beispielsweise werde angenommen, die gegebene Kurve sei der Kreis um den Anfangspunkt O:

$$x^2 + y^2 = R^2;$$

dann muß M so auf dem Kreise gewählt werden, daß PM Normale wird, d. h. als einer der beiden Schnittpunkte M_1 und M_2 der Geraden OP mit dem Kreise. Da jetzt kommt:

$$x + yy' = 0, \quad 1 + y'^2 + yy'' = 0,$$

so lehrt (3), daß $\mathfrak{y} = 0$, d. h. daß der Punkt K der Punkt O auf der Geraden PM ist. Nach dem Vorhergehenden ist PM_1 das Minimum und PM_2 das Maximum des Abstandes des Punktes P von den Punkten des Kreises, sobald M_1 auf derselben Seite von O wie P liegt. Dies ist ja auch elementar einzusehen. Liegt dagegen P in O, dem Kreismittelpunkte, so sind alle Abstände gleich groß.

---

1) Es wird sich später zeigen, daß K der zu dem Kurvenpunkte M gehörige sogenannte *Krümmungsmittelpunkt* ist (in Nr. 198) und daß die drei Bedingungen (5) und (6) erfüllt sind, wenn der Kurvenpunkt M ein *Scheitel* der Kurve ist und P in der zugehörigen Spitze der *Evolute* der Kurve liegt, vgl. Nr. 218.

147. Größte und kleinste Entfernungen eines Punktes von den Punkten einer Raumkurve. Ist die gegebene Kurve nicht eben oder liegt der gegebene Punkt P nicht in ihrer Ebene, so müssen wir zur Lösung des Problems ein Koordinatensystem im Raume benutzen. Der gegebene Punkt P habe die Koordinaten a, b, c, und es sei M ein laufender Punkt der gegebenen Kurve mit den Koordinaten x, y, z, so daß also y und z als gegebene Funktionen vou x aufzufassen sind.[1]) Es handelt sich dann um die Maxima und Minima der Größe:

$$v = (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2, \tag{1}$$

die, weil y und z gegebene Funktionen von x bedeuten, eine zusammengesetzte Funktion von x ist, für die

$$\frac{dv}{dx} = 2\left[(x-a) + (y-b)y' + (z-c)z'\right],$$

$$\frac{d^2v}{dx^2} = 2\left[1 + y'^2 + z'^2 + (y-b)y'' + (z-c)z''\right] \tag{2}$$

wird. Nach Satz 1 in Nr. 142 muß zunächst für den gesuchten Punkt M der Kurve $dv : dx = 0$ sein, also:

$$(x-a) + (y-b)y' + (z-c)z' = 0. \tag{3}$$

Hiermit liegt, da y und z gegebene Funktionen von x sind, eine Gleichung zur Bestimmung der *Unbekannten* x vor.[2]) Wir denken uns x aus ihr berechnet und haben dann die x-Koordinate eines gewissen Kurvenpunktes M gefunden. Es fragt sich, ob nun PM wirklich ein Maximum oder Minimum der Entfernungen des Punktes P von den Punkten der Kurve ist.

Wenn zunächst für den berechneten Wert x auch der Ausdruck $(y-b)y'' + (z-c)z''$ verschwindet[3]), so lehrt (2), daß dann $d^2v : dx^2$ positiv ist, also nach Satz 1 in Nr. 142 ein Minimum vorliegt. Verschwindet dagegen dieser Ausdruck

---

1) Wir sprechen im 9. Kapitel ausführlich von Raumkurven.

2) Wir werden in Nr. 252 sehen: die Bedingung (3) besagt, daß P in der sogenannten *Normalebene* des Kurvenpunktes M liegen muß.

3) Wir werden später sehen, daß dieser Ausdruck nur dann gleich Null ist und zugleich (3) besteht, wenn der Punkt P auf der sogenannten *Binormale* (vgl. Nr. 264) des Kurvenpunktes M liegt.

nicht, so lassen sich drei Größen $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ bestimmen, die den Bedingungen genügen:

$$(4) \quad \begin{cases} 1 + y'^2 + z'^2 + (y - \mathfrak{y})y'' + (z - \mathfrak{z})z'' = 0, \\ \dfrac{x - \mathfrak{x}}{x - a} = \dfrac{y - \mathfrak{y}}{y - b} = \dfrac{z - \mathfrak{z}}{z - c}. \end{cases}$$

Nach der letzten Proportion liegt derjenige Punkt K, dessen Koordinaten $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ sind, auf der Geraden durch die beiden Punkte (a, b, c) und (x, y, z), d. h. auf der Geraden PM. Außerdem ist hiernach

$$(y - b)y'' + (z - c)z'' = [(y - \mathfrak{y})y'' + (z - \mathfrak{z})z''] \frac{x - a}{x - \mathfrak{x}},$$

so daß nach der ersten Gleichung (4):

$$(y - b)y'' + (z - c)z'' = -(1 + y'^2 + z'^2) \frac{x - a}{x - \mathfrak{x}}$$

ist und $d^2v : dx^2$ nach (2) die Form bekommt:

$$\frac{d^2v}{dx^2} = 2(1 + y'^2 + z'^2) \frac{a - \mathfrak{x}}{x - \mathfrak{x}}.$$

Also wird $d^2v : dx^2$ positiv oder negativ, je nachdem $a - \mathfrak{x}$ und $x - \mathfrak{x}$ dasselbe oder verschiedenes Vorzeichen haben, was eintritt, je nachdem die Punkte P und M auf derselben oder auf verschiedenen Seiten des Punktes K liegen. Im einen Falle ist PM ein Minimum, im anderen ein Maximum.

Liegt dagegen P in K selbst, so wird $d^2v : dx^2 = 0$, so daß alsdann die dritte Ableitung von v berechnet werden muß. Sie ist nach (2):

$$(5) \quad \frac{d^3v}{dx^3} = 2[3y'y'' + 3z'z'' + (y - b)y''' + (z - c)z'''].$$

Wenn nun zwar P in K liegt, d. h. wenn zwar

$$(6) \quad \begin{cases} (x - a) + (y - b)y' + (z - c)z' = 0, \\ 1 + y'^2 + z'^2 + (y - b)y'' + (z - c)z'' = 0 \end{cases}$$

ist[1]), aber der Wert (5) nicht verschwindet, so tritt weder

1) Die beiden Gleichungen (6) sind, wie wir in Nr. 263 sehen werden, die Gleichungen der *Krümmungsachse* des Kurvenpunktes (x, y, z), geschrieben in den laufenden Koordinaten a, b, c, so daß also jetzt P der Schnittpunkt einer Normale von M mit der Krümmungsachse ist.

ein Maximum noch ein Minimum ein. Ist aber außer den beiden Bedingungen (6) noch die Bedingung

$$(7) \qquad 3y'y'' + 3z'z'' + (y-b)y''' + (z-c)z''' = 0$$

erfüllt[1]), so hängt die Entscheidung vom Vorzeichen von $d^4v : dx^4$ ab, worauf wir nicht näher eingehen wollen.

148. Nebenbedingungen in Gestalt von Ungleichungen. Bisweilen handelt es sich um die Bestimmung der Maxima und Minima, die eine Funktion $f(x)$ der Veränderlichen x hat, wenn x nur auf ein Intervall $a \leqq x \leqq b$ beschränkt ist. Alsdann hat man für Stellen x im *Innern* des Intervalles dieselbe Methode wie bisher anzuwenden. Jedoch können dann an den Grenzen des Intervalles sogenannte *Grenzmaxima* oder *Grenzminima* auftreten. Denn die Umgebung der Stelle $x = a$ umfaßt jetzt, da $x \geqq a$ sein soll, nur Werte, die größer als a sind, so daß wir die Definition in Nr. 140 anders fassen müssen:

Wir sagen, *daß die Funktion $f(x)$ an der unteren Grenze $x = a$ des Intervalles $a \leqq x \leqq b$ ein Grenzmaximum oder Grenzminimum hat, wenn es eine positive Zahl σ derart gibt, daß für jeden Wert von h zwischen* 0 *und σ der Wert von $f(a+h)$ kleiner bzw. größer als $f(a)$ ist.* Ferner sagen wir, *daß $f(x)$ an der oberen Grenze $x = b$ des Intervalles ein Grenzmaximum oder Grenzminimum hat, wenn es eine positive Zahl σ derart gibt, daß für jeden Wert von h zwischen* 0 *und σ der Wert von $f(b-h)$ kleiner bzw. größer als $f(b)$ ist.*

Setzen wir insbesondere voraus, daß $f(x)$ in dem Intervalle $a \leqq x \leqq b$ überall eine bestimmte endliche Ableitung $f'(x)$ habe, so folgt aus Satz 9 in Nr. 30, daß an der Stelle $x = a$ ein Grenzmaximum oder Grenzminimum vorliegt, je nachdem $f'(a)$ kleiner oder größer als Null ist, und daß an der Stelle $x = b$ ein Grenzmaximum oder Grenzminimum vorliegt, je nachdem $f'(b)$ größer oder kleiner als Null ist. Ist dagegen $f'(a) = 0$ oder $f'(b) = 0$, so versagen diese Kennzeichen; man wird dann direkt die obigen Definitionen anwenden.

1) Die drei Gleichungen (6) und (7) zusammen besagen, wie das Spätere zeigen wird, daß der Punkt P oder (a, b, c) der Mittelpunkt der sogenannten *Schmiegungskugel* des Kurvenpunktes M ist (vgl. Nr. 276).

Beispiel: Die Funktion $y = x^x$, die nur für positives x definiert ist (vgl. Nr. 5 und 143), hat für $x = 0$ ein Grenzmaximum. Es ist nämlich $\lim x^x$ für $\lim x = 0$ nach Nr. 135 gleich Eins, während $\ln y$ oder $x \ln x$ für positive Werte von x, die kleiner als Eins sind, negativ wird, so daß y für solche Werte von x kleiner als für $x = 0$ ist.

Handelt es sich um eine Aufgabe, bei der als unabhängige Veränderliche verschiedene veränderliche Größen gewählt werden können, z. B. um geometrisch gestellte Aufgaben, so kann es vorkommen, daß man eine solche unabhängige Veränderliche wählt, die nur innerhalb gewisser Grenzen variiert, und daß man, wenn diese Grenzen nicht beachtet werden, unter Umständen Maxima oder Minima übersieht.

Beispiel: Soll die kleinste oder größte Entfernung eines Punktes $x = a$ der *positiven* x-Achse von den Punkten des Kreises

$$x^2 + y^2 = R^2$$

bestimmt werden — wie am Schlusse von Nr. 146 —, so wird das Maximum oder Minimum der Funktion

$$v = (x - a)^2 + y^2$$

gesucht, wobei $y^2 = R^2 - x^2$ ist, so daß

$$v = R^2 + a^2 - 2ax$$

wird. Hier ist $dv : dx = -2a \neq 0$, so daß man also nach Satz 1 in Nr. 142 gar kein Maximum oder Minimum erhält. Aber die Gleichung $y = \sqrt{R^2 - x^2}$ des Kreises lehrt, daß x nur in dem Intervalle von $-R$ bis $+R$ variiert, so daß die Grenzmaxima oder Grenzminima in Betracht kommen. Es ist $dv : dx = -2a < 0$, d. h. für die untere Intervallgrenze $x = -R$ liegt ein Grenzmaximum und für die obere Intervallgrenze $x = +R$ ein Grenzminimum vor.

149. Extremwerte einer unentwickelten Funktion von einer Veränderlichen. Ist y als Funktion von x definiert durch eine Gleichung

$$f(x, y) = 0 \tag{1}$$

und nehmen wir an, daß y eine stetige Ableitung habe, so ergibt sich durch Differentiation nach Nr. 54:

$$f_x + f_y y' = 0. \tag{2}$$

Die erste Bedingung des Maximums oder Minimums von y in Satz 1, Nr. 142, verlangt, daß $y' = 0$ werde. Sie lautet also:

$$(3) \qquad f_x = 0.$$

Man hat daher ein Wertepaar x, y zu bestimmen, das den beiden Gleichungen (1) und (3) genügt. Wir sehen dabei von solchen Werten x, y ab, für die sowohl f_x als auch f_y und überdies f selbst gleich Null ist. Auf derartige *singuläre* Wertepaare werden wir bei der Besprechung der Kurven in der Ebene zurückkommen (in § 3 des 7. Kap.).

Um zu entscheiden, ob ein Wertepaar x, y, das den beiden Gleichungen (1) und (3) genügt, wirklich zu einem Maximum oder Minimum von y führt, müssen wir nach Satz 1 in Nr. 142 die zweite Ableitung y'' von y nach x berechnen. Vollständige Differentiation von (2) nach x gibt:

$$f_{xx} + 2f_{xy}y' + f_{yy}y'^2 + f_y y'' = 0.$$

Da für das zu betrachtende Wertepaar $y' = 0$ ist, so kommt, weil nach der gemachten Voraussetzung f_y nicht verschwindet:

$$(4) \qquad y'' = -\frac{f_{xx}}{f_y}.$$

Ist dieser Wert positiv, so liegt ein Minimum von y vor, ist er negativ, so liegt ein Maximum von y vor. Ist er gleich Null, so hat man nach Satz 1 in Nr. 142 die höheren Ableitungen von y nach x zu berücksichtigen, um zu einer Entscheidung zu kommen.

150. Beispiel. Wir suchen die Maxima und Minima der durch

$$y^3 - 3axy + x^3 = 0$$

bestimmten Funktion y von x. Dabei soll a eine positive Konstante bedeuten. Es ist hier

$$f = y^3 - 3axy + x^3,$$

also:

$$f_x = 3(x^2 - ay), \quad f_y = 3(y^2 - ax).$$

Die Bedingungen (1) und (3) der vorigen Nummer lauten also:

$$y^3 - 3axy + x^3 = 0, \quad x^2 - ay = 0.$$

Wird $y = x^2 : a$ aus der zweiten Gleichung in die erste eingesetzt, so kommt $x^3(x^3 - 2a^3) = 0$, so daß

$$\text{entweder} \quad x = 0 \quad \text{oder} \quad x = a\sqrt[3]{2}$$

sein muß. Die zugehörigen Werte von y sind

$$\text{entweder} \quad y = 0 \quad \text{oder} \quad y = a\sqrt[3]{4}.$$

Für $x = y = 0$ ist auch $f_y = 0$. Diesen Fall schließen wir nach einer Bemerkung in voriger Nummer aus. Für $x = a\sqrt[3]{2}$ und $y = a\sqrt[3]{4}$ wird

$$f_y = 3a^2\sqrt[3]{2} \neq 0, \quad f_{xx} = 6x = 6a\sqrt[3]{2},$$

so daß nach (4) in voriger Nummer $y'' = -2 : a$, also negativ wird. Demnach hat y für $x = a\sqrt[3]{2}$ das Maximum $a\sqrt[3]{4}$.

151. Extremwerte einer durch mehrere Gleichungen gegebenen unentwickelten Funktion von einer Veränderlichen. Wie in Nr. 58 sei ein System von etwa n Gleichungen zwischen $n+1$ Veränderlichen $x, y_1, y_2, \ldots y_n$ gegeben:

$$(1) \qquad \begin{cases} f_1(x, y_1, y_2, \ldots y_n) = 0, \\ f_2(x, y_1, y_2, \ldots y_n) = 0, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ f_n(x, y_1, y_2, \ldots y_n) = 0. \end{cases}$$

Wir wollen voraussetzen, daß die Funktionen $f_1, f_2, \ldots f_n$ voneinander unabhängig hinsichtlich $y_1, y_2, \ldots y_n$ seien, d. h. daß nach Satz 4 in Nr. 80 die Funktionaldeterminante:

$$\Delta = \begin{pmatrix} f_1 & f_2 \cdots f_n \\ y_1 & y_2 \cdots y_n \end{pmatrix} \neq 0$$

sei. Setzen wir ferner voraus, daß die Forderung $\mathfrak{C}$ in Nr. 77 erfüllt sei, so definieren die Gleichungen (1) nach Satz 3 in Nr. 79 die Größen $y_1, y_2, \ldots y_n$ als stetige Funktionen von x mit stetigen Ableitungen erster Ordnung innerhalb eines gewissen Variabilitätsbereiches für die Veränderliche x.

Nunmehr stellen wir uns die Aufgabe, die Maxima und Minima einer dieser n Funktionen, allgemein die von y_k, zu bestimmen. Nach Satz 1, Nr. 142, muß zunächst $dy_k : dx = 0$ gefordert werden. Es ist aber nach Nr. 58:

$$(2) \qquad \frac{dy_k}{dx} = -\frac{\Delta_k}{\Delta},$$

wenn Δ_k diejenige Determinante bedeutet, die aus Δ hervorgeht, sobald darin

$$\frac{\partial f_1}{\partial y_k}, \frac{\partial f_2}{\partial y_k}, \ldots \frac{\partial f_n}{\partial y_k} \quad \text{durch} \quad \frac{\partial f_1}{\partial x}, \frac{\partial f_2}{\partial x}, \ldots \frac{\partial f_n}{\partial x}$$

ersetzt werden. Wir fordern daher

$$(3) \qquad \Delta_k = 0,$$

d. h. solche Werte von x, für die y_k ein Maximum oder Minimum erreichen kann, müssen den $n+1$ Gleichungen (1) und (3) in den $n+1$ Veränderlichen $x, y_1, y_2, \ldots y_n$ genügen. Wie nehmen an, es gebe ein System von Lösungen $x, y_1, y_2, \ldots y_n$ dieser $n+1$ Gleichungen, und es sei für dies System $\Delta \neq 0$. Fälle, in denen auch $\Delta = 0$ wird, sind nicht nach der allgemeinen Methode zu behandeln, erfordern vielmehr eine besondere Untersuchung.

Um zu erkennen, ob der gefundene Wert von y_k für den gefundenen Wert von x wirklich ein Maximum oder Minimum ist, muß man wegen des Satzes 1, Nr. 142, die zweite Ableitung $d^2y_k : dx^2$ berechnen; wie dies geschieht, wurde in Nr. 83 und 85 gezeigt. Ist die Ableitung in der Umgebung des berechneten Wertsystems $x, y_1, y_2, \ldots y_n$ stetig, so tritt ein Maximum oder Minimum ein, je nachdem sie für dieses Wertsystem negativ oder positiv wird. Ist sie aber für dieses Wertsystem gleich Null, so liegt die Entscheidung nach Satz 1, Nr. 142, bei den höheren Differentialquotienten von y_k, die wie in Nr. 83 oder 85 zu bestimmen sind.

152. Nebenbedingungen. Die vorstehende Betrachtung umfaßt auch den Fall, in dem die Maxima und Minima einer *entwickelten* Funktion

$$F(x_1, x_2, \ldots x_n)$$

von n Veränderlichen gesucht werden, wenn dabei zwischen den n Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots x_n$ insgesamt gerade $n-1$ voneinander unabhängige Bedingungen vorgeschrieben sind:

$$\varphi_i(x_1, x_2, \ldots x_n) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots n-1),$$

so daß also etwa $x_2, x_3, \ldots x_n$ als Funktionen von x_1 aufzufassen sind und demnach F eine zusammengesetzte Funktion von nur einer unabhängigen Veränderlichen x_1 ist.

In der Tat, wenn wir F mit x_{n+1} bezeichnen, so liegen in:

$$x_{n+1} - F(x_1, x_2, \ldots x_n) = 0,$$
$$\varphi_i(x_1, x_2 \ldots x_n) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots n-1)$$

insgesamt n voneinander unabhängige Gleichungen in $n+1$ Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots x_{n+1}$ vor, wobei $x_2, x_3 \ldots x_{n+1}$ als Funktionen von x_1 aufzufassen sind. Es handelt sich um die Bestimmung der Maxima und Minima von x_{n+1}, aufgefaßt als Funktion von x_1. Diese Aufgabe ordnet sich der in voriger Nummer betrachteten unter. Die dort mit $x, y_1, y_2, \ldots y_n$ bezeichneten Größen sind hier $x_1, x_2, x_3, \ldots x_{n+1}$.

§ 3. Funktionen von mehreren Veränderlichen.

153. Notwendige Bedingung für Extremwerte. Wie in Nr. 140 geben wir die Definition: *Die Funktion $f(x, y, z, \ldots)$ von mehreren Veränderlichen $x, y, z, \ldots$ hat an einer Stelle $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0, \ldots$ ein Maximum oder ein Minimum, wenn es eine positive Zahl σ derart gibt, daß die Funktion erstens für alle Werte von $x, y, z, \ldots$ in den Intervallen*

$$x_0 - \sigma < x < x_0 + \sigma, \quad y_0 - \sigma < y < y_0 + \sigma, \ldots$$

definiert ist und zweitens für alle Werte $x, y, z, \ldots$ in diesen Intervallen kleiner bzw. größer als für $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0, \ldots$ ist.

Hieraus lassen sich leicht notwendige, wenn auch nicht hinreichende Bedingungen für die Extremwerte ableiten. Wenn wir nämlich annehmen, daß die vorstehenden Bedingungen erfüllt sind, und wenn wir in $f(x, y, z, \ldots)$ für $y, z, \ldots$ die bestimmten Werte $y_0, z_0, \ldots$ setzen, während wir x veränderlich lassen, so hat die entstehende Funktion von x allein, nämlich $f(x, y_0, z_0, \ldots)$, die Eigenschaft, daß ihr Wert für alle x im Intervalle $x_0 - \sigma < x < x_0 + \sigma$ im Falle eines Maximums kleiner und im Falle eines Minimums größer als für $x = x_0$ ist. Nach der Definition in Nr. 140 hat folglich diese Funktion von x für $x = x_0$ ein Maximum bzw. Minimum. Wenn nun auch ihre Ableitung in der Umgebung der Stelle x_0 stetig ist, so muß, wie in Nr. 140 gezeigt wurde, die Ableitung gleich Null

für $x = x_0$ sein. Dieselbe Schlußfolgerung können wir in Hinsicht auf y, z usw. machen. Also haben wir gefunden:

Satz 2: Die Funktion $f(x, y, z, \ldots)$ von mehreren Veränderlichen $x, y, z, \ldots$ kann an einer solchen Stelle $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0, \ldots$, in deren Umgebung sie stetig ist und stetige partielle Ableitungen erster Ordnung nach $x, y, z, \ldots$ hat, nur dann ein Maximum oder Minimum haben, wenn die Gleichungen:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 0, \cdots$$

für $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0, \ldots$ bestehen, oder, was dasselbe besagt, wenn das vollständige Differential

$$df = f_x dx + f_y dy + f_z dz + \cdots$$

für $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0, \ldots$ gleich Null ist.

Dies ist jedoch eine noch *keineswegs hinreichende* Bedingung für das wirkliche Auftreten eines Maximums oder Minimums.

154. Funktionen von zwei Veränderlichen. Die Aufgabe, entsprechend dem Satze 1 in Nr. 142 nicht nur notwendige, sondern zugleich hinreichende Merkmale für die Extremwerte von Funktionen von mehreren Veränderlichen abzuleiten, bietet ganz bedeutende Schwierigkeiten. Sie liegen nicht nur darin, daß naturgemäß die größere Zahl der Veränderlichen zu verwickelteren Formeln führt, sondern namentlich auch darin, daß für die Taylorsche Entwicklung bei Funktionen von mehreren Veränderlichen kein solcher allgemeiner Satz über die Größe des Restgliedes gilt wie der Satz 22, Nr. 115, bei Funktionen von einer Veränderlichen, der ja die Grundlage für die Schlüsse in Nr. 142 war. Wir werden deshalb hier zunächst nur Funktionen von zwei Veränderlichen in bezug auf ihre Extremwerte genauer untersuchen.

Es sei $f(x, y)$ eine solche Funktion von x und y, die in der Umgebung der Stelle $x = x_0$, $y = y_0$ nebst ihren partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung stetig ist. Alsdann ist nach Satz 28, Nr. 137:

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = (f_x h + f_y k)_{x_0, y_0} + R_2,$$

wo

$$R_2 = \frac{1}{2}\,(f_{xx} h^2 + 2 f_{xy} hk + f_{yy} k^2)_{x_0 + \theta h, y_0 + \theta k} \tag{1}$$

ist. Die Indizes x_0, y_0 und $x_0 + \theta h$, $y_0 + \theta k$ sollen dabei andeuten, daß x und y durch diese Werte zu ersetzen sind. Die Formeln gelten für alle Werte $x_0 + h$ und $y_0 + k$ in der Umgebung von x_0 und y_0, also für alle Werte von h und k in der Umgebung von $h = 0$, $k = 0$. Ferner ist θ ein gewisser, uns freilich unbekannter positiver echter Bruch.

Damit nun an der Stelle $x = x_0$, $y = y_0$ ein Extremwert von f eintreten kann, ist nach Satz 2 der vorigen Nummer zunächst notwendig, daß f_x und f_y dort gleich Null sind. Dann ist aber:

$$f(x_0 + h,\ y_0 + k) - f(x_0,\ y_0) = R_2.$$

Nach der Definition ist jetzt zu fordern, daß dieser Wert R_2 für alle Werte von h und k in der Umgebung von $h = 0$, $k = 0$ im Falle des Maximums negativ und im Falle des Minimums positiv sei — abgesehen natürlich von dem Wertepaare $h = 0$, $k = 0$ selbst.

Wir wollen zunächst voraussetzen, daß

$$(2) \qquad (f_{xx})_{x_0, y_0} \neq 0, \quad (f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2)_{x_0, y_0} \neq 0$$

sei. Da f_{xx} und $f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2$ stetig in der Umgebung von $x = x_0$, $y = y_0$ sind und nach (2) für $x = x_0$, $y = y_0$ von Null verschiedene Werte haben, so können wir die Umgebung der Stelle $x = x_0$, $y = y_0$ so eng begrenzen, daß diese beiden Funktionen innerhalb der Umgebung dieselben Vorzeichen wie die Werte (2) haben. Dies ergibt sich gerade so wie der Satz 4 in Nr 21, der sich auf eine Funktion von nur einer Veränderlichen bezieht, sofort aus der vorausgesetzten Stetigkeit.

Den Wert (1) des Restes R_2 können wir nun so schreiben:

$$(3) \qquad R_2 = \frac{1}{2 f_{xx}} \left[(f_{xx} h + f_{xy} k)^2 + (f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2) k^2 \right].$$

Dabei haben wir die schwerfälligen Indizes $x_0 + \theta h$, $y_0 + \theta k$ fortgelassen. Man hat sich also immer unter x und y Werte in der Umgebung der Stelle (x_0, y_0) vorzustellen. Der zweite Summand in der Klammer ist stets, so lange $k \neq 0$ ist, von demselben Vorzeichen wie der zweite Ausdruck (2).

Ist dieser zweite Ausdruck (2) *positiv,* so ist der Inhalt der eckigen Klammer positiv für $k \neq 0$, während er für $k = 0$ den Wert $h^2 f_{xx}^2$ hat, der wegen der ersten Forderung (2) positiv

ist, weil mit $k = 0$ nicht auch $h = 0$ werden darf. Mithin ist R_2 alsdann von demselben Vorzeichen wie f_{xx} an der Stelle (x_0, y_0), so daß ein Maximum oder Minimum vorliegt, je nachdem f_{xx} für $x = x_0$, $y = y_0$ negativ oder positiv ist.

Ist dagegen der zweite Ausdruck (2) *negativ*, so steht in (3) in der eckigen Klammer eine Differenz von zwei positiven Ausdrücken, die z. B. für $k = 0$ positiv und für

$$\frac{h}{k} = -\frac{f_{xy}}{f_{xx}}$$

negativ ist. Wir können offenbar h und k stets in dieser Weise wählen, wie klein auch die Umgebung der Stelle (x_0, y_0) ist, da wir hierdurch nur über ihr Verhältnis verfügen, nicht über ihre einzelnen Werte. Also wird jetzt der Rest R_2 in der Umgebung von $h = 0$, $k = 0$ teils positiv, teils negativ, so daß weder ein Maximum noch ein Minimum eintritt.

Ganz entsprechende Schlüsse lassen sich machen, wenn statt der Voraussetzungen (2) die Voraussetzungen

$$(4) \qquad (f_{yy})_{x_0, y_0} \neq 0, \quad (f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2)_{x_0, y_0} \neq 0$$

vorliegen, da wir dann nur x und y ihre Rolle vertauschen zu lassen brauchen.

Ist immer noch die Voraussetzung

$$(5) \qquad (f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2)_{x_0, y_0} \neq 0$$

erfüllt, so ist es ferner möglich, daß f_{xx} und f_{yy} beide an der Stelle (x_0, y_0) gleich Null sind. Dann ist der Ausdruck (5) offenbar negativ. Es ist leicht zu sehen, daß in diesem Falle weder ein Maximum noch ein Minimum eintritt. Denn nach (1) ist dann im Falle $k = h$:

$$(6) \qquad R_2 = \frac{h^2}{2}(f_{xx} + 2f_{xy} + f_{yy}),$$

dagegen im Falle $k = -h$:

$$(7) \qquad R_2 = \frac{h^2}{2}(f_{xx} - 2f_{xy} + f_{yy}).$$

An der Stelle (x_0, y_0) selbst haben diese Funktionen bei den jetzt geltenden Voraussetzungen die Werte

$$(8) \qquad h^2 f_{x_0 y_0} \quad \text{und} \quad -h^2 f_{x_0 y_0},$$

die von Null verschieden sind, denn $f_{x_0 y_0}$ muß nach (5) von Null verschieden sein. Wird also die Stelle (x, y) hinreichend nahe bei der Stelle (x, y) gewählt, so haben die Werte (6) und (7) die gleichen Vorzeichen wie die beiden Werte (8), demnach voneinander *verschiedene* Vorzeichen. Mithin kann weder ein Maximum noch ein Minimum eintreten.

Endlich kann es vorkommen, daß

$$(f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2)_{x_0 y_0} = 0$$

wird. In diesem Falle verzichten wir jedoch auf die Entwicklung hinreichender Merkmale für das Maximum oder Minimum.

Hiernach gilt der

Satz 3: Ist die Funktion $f(x, y)$ von x und y in der Umgebung der Stelle (x_0, y_0) nebst ihren partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung stetig, so kann sie an der Stelle (x_0, y_0) nur dann einen Extremwert haben, wenn daselbst f_x und f_y beide verschwinden. Ist überdies an eben dieser Stelle der Ausdruck $f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2$ von Null verschieden, so hat sie dort weder ein Maximum noch ein Minimum, sobald der Ausdruck dort negativ ist. Ist er jedoch an der Stelle (x_0, y_0) positiv, so hat die Funktion daselbst ein Maximum, wenn dort f_{xx} oder f_{yy} negativ ist, und ein Minimum, wenn dort f_{xx} oder f_{yy} positiv ist.

Zur Erläuterung bemerken wir dabei, daß in dem Falle, wo $f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2$ für $x = x_0$, $y = y_0$ positiv ist, niemals f_{xx} und f_{yy} an dieser Stelle verschiedenes Vorzeichen haben können.

155. Unzureichende Bedingungen für Extremwerte. Liegt eine Funktion $f(x, y, z, \ldots)$ von mehreren Veränderlichen $x, y, z, \ldots$ vor, so kann man in folgender Weise die schon in Satz 2, Nr. 153, gefundenen Bedingungen für Extremwerte verschärfen.

Setzen wir:

$$x = x_0 + ht, \quad y = y_0 + kt, \quad z = z_0 + lt, \ \ldots, \tag{1}$$

indem wir unter $h, k, l, \ldots$ beliebige Konstanten und unter t eine Veränderliche verstehen, so wird f eine Funktion von t allein, nämlich:

$$F(t) = f(x_0 + ht, \ y_0 + kt, \ z_0 + lt, \ldots),$$

die für $t = 0$ den Wert $f(x_0, y_0, z_0, \ldots)$ hat. Wird $|t|$ hinreichend klein gewählt, so wird durch (1) eine Stelle in der Umgebung der Stelle $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0, \ldots$ definiert und zwar eine *beliebige*, da $h, k, l, \ldots$ beliebige Konstanten sein sollen. Hat nun die Funktion f an der Stelle $(x_0, y_0, z_0, \ldots)$ ein Maximum oder ein Minimum, so muß daher nach Nr. 153 die Funktion $F(t)$ für alle Werte von t in der Umgebung des Wertes $t = 0$ stets kleiner oder aber stets größer als $F(0)$ sein, und zwar *bei beliebiger Wahl* von $h, k, l, \ldots$, d. h. die Funktion $F(t)$ von *einer* Veränderlichen t muß für $t = 0$ ebenfalls ein Maximum oder aber ein Minimum haben, wie auch $h, k, l, \ldots$ gewählt sein mögen.

Bedingungen hierfür aber können wir nach Satz 1, Nr. 142, leicht aufstellen, wenn wir voraussetzen, daß die Funktion $f(x, y, z, \ldots)$ in der Umgebung von $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0, \ldots$ nebst ihren partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung stetig sei, denn dann ist auch die Funktion $F(t)$ in der Umgebung von $t = 0$ nebst ihren Ableitungen $F'(t)$ und $F''(t)$ stetig. Nach Satz 1 in Nr. 142 haben wir zunächst zu verlangen, daß $F'(t) = 0$ für $t = 0$ sei. Es ist aber

$$(2) \qquad F'(t) = f_x h + f_y k + f_z l + \cdots.$$

Da $F'(t) = 0$ für $t = 0$ und für *alle* Werte von $h, k, l, \ldots$ sein soll, so müssen einzeln $f_x, f_y, f_z, \ldots$ für $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0, \ldots$ gleich Null sein. So ergeben sich wieder die Bedingungen in Satz 2, Nr. 153. Weiterhin kann nach Satz 1, Nr. 142, im Falle eines Maximums nur zweierlei eintreten: Es muß $F''(t)$ negativ oder gleich Null sein für $t = 0$. Im Falle des Minimums ferner muß $F''(t)$ positiv oder gleich Null sein für $t = 0$. Im Falle eines Maximums darf also $F''(t)$ für beliebige Werte von $h, k, l, \ldots$ und für $t = 0$ nicht positiv und im Falle eines Minimums nicht negativ sein. Es ist aber nach Satz 5, Nr. 70:

$$(3) \quad F''(t) = f_{xx} h^2 + 2 f_{xy} hk + f_{yy} k^2 + 2 f_{xz} hl + 2 f_{yz} kl + f_{zz} l^2 + \cdots.$$

Wir weisen, ehe wir das Ergebnis formulieren, noch darauf hin, daß in (2) und (3) rechts die vollständigen Differentiale erster und zweiter Ordnung von f stehen, wenn wir $h, k, l, \ldots$ als die Differentiale $dx, dy, dz, \ldots$ auffassen, die ja ebenso willkürlich sind wie $h, k, l, \ldots$. Also hat sich ergeben:

Satz 4: Ist die Funktion $f(x, y, z, \ldots)$ *in der Umgebung der Stelle* $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0, \ldots$ *nebst ihren partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung stetig und hat sie an dieser Stelle ein Maximum oder ein Minimum, so ist dort erstens das vollständige Differential erster Ordnung* df *gleich Null und zweitens das vollständige Differential zweiter Ordnung* $d^2 f$ *für kein Wertsystem der Differentiale* $dx, dy, dz, \ldots$ *im Falle des Maximums positiv oder im Falle des Minimums negativ.*

Man muß sich aber vor einem falschen Schlusse hüten: Wenn die Funktion $F(t)$ von t für $t = 0$ ein Maximum oder ein Minimum hat — und zwar wohlbemerkt für *alle beliebigen* Wertsysteme $h, k, l, \ldots$ —, so steht es doch nicht fest, daß auch die Funktion $f(x, y, z, \ldots)$ für $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0, \ldots$ ein Maximum oder ein Minimum hat.

Daß diese Umkehrung unstatthaft ist, liegt daran, daß wir bei den Annahmen (1), wenn sich t der Null nähert, auf ganz bestimmtem Wege eine allgemeine Stelle $(x, y, z, \ldots)$ an die kritische Stelle $(x_0, y_0, z_0, \ldots)$ heranbringen, nämlich so, daß $x - x_0$, $y - y_0$, $z - z_0, \ldots$, die ja nach (1) gleich $ht, kt, lt, \ldots$ sind, einander beständig proportional bleiben. Statthaft wäre jene Umkehrung, wenn wir nicht die spezielle Substitution (1) gemacht hätten, sondern eine ganz allgemeine Substitution:

$$x = x_0 + \varphi(t), \quad y = y_0 + \chi(t), \quad z = z_0 + \psi(t), \ldots,$$

wo $\varphi(t), \chi(t), \psi(t), \ldots$ *irgendwelche* solche Funktionen von t bedeuten, die für $t = 0$ sämtlich verschwinden und in der Umgebung von $t = 0$ stetig sind.

Das Unstatthafte jener Umkehrung soll noch an einem einfachen von *Peano* gegebenen Beispiele gezeigt werden: Wir betrachten die Funktion von zwei Veränderlichen x und y:

$$f(x, y) = (y - a^2 x^2)(y - b^2 x^2), \tag{4}$$

worin a und b von Null verschiedene Konstanten bedeuten sollen. Wir wollen untersuchen, ob sie an der Stelle (0, 0) ein Maximum oder Minimum hat, also $x_0 = 0$, $y_0 = 0$ annehmen. Die Substitution (1) lautet hier:

$$x = ht, \quad y = kt$$

und gibt
$$F(t) = t^2 (k - a^2 h^2 t)(k - b^2 h^2 t).$$
Für $t = 0$ ist $F'(t)$ auch gleich Null. Für $t = 0$ wird ferner $F''(t) = 2k^2$, also positiv, wenn $k \neq 0$ ist, so daß $F(t)$ für $k \neq 0$ sicher an der Stelle $t = 0$ nach Satz 1, Nr. 142, ein Minimum hat. Ist $k = 0$, so muß $h \neq 0$ genommen werden. Dann kommt $F(t) = a^2 b^2 h^4 t^4$, und diese Funktion hat für $t = 0$ ebenfalls ein Minimum, da für $t = 0$ zwar $F'(t)$, $F''(t)$, $F'''(t)$ alle drei gleich Null sind, aber $F^{\text{IV}}(t) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 a^2 b^2 h^4 > 0$ ist.

In unserem Beispiele hat also $F(t)$ *gewiß ein Minimum für* $t = 0$. *Dennoch hat die Funktion* (4) *an der Stelle* (0, 0) *weder ein Maximum noch ein Minimum.* Setzen wir nämlich $x = h$, $y = c^2 h^2$, so liegt die Stelle (x, y), wenn $|h|$ hinreichend klein gewählt wird, in der Umgebung jener Stelle, und es ist dann $f(x, y) = h^4 (c^2 - a^2)(c^2 - b^2)$. Nehmen wir c^2 zwischen a^2 und b^2 an, so wird also $f < 0$, andernfalls $f > 0$. Daher gibt es in der Umgebung der Stelle (0, 0) sowohl Stellen, an denen f kleiner, als auch Stellen, an denen f größer als für $x = 0$, $y = 0$ ist. —

Wenn eine Funktion $f(x, y, z, \ldots)$ vorliegt und untersucht werden soll, ob sie für $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0, \ldots$ einen Extremwert hat, so ersetzt der Satz 4 den früheren Satz 2 in Nr. 153 insofern, als er zwar auch nur notwendige und nicht hinreichende Bedingungen liefert, aber *schärfere* Bedingungen als der Satz 2.

156. Bedingungen dafür, daß das vollständige Differential zweiter Ordnung nie negativ oder nie positiv ist. Um den Satz 4 in Nr. 155 anwenden zu können, müssen wir eine Methode haben, die uns gestattet, zu entscheiden, ob das vollständige Differential zweiter Ordnung von f, nämlich:
$$d^2 f = f_{xx} dx^2 + 2 f_{xy} dx dy + f_{yy} dy^2 + 2 f_{xz} dx dz + \\ + 2 f_{yz} dy dz + f_{zz} dz^2 + \cdots,$$
bei bestimmt gewählten Werten von $x, y, z, \ldots$ für kein Wertsystem der willkürlichen Differentiale dx, dy, $dz, \ldots$ positiv bzw. negativ wird. Soll etwa $d^2 f$ nie positiv, d. h. $d^2 f \leqq 0$ sein, so bedeutet dies, daß das Differential zweiter Ordnung

von $-f$ stets positiv oder mindestens gleich Null sein soll. Wir können uns also auf die Aufgabe beschränken, *zu entscheiden, unter welchen Bedingungen stets* $d^2 f \geqq 0$ *ist.*

Das vollständige Differential zweiter Ordnung stellt eine ganze rationale Funktion von $dx, dy, dz, \ldots$ vor, die homogen vom zweiten Grade ist. Eine solche Funktion nennt man eine *quadratische Form.* Die Aufgabe ist also, zu erkennen, *unter welchen Bedingungen eine quadratische Form nie negativ wird.* Für eine quadratische Form mit nur zwei Veränderlichen ist die Aufgabe schon in Nr. 154 gelöst, und für das folgende Verfahren ist die damalige Lösung ein spezieller Fall. Vorweg erinnern wir daran, daß die Koeffizienten f_{xx}, f_{xy}, f_{yy} usw. jetzt bestimmte Werte haben, da für $x, y, z, \ldots$ bestimmte Werte eingesetzt sind. Zur Bequemlichkeit wollen wir die Differentiale $dx, dy, dz, \ldots$ wie in voriger Nummer mit $h, k, l, \ldots$ bezeichnen, so daß wir haben:

$$(1) \quad d^2 f = f_{xx} h^2 + 2 f_{xy} hk + f_{yy} k^2 + 2 f_{xz} hl + 2 f_{yz} kl + f_{zz} l^2 + \cdots.$$

Sind zunächst die Koeffizienten von $h^2, k^2, l^2, \ldots$ sämtlich gleich Null, so kann $d^2 f$ sowohl positiv als auch negativ gemacht werden. Denn dann wird ja eine der Größen $f_{xy}, f_{xz}, f_{yz}, \ldots$ nicht gleich Null sein, z. B. f_{xy} nicht. Setzen wir nun alle Differentiale gleich Null außer h und k, so wird $d^2 f = 2 f_{xy} hk$, und dies hat dasselbe Vorzeichen wie f_{xy}, wenn h und k gleiches Vorzeichen haben, und hat entgegengesetztes Vorzeichen wie f_{xy}, wenn h und k verschiedenes Vorzeichen haben.

Es ist also zunächst für $d^2 f \geqq 0$ zu fordern: *Nicht alle* $f_{xx}, f_{yy}, f_{zz}, \ldots$ *dürfen gleich Null sein.* Es sei daher z. B. $f_{xx} \neq 0$.

Die Summe aller Glieder, die h in der ersten Potenz enthalten, sei mit $2Ph$ und die Summe aller von h freien Glieder mit Q bezeichnet; es sei also:

$$(2) \quad P = f_{xy} k + f_{xz} l + \cdots, \quad Q = f_{yy} k^2 + 2 f_{yz} kl + f_{zz} l^2 + \cdots.$$

Alsdann kommt:

$$d^2 f = f_{xx} h^2 + 2Ph + Q.$$

Da $d^2 f = f_{xx} h^2$ ist, wenn $k = l = \cdots = 0$ gesetzt wird, so wird zu fordern sein:

$$f_{xx} > 0.$$

Nun läßt sich $d^2 f$ so schreiben:

$$(3) \qquad d^2 f = \frac{1}{f_{xx}} [(f_{xx} h + P)^2 + f_{xx} Q - P^2].$$

Da $f_{xx} h + P = 0$ für $h = -P : f_{xx}$ ist, welche Werte auch $k, l, m, \ldots$ haben mögen, so haben wir zu verlangen:

$$f_{xx} Q - P^2 \geqq 0.$$

Ist auch diese Bedingung erfüllt, so wird $d^2 f$ stets größer als Null oder mindestens gleich Null.

Nach (2) bedeutet aber $f_{xx} Q - P^2$ eine quadratische Form mit den Veränderlichen $k, l, \ldots$, frei von h. *Die Aufgabe, zu entscheiden, ob die quadratische Form $d^2 f$ mit den Veränderlichen $h, k, l, \ldots$ stets größer als Null oder mindestens gleich Null ist, wird somit auf die Aufgabe zurückgeführt, zu entscheiden, ob dasselbe für eine gewisse quadratische Form gilt, in der die Zahl der Veränderlichen um Eins kleiner ist.*

Indem wir die neue quadratische Form nach derselben Methode behandeln, erniedrigen wir die Zahl der Veränderlichen abermals um Eins usw., so daß wir schließlich zu einer quadratischen Form mit nur einer Veränderlichen gelangen, die nur dann nie negativ wird, wenn ihr Koeffizient nicht negativ ist. Wir finden also auf diesem Wege stets alle notwendigen und hinreichenden Bedingungen für $d^2 f \geqq 0$.

157. Weitere Hilfsmittel zur Entscheidung über Extremwerte. Wir hoben in Nr. 155 hervor, daß der dort aufgestellte Satz 4 keineswegs *hinreichende* Bedingungen für das Maximum oder Minimum liefert. Gelten die Voraussetzungen jenes Satzes, so kann man aus den Bedingungen $f_x = 0$, $f_y = 0$, $f_z = 0, \ldots$ zunächst diejenigen Wertsysteme $x_0, y_0, z_0, \ldots$ finden, für die überhaupt Extremwerte von f denkbar sind. Mit Hilfe der Methode in Nr. 156 kann man alsdann finden, ob für ein solches Wertsystem $d^2 f$ auch wirklich nie negativ oder nie positiv wird. Wird es sowohl positiv wie auch negativ, so ist ein Extremwert mit Sicherheit ausgeschlossen, andernfalls jedoch steht die endgültige Entscheidung noch dahin. Es ist aber jetzt nach Satz 28 in Nr. 137:

$$(1) \quad f(x_0 + h, y_0 + k, z_0 + l, \cdots) - f(x_0, y_0, z_0, \cdots) = R_2,$$

wo R_2 den Rest vorstellt:

$$R_2 = \frac{1}{2}(f_{xx}h^2 + 2f_{xy}hk + f_{yy}k^2 + 2f_{xz}hl + \cdots)_{x_0+\theta h,\; y_0+\theta k,\; z_0+\theta l, \ldots}.$$

Dabei bedeutet θ einen unbekannten positiven echten Bruch. Die Indizes besagen, daß $x, y, z, \ldots$ durch $x_0 + \theta h$, $y_0 + \theta k$, $z_0 + \theta l, \ldots$ ersetzt werden sollen. Wie man sieht, ist, wenn $h, k, l, \ldots$ als die Differentiale $dx, dy, dz, \ldots$ aufgefaßt werden.

$$R_2 = \frac{1}{2}(d^2 f)_{x_0+\theta h,\; y_0+\theta k,\; z_0+\theta l, \ldots}.$$

Nehmen wir nun an, wir hätten bewiesen, daß $d^2 f$ an der Stelle $(x_0, y_0, z_0, \ldots)$ *stets positiv* und für *kein* Wertsystem der Differentiale $h, k, l, \ldots$ (außer für das ausgeschlossene $h = k = l = \cdots = 0$) gleich Null ist, so muß $d^2 f$ als stetige Funktion von $x, y, z, \ldots$ auch in der Umgebung der Stelle $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0, \ldots$ überall positiv sein, denn der Satz 4 in Nr. 21, der unmittelbar aus der Definition der Stetigkeit folgte, gilt, wie schon in Nr. 154 erwähnt wurde, auch für Funktionen von mehreren Veränderlichen. In dem angenommenen Falle ist also $R_2 > 0$, d. h. es tritt ein Minimum ein. Ebenso ergibt sich ein Maximum, wenn $d^2 f$ an der Stelle $(x_0, y_0, z_0, \ldots)$ stets negativ und nie gleich Null ist.

Demnach läßt sich Satz 4 in Nr. 155 so ergänzen:

Satz 5: Unter den Anahmen des Satzes 4 in Nr. 155 hat die Funktion f an der Stelle $(x_0, y_0, z_0, \ldots)$ sicher ein Maximum bzw. Minimum, wenn das vollständige Differential zweiter Ordnung $d^2 f$ an dieser Stelle für alle Werte der Differentiale dx, dy, $dz, \ldots$ negativ und nie gleich Null bzw. positiv und nie gleich Null wird. Dabei ist von dem einen Wertsystem $dx = 0$, $dy = 0$, $dz = 0, \ldots$ abzusehen.

Wenn eine Form wie die quadratische Form $d^2 f$ der Differentiale $dx, dy, dz, \ldots$ für alle Werte der Veränderlichen positiv und *für kein Wertsystem gleich Null* wird, abgesehen von dem auszuschließenden Falle, wo alle Veränderlichen gleich Null gesetzt werden, so heißt sie eine *definite positive Form.* Entsprechende Bedeutung hat eine *definite negative Form.* Wenn eine Form zwar nie negativ (bzw. positiv), aber für gewisse Wertsysteme der Veränderlichen *gleich Null* wird, so heißt sie eine *semidefinite positive (bzw. negative) Form.* In allen anderen Fällen spricht man von *indefiniten Formen.*

[157

Die Sätze 4 und 5 lassen sich also so zusammenfassen:

Satz 6: Ist die Funktion $f(x, y, z, \ldots)$ *in der Umgebung der Stelle* $(x_0, y_0, z_0, \ldots)$ *nebst ihren partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung stetig, so kann sie daselbst nur dann einen Extremwert haben, wenn dort erstens* $df = 0$ *wird und zweitens* d^2f *eine definite oder semidefinite Form der Differentiale* dx, dy, $dz, \ldots$ *ist. Ist* d^2f *dort insbesondere eine definite Form, so tritt sicher ein Maximum oder Minimum ein und zwar, je nachdem diese Form negativ oder positiv ist. Ist* d^2f *dagegen semidefinit, so steht die Entscheidung noch aus, ob überhaupt ein Extremwert eintritt.*

In dem Falle, wo d^2f an der Stelle $x_0, y_0, z_0, \ldots$ *semidefinit* wird, leiten wir weiter keine entscheidenden Merkmale für das wirkliche Auftreten eines Extremwertes ab. Man kann in einem solchen Falle, wenn eine ganz bestimmte Funktion f vorliegt, versuchen, die Entscheidung dadurch zu treffen, daß man zusieht, ob die Definition der Extremwerte in Nr. 153 zutrifft.

158. Bedingungen für ein definites vollständiges Differential zweiter Ordnung. Um den letzten Satz anwenden zu können, muß man eine Methode haben, mittels deren man zu erkennen imstande ist, ob ein vollständiges Differential d^2f *definit* ist. Nun haben wir in Nr. 156 gesehen, wie man methodisch feststellen kann, ob d^2f wenigstens *semidefinit* ist. Verschärfen wir die Forderung, indem wir verlangen, daß d^2f *definit* sein soll, so können wir zunächst entsprechend wie dort beweisen, daß $f_{xx}, f_{yy}, f_{zz}, \ldots$ *sämtlich* von Null verschieden sein und zwar im Falle einer definiten *positiven* Form sämtlich *positiv* sein müssen. Wenn wir d^2f auf die dort angegebene Form (3) bringen, so sehen wir: Weil $f_{xx}h + P$ gleich Null gemacht werden kann, so muß gefordert werden, daß

$$f_{xx}Q - P^2 > 0, \quad \text{aber} \quad \neq 0$$

sei, d. h. *diese neue quadratische Form, die eine Veränderliche weniger enthält, muß auch definit und positiv sein.* Umgekehrt: Ist sie definit und positiv, so ist d^2f nach (3) auch definit und positiv.

Das in Nr. 156 angegebene Verfahren gilt also auch jetzt, nur muß man überall, wo dort die Zeichen $\geqq$ standen, jetzt das Zeichen $>$ allein setzen.

§ 4. Anwendungen.

159. Beispiel. Es liege die Funktion vor:

$$f = x^\alpha y^\beta z^\gamma (a - x - y - z)^n,$$

wo α, β, γ, n ganze positive Zahlen seien und a eine positive Konstante bedeute. Logarithmische Differentiation gibt:

$$(1) \qquad \frac{df}{f} = \alpha \frac{dx}{x} + \beta \frac{dy}{y} + \gamma \frac{dz}{z} - n \frac{dx + dy + dz}{a - x - y - z}.$$

Daher ist $df = 0$ zunächst für $f = 0$, d. h. für $x = 0$ oder $y = 0$ oder $z = 0$ (wenn $\alpha > 1$ bzw. $\beta > 1$ bzw. $\gamma > 1$ ist). Von diesen Werten wollen wir absehen, da für sie die Entscheidung, ob ein Extremwert von f auftritt, leicht ist. Es ist außerdem $df = 0$ nur noch dann, wenn x, y, z die Werte

$$(2) \quad x_0 = \frac{\alpha a}{\alpha + \beta + \gamma + n}, \quad y_0 = \frac{\beta a}{\alpha + \beta + \gamma + n}, \quad z_0 = \frac{\gamma a}{\alpha + \beta + \gamma + n}$$

haben. Auch ist f nebst den partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung in der Umgebung dieser Stelle stetig. Für diese Stelle wird:

$$f(x_0, y_0, z_0) = \alpha^\alpha \beta^\beta \gamma^\gamma n^n \left(\frac{a}{\alpha + \beta + \gamma + n}\right)^{\alpha + \beta + \gamma + n} > 0.$$

Aus (1) folgt durch Differentiation:

$$(3) \quad \frac{d^2 f}{f} - \left(\frac{df}{f}\right)^2 = -\alpha\left(\frac{dx}{x}\right)^2 - \beta\left(\frac{dy}{y}\right)^2 - \gamma\left(\frac{dz}{z}\right)^2 - n\left(\frac{dx + dy + dz}{a - x - y - z}\right)^2.$$

Da $df = 0$ und $f > 0$ für das Wertsystem (2) ist, so wird $d^2 f$ an der Stelle $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$ nie positiv. Gleich Null kann $d^2 f$ hier nur dann werden, wenn alle vier Summanden rechts in (3) einzeln gleich Null werden, d. h. nur für das auszuschließende Wertsystem $dx = 0$, $dy = 0$, $dz = 0$. Demnach ist $d^2 f$ für die Werte (2) definit und negativ. Folglich gehört zu dem Wertsysteme (2) ein *Maximum* der Funktion f.

160. Größte und kleinste Entfernungen zwischen zwei Punkten, die auf zwei gegebenen Kurven liegen. Es seien im Raume zwei Punkte M und M' mit den Koordi-

naten x, y, z und x', y', z' auf zwei gegebenen Kurven gelegen, so daß etwa y und z gegebene Funktionen von x sind und ebenso y' und z' gegebene Funktionen von x'.[1]) Das Quadrat der Entfernung MM' ist:

$$V = (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2, \tag{1}$$

also eine zusammengesetzte Funktion von x und x' allein, da y, z Funktionen von x sind und y', z' Funktionen von x'. Wir suchen die Extremwerte von V. Es kommt:

$$\left\{\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{\partial V}{\partial x} &= (x - x') + (y - y')\frac{dy}{dx} + (z - z')\frac{dz}{dx}, \\ \frac{1}{2}\frac{\partial V}{\partial x'} &= -(x - x') - (y - y')\frac{dy'}{dx'} - (z - z')\frac{dz'}{dx'}; \end{aligned}\right. \tag{2}$$

ferner:

$$\left\{\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} &= 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + (y - y')\frac{d^2y}{dx^2} + (z - z')\frac{d^2z}{dx^2}, \\ \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial x'} &= -\left(1 + \frac{dy'}{dx'}\frac{dy}{dx} + \frac{dz'}{dx'}\frac{dz}{dx}\right), \\ \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial x'^2} &= 1 + \left(\frac{dy'}{dx'}\right)^2 + \left(\frac{dz'}{dx'}\right)^2 - (y - y')\frac{d^2y'}{dx'^2} - (z - z')\frac{d^2z'}{dx'^2}. \end{aligned}\right. \tag{3}$$

Die ersten Bedingungen für ein Maximum oder Minimum sind also nach (2):[2])

$$\left\{\begin{aligned} (x - x') + (y - y')\frac{dy}{dx} + (z - z')\frac{dz}{dx} &= 0, \\ (x - x') + (y - y')\frac{dy'}{dx'} + (z - z')\frac{dz'}{dx'} &= 0. \end{aligned}\right. \tag{4}$$

Dies ist ein System von zwei Gleichungen zur Bestimmung von x und x', denn y und z sind ja gegebene Funktionen von x und ebenso y' und z' gegebene Funktionen von x'. Wird für ein Wertepaar x, x', das diesen Gleichungen genügt, der Ausdruck:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\frac{\partial^2 V}{\partial x'^2} - \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial x'}\right)^2 > 0, \tag{5}$$

so hat MM' einen Extremwert und zwar ein Maximum, wenn $\partial^2 V : \partial x^2 < 0$ ist, und ein Minimum, wenn $\partial^2 V : \partial x^2 > 0$ ist,

1) Wir werden im 9. Kapitel ausführlich über Raumkurven sprechen.

2) Wie Nr. 252 zeigen wird, besagen die Forderungen (4), daß die Gerade MM' zur Tangente der ersten Kurve in M und zur Tangente der zweiten Kurve in M' senkrecht sein muß.

nach Satz 3 in Nr. 154. Wird der Ausdruck (5) dagegen negativ, so entspricht dem gefundenen Wertepaare x, x' weder ein Maximum noch ein Minimum. Wird er gleich Null, so bleibt die Frage unentschieden.

161. Kleinste Entfernung zwischen zwei Punkten auf zwei gegebenen Geraden. Sind die beiden Kurven, die wir uns in Nr. 160 gegeben dachten, zwei Geraden im Raume, so sind y und z lineare ganze Funktionen von x und ebenso y' und z' lineare ganze Funktionen von x'. Es sei also:

$$(1)\qquad \begin{cases} y = bx + \beta, & z = cx + \gamma; \\ y' = b'x' + \beta', & z' = c'x' + \gamma'. \end{cases}$$

Alsdann wird $dy:dx = b$, $dz:dx = c$, $dy':dx' = b'$, $dz':dx' = c'$, während die zweiten Ableitungen von y und z nach x und von y' und z' nach x' gleich Null sind. Berechnen wir die Werte (3) in Nr. 160 und setzen wir sie in (5) ein, so kommt:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\frac{\partial^2 V}{\partial x'^2} - \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x\, \partial x'}\right)^2 = 4\left[(b-b')^2 + (c-c')^2 + (bc'-cb')^2\right].$$

Die Bedingung (5) wird daher erfüllt, wenn nicht $b = b'$ und $c = c'$ ist, d. h. *wenn die beiden gegebenen Geraden einander nicht parallel sind.* Außerdem wird dann $\partial^2 V:\partial x^2 = 2(1 + b^2 + c^2) > 0$, so daß ein *Minimum* eintritt. Die Bedingungen (4) sind hier:

$$(x - x') + (y - y')b + (z - z')c = 0,$$
$$(x - x') + (y - y')b' + (z - z')c' = 0.$$

Hiernach ist

$$(2)\quad x - x' = k(bc' - cb'),\ y - y' = k(c - c'),\ z - z' = -k(b - b')$$

zu setzen, wo k noch zu bestimmen ist. Zunächst folgt hieraus für das Quadrat der kürzesten Entfernung:

$$V = k^2\left[(b-b')^2 + (c-c')^2 + (bc'-cb')^2\right].$$

Um k zu bestimmen, setzen wir die Werte (1) in (2) ein. Alsdann gehen drei in x, x', k lineare Gleichungen hervor, aus denen sich ergibt:

$$k = \frac{(\beta-\beta')(c-c') - (\gamma-\gamma')(b-b')}{(b-b')^2 + (c-c')^2 + (bc'-cb')^2}.$$

Also ist

$$V = \frac{\left[(\beta-\beta')(c-c') - (\gamma-\gamma')(b-b')\right]^2}{(b-b')^2 + (c-c')^2 + (bc'-cb')^2}$$

das Quadrat des kürzesten Abstandes zwischen zwei Punkten der beiden Geraden (1). Das Verschwinden des Zählers von V ist die Bedingung dafür, daß die beiden Geraden (1) einander schneiden.

162. Größte und kleinste Entfernungen eines Punktes von den Punkten einer Fläche. Es seien a, b, c die rechtwinkligen Koordinaten eines gegebenen Punktes P und x, y, z die Koordinaten eines Punktes M einer gegebenen Fläche. Das Quadrat der Entfernung dieser beiden Punkte ist

$$V = (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2.$$

Weil der Punkt M oder (x, y, z) auf einer gegebenen Fläche liegt, so ist z eine gegebene Funktion von x und y[1]), also V eine zusammengesetzte Funktion von nur zwei unabhängigen Veränderlichen x und y. Wir verstehen wie in Nr. 85 unter p, q die partiellen Ableitungen erster Ordnung von z nach x und y und unter r, s, t die zweiter Ordnung, so daß

$$dz = p\,dx + q\,dy, \quad dp = r\,dx + s\,dy, \quad dq = s\,dx + t\,dy$$

ist. Nun kommt

$$(1) \qquad \begin{cases} \frac{1}{2}V_x = (x-a) + p(z-c), \\ \frac{1}{2}V_y = (y-b) + q(z-c); \end{cases}$$

$$(2) \qquad \begin{cases} \frac{1}{2}V_{xx} = 1 + p^2 + r(z-c), \\ \frac{1}{2}V_{xy} = pq + s(z-c), \\ \frac{1}{2}V_{yy} = 1 + q^2 + t(z-c). \end{cases}$$

Mit Benutzung der Abkürzungen

$$(3) \qquad \begin{cases} A = rt - s^2, \\ B = (1+q^2)r - 2pqs + (1+p^2)t, \\ C = 1 + p^2 + q^2, \end{cases}$$

ergibt sich:

$$\frac{1}{4}(V_{xx}V_{yy} - V_{xy}^2) = A(z-c)^2 + B(z-c) + C.$$

Die erste notwendige Bedingung $dV = 0$ des Maximums oder Minimums von V gibt nach (1):

$$(4) \qquad \begin{cases} (x-a) + p(z-c) = 0, \\ (y-b) + q(z-c) = 0. \end{cases}$$

1) Wir werden im 9. und 10. Kapitel ausführlich über Flächen sprechen.

Diese beiden Gleichungen zusammen mit der Gleichung der Fläche selbst bestimmen die Koordinaten x, y, z derjenigen Punkte M der Fläche, die von dem gegebenen Punkte P größte oder kleinste Entfernung haben können.[1]) Ein Maximum oder Minimum kann nach Satz 3, Nr. 154, überhaupt nur dann vorhanden sein, wenn

$$(5) \qquad A(z-c)^2 + B(z-c) + C \geqq 0$$

ist. Wir bestimmen nun zunächst eine Größe Z derart, daß

$$(6) \qquad A(z-Z)^2 + B(z-Z) + C = 0$$

wird. Die Wurzeln Z dieser quadratischen Gleichung sind reell, denn die Diskriminante der Gleichung ist positiv, nämlich

$$B^2 - 4AC = [(1+q^2)r - 2pqs + (1+p^2)t]^2 - 4(1+p^2+q^2)(rt-s^2)$$
$$= (1+p^2)(1+q^2)p^2q^2\left[\frac{2s}{pq} - \frac{r}{1+p^2} - \frac{t}{1+q^2}\right]^2$$
$$+ (1+p^2+q^2)(1+p^2)(1+q^2)\left[\frac{r}{1+p^2} - \frac{t}{1+q^2}\right]^2.$$

Sind nun z' und z'' die Wurzeln Z von (6), so wird die linke Seite dieser Gleichung für *alle* Werte von Z gleich

$$A(z'-Z)(z''-Z),$$

also auch für $Z = c$, und folglich wird, wenn man für A seinen Wert aus (3) einsetzt, die Bedingung (5):

$$(7) \qquad (rt-s^2)(z'-c)(z''-c) \geqq 0.$$

Bezeichnen wir mit K' und K'' diejenigen beiden Punkte[2]) der Geraden PM, deren z-Koordinaten gleich z' und z'' sind, so sagt die Bedingung (7): Wenn

$$rt - s^2 > 0$$

ist, darf der Punkt P nicht zwischen den Punkten K' und K'' gelegen sein. Dagegen muß, wenn

$$rt - s^2 < 0$$

ist, der Punkt P zwischen K' und K'' liegen. Fällt P mit

1) Wir werden in Nr. 253 sehen: Die Bedingungen (4) sagen aus, daß der gegebene Punkt P auf der *Normale* liegen muß, die der gegebenen Fläche im gesuchten Punkte M zukommt.

2) Aus Nr. 317 kann man erkennen, daß K' und K'' die beiden *Hauptkrümmungsmittelpunkte* des Flächenpunktes M sind.

K' oder K'' zusammen, so bleibe es dahingestellt, ob ein Maximum oder Minimum vorhanden ist.

Es ist noch die Entscheidung über das Maximum oder Minimum zu treffen. Ist die Bedingung (5) erfüllt und der Fall der Gleichheit ausgeschlossen, ist also $V_{xx} V_{yy} - V_{xy}^2 > 0$, so hat die quadratische Gleichung für u:

$$V_{xx} u^2 - 2 V_{xy} u + V_{yy} = 0$$

keine reelle Lösung, d. h., wenn wir u durch $q:p$ ersetzen, folgt, daß die Größe:

$$q^2 V_{xx} - 2\, qp\, V_{xy} + p^2 V_{yy}$$

für kein Wertepaar p, q gleich Null ist, außer für $p = q = 0$, und daher dasselbe Vorzeichen wie V_{xx} oder V_{yy} hat. Die Summe aller drei Größen wird nun:

$$(1 + q^2) V_{xx} - 2 qp V_{xy} + (1 + p^2) V_{yy}$$

und ist daher im Falle $V_{xx} > 0$ bzw. < 0 ebenfalls > 0 bzw. < 0, so daß nach Satz 3 in Nr. 154 ein Maximum oder Minimum eintritt, je nachdem diese Summe negativ oder positiv wird. Wegen der Werte (2) und (3) ist die Summe das Doppelte von $B(z - c) + 2C$. Also tritt ein Maximum oder Minimum ein, je nachdem

$$B(z - c) + 2C < 0 \quad \text{oder} \quad > 0$$

wird. Die Gleichung (6) aber, deren Wurzeln $Z = z'$ und $Z = z''$ sind, gibt:

$$(8) \qquad \frac{B}{A} = -(z - z') - (z - z''), \qquad \frac{C}{A} = (z - z')(z - z''),$$

so daß

$$B(z - c) + 2C = \left(\frac{c - z'}{z - z'} + \frac{c - z''}{z - z''}\right) C$$

wird. Weil C nach (3) größer als Eins ist, so folgt also: Es tritt ein Maximum oder Minimum ein, je nachdem:

$$(9) \qquad \frac{c - z'}{z - z'} + \frac{c - z''}{z - z''} < 0 \quad \text{oder} \quad > 0$$

ist. Die zweite Gleichung (8) lehrt ferner wegen $C > 1$ und $A = rt - s^2$: Es wird

$$(10) \quad (z - z')(z - z'') \gtrless 0, \quad \text{je nachdem} \quad rt - s^2 \gtrless 0 \quad \text{ist.}$$

162]

Nehmen wir nun zunächst $rt - s^2 > 0$ an, so haben $z - z'$ und $z - z''$ dasselbe Zeichen. Außerdem haben dann nach (7) auch $z' - c$ und $z'' - c$ dasselbe Zeichen, indem P nicht zwischen K' und K'' liegt. Die Punkte P und M liegen also nicht auf der Strecke $K'K''$ selbst, sondern auf ihren Verlängerungen. Da c, z, z', z'' die Koordinaten von P, M, K', K'' sind, so lehrt (9), daß ein *Maximum* eintritt, *wenn P und M auf den beiden verschiedenen Verlängerungen der Strecke $K'K''$ liegen*, dagegen ein *Minimum*, *wenn sie auf derselben Verlängerung dieser Strecke liegen.*

Nehmen wir zweitens $rt - s^2 < 0$ an, so haben $z - z'$ und $z - z''$ verschiedene Zeichen, nach (10). Außerdem haben nach (7) auch $z' - c$ und $z'' - c$ verschiedene Zeichen. *Sowohl P als auch M liegen daher jetzt zwischen K' und K''.* Die in (9) stehende Summe ist hier stets positiv, d. h. es tritt ein *Minimum* ein.

Ist drittens $rt - s^2 = 0$, also $A = 0$, so reduziert sich die Bedingung (5), wenn wir wieder vom Falle der Gleichheit absehen, auf

$$B(z - c) + C > 0.$$

Dann wird aber auch, da $C > 1$ ist, $B(z - c) + 2C > 0$, d. h. dann tritt ein *Minimum* ein. In diesem Falle hat die quadratische Gleichung (6), da sie sich auf eine lineare Gleichung reduziert, nur eine Lösung z', so daß nur ein Punkt K' vorhanden ist. (Den anderen, K'', mag man sich unendlich fern auf der Geraden PM denken.) Es wird dann $B(z - z') + C = 0$, also $B = -C : (z - z')$, so daß die Bedingung (5) hier, weil $C > 1$ ist, lautet:

$$\frac{c - z'}{z - z'} > 0.$$

Also muß P auf derselben Seite von K' liegen wie M.

Ist endlich für den Punkt M nicht nur $A = 0$, sondern auch $B = 0$, so wird die Bedingung (5):

$$C > 0.$$

Sie ist nach (3) immer erfüllt. Bei dieser Annahme aber hat man:

$$rt - s^2 = 0, \quad (1 + q^2)r - 2pqs + (1 + p^2)t = 0.$$

Multipliziert man die zweite Gleichung mit r und subtrahiert von ihr das $(1+p^2)$-fache der ersten, so kommt:

$$r^2 + s^2 + (rq - sp)^2 = 0,$$

folglich

$$r = 0, \quad s = 0, \quad t = 0.$$

Da jetzt V_{xx} nach (2) positiv ist, so tritt ein *Minimum* ein. In dem jetzigen Falle ist keiner der beiden Punkte K' und K'' vorhanden.

163. Ein Ausnahmefall. Bei der Untersuchung der Maxima und Minima betrachteten wir nur solche Stellen, an denen die partiellen Ableitungen erster Ordnung der Funktionen stetig waren. Es kann sich aber auch in anderen Fällen ein Maximum oder Minimum der Funktion ergeben, z. B. an einer solchen Stelle, an der jene Ableitungen gänzlich unbestimmt werden. Hierfür diene als Beleg die Lösung der folgenden einfachen geometrischen Aufgabe:

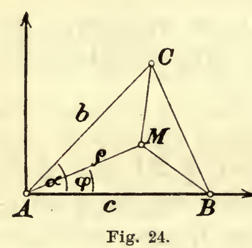


Fig. 24.

Es soll in der Ebene eines gegebenen Dreiecks derjenige Punkt bestimmt werden, für den die Summe der Entfernungen von den Eckpunkten des Dreiecks ein Minimum wird. Siehe Fig. 24.

Die Seite AB des Dreieckes ABC wählen wir zur x-Achse und die dazu Senkrechte durch A zur y-Achse. Die Länge der Seite AB sei c, die Koordinaten des Punktes C seien x_0, y_0 und die des gesuchten Punktes M seien x, y. Die Funktion von x und y, deren Minimum gesucht wird, ist dann:

$$\sqrt{x^2+y^2} + \sqrt{(x-c)^2+y^2} + \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2},$$

wo alle drei Wurzeln mit dem Pluszeichen zu nehmen sind. Es ist geometrisch einleuchtend, daß ein Minimum vorhanden sein muß.

Setzt man die partiellen Ableitungen der Funktion gleich Null, so hat man die zwei Gleichungen:

$$(1) \qquad \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{x-c}{\sqrt{(x-c)^2+y^2}} + \frac{x-x_0}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}} = 0,$$

$$(2) \qquad \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{y}{\sqrt{(x-c)^2+y^2}} + \frac{y-y_0}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}} = 0,$$

die in den laufenden Koordinaten x, y zwei Kurven darstellen, deren Schnitt den gesuchten Punkt M liefert. An Stelle dieser Kurven kann man aber zwei andere einfachere setzen. Zu dem Zwecke bezeichnen wir mit φ, χ, ψ die Winkel, die von AM, BM, CM mit der positiven Abszissenachse gebildet werden. Jeder dieser Winkel ist zu betrachten als erzeugt durch einen Strahl, der zunächst parallel zur positiven x-Achse durch den Punkt A oder B oder C gelegt ist und sich dann um A oder B oder C nach der positiven Ordinatenachse hin soweit dreht, bis er durch M geht. Es kommt:

$$\cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \qquad \sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

$$\cos\chi = \frac{x-c}{\sqrt{(x-c)^2+y^2}}, \qquad \sin\chi = \frac{y}{\sqrt{(x-c)^2+y^2}},$$

$$\cos\psi = \frac{x-x_0}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}}, \quad \sin\psi = \frac{y-y_0}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}}.$$

Die Wurzeln sind sämtlich positiv. Wenn nun ein Punkt (x, y) existiert, der die Gleichungen (1) und (2) befriedigt, so bestehen also für ihn die Gleichungen:

$$\cos\varphi + \cos\chi + \cos\psi = 0,$$

$$\sin\varphi + \sin\chi + \sin\psi = 0$$

oder

$$\cos\varphi + \cos\chi = -\cos\psi, \quad \sin\varphi + \sin\chi = -\sin\psi.$$

Quadriert man diese Gleichungen und addiert dann, so folgt:

$$(\cos\varphi + \cos\chi)^2 + (\sin\varphi + \sin\chi)^2 = 1$$

oder

$$\cos(\chi - \varphi) = -\tfrac{1}{2}.$$

Also ist $\chi - \varphi = \sphericalangle\, AMB = 120^0$. Ebenso ergibt sich $\sphericalangle\, BMC = 120^0$, $\sphericalangle\, CMA = 120^0$. Hieraus folgt, daß der Punkt M der Durchschnitt von drei Kreissegmenten ist, von denen jedes über einer Dreiecksseite, einen Winkel von 120^0 fassend, beschrieben ist. Die Kreise, die zu zweien dieser Segmente gehören, können also an die Stelle der durch die Gleichungen (1) und (2) dargestellten Kurven treten. Damit sich aber diese drei Kreise wirklich schneiden, ist notwendig und hinreichend, daß alle Winkel des Dreieckes kleiner als 120^0 sind.

Ist in dem Dreiecke ein Winkel größer als 120^0, so liefern also die Gleichungen (1) und (2) keine Bestimmung des Minimums, obgleich es sicher vorhanden ist. Die linken Seiten dieser Gleichungen sind aber nicht mehr bestimmt, wenn man x und y durch die Koordinaten einer Dreiecksecke ersetzt; folglich kann dann der gesuchte Punkt nur ein Eckpunkt sein. Dies wollen wir jetzt auch analytisch beweisen, indem wir andere Koordinaten einführen.

Wir benutzen Polarkoordinaten für M, nämlich den Winkel φ von AM mit der positiven x-Achse und den Radiusvektor $\varrho = AM$. Ist $AC = b$ und $\sphericalangle BAC = \alpha$, so ist alsdann die Summe der Entfernungen des Punktes M von A, B und C:

$$S = \varrho + \sqrt{c^2 + \varrho^2 - 2c\varrho\cos\varphi} + \sqrt{b^2 + \varrho^2 - 2b\varrho\cos(\alpha - \varphi)},$$

wo ϱ stets positiv ist und auch die Wurzeln positiv zu nehmen sind. Wie nahe auch M bei A liegen mag, der Winkel φ kann dabei noch ganz beliebige Werte haben. Liegt M in A, so ist $\varrho = 0$. Also haben wir zu untersuchen, ob diese Funktion S für $\varrho = 0$ in der Tat ein Minimum hat und zwar für *alle* Werte von φ. Es liegt also die Aufgabe vor, zu untersuchen, ob eine Funktion S *von einer einzigen Veränderlichen* ϱ, die stets positiv ist, für $\varrho = 0$ ein *Grenzminimum* hat (vgl. Nr. 148), wobei die Funktion noch eine willkürlich wählbare Größe φ enthält. Es kommt:

$$\frac{dS}{d\varrho} = 1 + \frac{\varrho - c\cos\varphi}{\sqrt{c^2 + \varrho^2 - 2c\varrho\cos\varphi}} + \frac{\varrho - b\cos(\alpha - \varphi)}{\sqrt{b^2 + \varrho^2 - 2b\varrho\cos(\alpha - \varphi)}},$$

also für $\varrho = 0$:

$$\left(\frac{dS}{d\varrho}\right)_{\varrho = 0} = 1 - \cos\varphi - \cos(\alpha - \varphi) = 1 - 2\cos\tfrac{1}{2}\alpha\cos(\tfrac{1}{2}\alpha - \varphi).$$

Ist α kleiner als 120^0, so wird $2\cos\frac{1}{2}\alpha$ größer als Eins. Der Winkel φ kann dann so gewählt werden, daß entweder

$$\cos(\tfrac{1}{2}\alpha - \varphi) < \frac{1}{2\cos\frac{1}{2}\alpha} \quad \text{oder} \quad \cos(\tfrac{1}{2}\alpha - \varphi) > \frac{1}{2\cos\frac{1}{2}\alpha}$$

wird, d. h. daß $dS : d\varrho$ für $\varrho = 0$ entweder positiv oder negativ ist, S also von demjenigen Werte an, den es für $\varrho = 0$ hat, mit wachsendem φ entweder zu- oder abnimmt, so daß dann für $\varrho = 0$ *weder ein Maximum noch ein Minimum* vorliegt.

163]

Ist jedoch α größer als 120^0, so wird $2\cos\frac{1}{2}\alpha$ kleiner als Eins, also auch, da $\cos(\frac{1}{2}\alpha - \varphi)$ Eins nicht übersteigt, $dS:d\varrho$ für $\varrho = 0$ stets positiv, wie auch φ gewählt sein mag. Dann liegt also für $\varrho = 0$ tatsächlich ein *Minimum* vor.

Ist α gerade gleich 120^0, so gibt es zwar Winkel φ, für die $dS:d\varrho$ im Falle $\varrho = 0$ gerade gleich Null ist, aber keine Winkel φ, für die es negativ wäre. Es gibt dann zwar in der Umgebung von A Stellen M, für die S denselben Wert hat, wie an der Stelle A selbst, dagegen keine, für die S dort kleiner wäre als an der Stelle A.

164. Extremwerte einer unentwickelten Funktion von mehreren Veränderlichen. Es mögen m Gleichungen zwischen $m+n$ Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots x_n, y_1, y_2, \ldots y_m$ vorliegen:

$$(1) \qquad f_k(x_1, x_2, \ldots x_n, y_1, y_2, \ldots y_m) = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots m).$$

Die Funktionen $f_1, f_2, \ldots f_m$ seien voneinander unabhängig hinsichtlich $y_1, y_2, \ldots y_m$, d. h. es sei die Funktionaldeterminante

$$\Delta = \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & \cdots & f_m \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_m \end{pmatrix} \neq 0,$$

vgl. Satz 4, Nr. 80. Setzen wir ferner voraus, daß die Forderung $\mathfrak{C}$ in Nr. 77 erfüllt sei, so definieren die Gleichungen (1) nach Satz 3 in Nr. 79 die Größen $y_1, y_2, \ldots y_m$ als Funktionen der n unabhängigen Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots x_n$ mit stetigen partiellen Ableitungen erster Ordnung innerhalb eines gewissen Variabilitätsbereiches von $x_1, x_2, \ldots x_n$. Wir stellen uns alsdann die Aufgabe, diejenigen Werte von $x_1, x_2, \ldots x_n$ zu finden, für die irgend eine der m Funktionen $y_1, y_2, \ldots y_m$, z. B. y_i, ein Maximum oder Minimum haben *kann*, indem wir nach Satz 2 in Nr. 153 verlangen, daß für die gesuchten Werte $x_1, x_2, \ldots x_n$

$$\frac{\partial y_i}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial y_i}{\partial x_2} = 0, \quad \cdots \quad \frac{\partial y_i}{\partial x_n} = 0 \quad \text{oder} \quad dy_i = 0$$

werde. Nach (1) ist

$$\frac{\partial f_k}{\partial x_1} dx_1 + \cdots + \frac{\partial f_k}{\partial x_n} dx_n + \frac{\partial f_k}{\partial y_1} dy_1 + \cdots + \frac{\partial f_k}{\partial y_m} dy_m = 0$$
$$(k = 1, 2, \cdots m).$$

Diese m Gleichungen sind nach $dy_1, dy_2, \ldots dy_n$ auflösbar, da die Determinante $\Delta \neq 0$ ist. Insbesondere ergeben sie

$$dy_i = -\frac{\Delta_i}{\Delta},$$

wo Δ_i diejenige Determinante bedeutet, die aus der Determinante Δ hervorgeht, wenn darin die m Glieder

$$\frac{\partial f_1}{\partial y_i}, \quad \frac{\partial f_2}{\partial y_i}, \ldots \frac{\partial f_m}{\partial y_i}$$

durch die m Größen

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} dx_1 + \cdots + \frac{\partial f_1}{\partial x_n} dx_n, \quad \ldots\ldots, \quad \frac{\partial f_m}{\partial x_1} dx_1 + \cdots + \frac{\partial f_m}{\partial x_n} dx_n$$

ersetzt werden. Es ist also Δ_i linear und homogen in dx_1, $dx_2, \ldots dx_n$. Nun muß dy_i für das gesuchte Wertsystem $x_1, x_2, \ldots x_n$ und für alle Werte der unabhängigen Differentiale $dx_1, dx_2, \ldots dx_n$ gleich Null sein. Also sind die n Koeffizienten von $dx_1, dx_2, \ldots dx_n$ in Δ_i einzeln gleich Null zu setzen. So gehen n Bedingungen hervor, die zusammen mit den m gegebenen Gleichungen (1) gerade $n + m$ Gleichungen in x_1, $x_2, \ldots x_n, y_1, y_2, \ldots y_m$ ausmachen, aus denen die gesuchten Werte von $x_1, x_2, \ldots x_n$ zu bestimmen sind.

Ob aber für ein solches Wertsystem $x_1, x_2, \ldots x_n$ wirklich ein Maximum oder Minimum von y_i eintritt, steht noch dahin.

165. Nebenbedingungen. Die letzte Betrachtung umfaßt auch folgenden Fall: Es sei $u = F(x_1, x_2, \ldots x_n)$ eine gegebene entwickelte Funktion der n Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots x_n$, die ihrerseits nicht voneinander unabhängig, sondern etwa r $(< n)$ voneinander unabhängigen Bedingungen:

$$(1) \qquad \varphi_k(x_1, x_2, \ldots x_n) = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots r)$$

unterworfen seien. Die Frage ist, für welche erlaubte Werte von $x_1, x_2, \ldots x_n$ ein Maximum oder Minimum der Funktion F möglich ist. Es liegen insgesamt $r + 1$ voneinander unabhängige Gleichungen

$$(2) \qquad \varphi_1 = 0, \quad \varphi_2 = 0, \quad \ldots \quad \varphi_r = 0, \quad u - F = 0$$

in den $n + 1$ Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots x_n$ und u vor, also gerade so wie in voriger Nummer m Gleichungen in $m + n$

Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots x_n, y_1, y_2, \ldots y_m$. Sie definieren $r+1$ der Veränderlichen — darunter u — als Funktionen der übrigen. Gefragt wird nach den Extremwerten von u. Wir können mithin das Verfahren der vorigen Nummer anwenden, wollen es aber hier in eine etwas andere Form bringen.

Da $du = 0$ sein soll, so geben die $r+1$ Gleichungen (2) die $r+1$ Bedingungen:

$$(3)\quad \begin{cases} \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_2} dx_2 + \cdots + \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_n} dx_n = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots r), \\ \frac{\partial F}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial F}{\partial x_2} dx_2 + \cdots + \frac{\partial F}{\partial x_n} dx_n = 0. \end{cases}$$

Aus ihnen müssen, weil nur $n-r$ Veränderliche voneinander unabhängig sind, also auch r der Differentiale von den übrigen abhängen, insgesamt r der Differentiale $dx_1, \ldots dx_n$ eliminiert werden. Die verbleibende Gleichung soll alsdann für alle Werte der übrig gebliebenen $n-r$ Differentiale bestehen. Mithin müssen sämtliche Koeffizienten der Differentiale in dieser einen Gleichung gleich Null gesetzt werden, wodurch die $n-r$ Bedingungen der Lösung hervorgehen.

Um etwas Bestimmtes ins Auge zu fassen, nehmen wir an, $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_r$ seien etwa hinsichtlich $x_1, x_2, \ldots x_r$ voneinander unabhängig, d. h. nach Satz 4, Nr. 80, sei die Funktionaldeterminante:

$$\begin{pmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 & \cdots & \varphi_r \\ x_1 & x_2 & \ldots & x_r \end{pmatrix} \neq 0.$$

Alsdann lassen sich $dx_1, dx_2, \ldots dx_r$ aus den r ersten Gleichungen (3) berechnen und in die letzte Gleichung einsetzen, wodurch $dx_1, dx_2, \ldots dx_r$ eliminiert werden. Das Eliminationsverfahren können wir uns so ausgeführt denken: Wir multiplizieren die r ersten Gleichungen (3) mit Faktoren $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_r$ und addieren sie dann zur letzten Gleichung (3). Dabei können wir uns die Größen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_r$ so gewählt denken, daß $dx_1, dx_2, \ldots dx_r$ in der hervorgehenden Gleichung fehlen. Weil nun aber die Koeffizienten von $dx_{r+1}, dx_{r+2}, \ldots dx_n$ in der hervorgehenden Gleichung gleich Null gesetzt werden sollen, so müssen nicht nur die Koeffizienten von $dx_1, dx_2, \ldots dx_r$, sondern die *aller* n Differentiale $dx_1, dx_2, \ldots dx_n$ in der durch

jene Addition aus (3) hervorgehenden Gleichung gleich Null gesetzt werden. Mithin ergeben sich die n Bedingungen:

$$(4) \qquad \frac{\partial F}{\partial x_i} + \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_i} + \lambda_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_i} + \cdots + \lambda_r \frac{\partial \varphi_r}{\partial x_i} = 0$$

$$(i = 1, 2, \ldots n).$$

Wenn man aus ihnen die r unbekannten Größen λ_1, $\lambda_2, \ldots \lambda_r$ eliminiert, so gehen die Bedingungen hervor, die zwischen $x_1, x_2, \ldots x_n$ bestehen müssen für solche Stellen, wo die vorgelegte Funktion F ein Maximum oder Minimum haben *kann*.

Durch die Anwendung der Faktoren $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_r$ ist die Elimination symmetrisch geworden, denn in den Gleichungen (4) sind jetzt die r Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots x_r$ nicht mehr gegenüber den $n - r$ anderen bevorzugt. Dieselben Gleichungen gehen also auch hervor, wenn $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_r$ nicht gerade hinsichtlich $x_1, x_2, \ldots x_r$, sondern hinsichtlich irgend welcher r der n Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots x_n$ voneinander unabhängig sind.

166. Andere Formulierung der Aufgabe mit Nebenbedingungen. Die soeben gegebene Behandlung des Problems hat noch ein anderes Interesse:

Stellen wir uns einmal vor, es sei die Funktion

$$f = F + \lambda_1 \varphi_1 + \lambda_2 \varphi_2 + \cdots + \lambda_r \varphi_r$$

von $n + r$ *unabhängigen* Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots x_n, \lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_r$ gegeben, in der $F, \varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_r$ von den r Veränderlichen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_r$ frei sind. Alsdann fragen wir, für welche Wertsysteme der $n + r$ Veränderlichen die Funktion F ein Maximum oder Minimum haben *kann*. Nach Satz 2 in Nr. 153 ist einzeln zu fordern:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = 0, \cdots \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial \lambda_1} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial \lambda_2} = 0, \cdots \frac{\partial f}{\partial \lambda_r} = 0.$$

Die ersten n Gleichungen sind gerade die Bedingungen (4) der vorigen Nummer und die letzten r Gleichungen sind die in voriger Nummer vorausgesetzten Bedingungen $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0, \cdots \varphi_r = 0$. Mithin ergibt sich:

Satz 7: Liegt eine Funktion $F(x_1, x_2, \ldots x_n)$ *von* n *Veränderlichen* $x_1, x_2, \ldots x_n$ *vor und bestehen zwischen den Veränderlichen* r $(< n)$ *Bedingungen:*

$$\varphi_1 = 0, \quad \varphi_2 = 0, \cdots \varphi_r = 0,$$

so findet man diejenigen Werte der Veränderlichen, für die F *ein Maximum oder Minimum haben kann, genau so, als ob die Aufgabe vorläge, diejenigen Werte der* $n + r$ *voneinander unabhängigen Veränderlichen* $x_1, x_2, \ldots x_n, \lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_r$ *zu finden, für die die Funktion*

$$F + \lambda_1 \varphi_1 + \lambda_2 \varphi_2 + \cdots + \lambda_r \varphi_r$$

von $x_1, x_2, \ldots x_n, \lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_r$ *ein Maximum oder Minimum haben kann.*

In manchen Fällen ist es jedoch zweckmäßiger, die Funktion F von vornherein als entwickelte, aber zusammengesetzte Funktion von nur $n - r$ Veränderlichen aufzufassen, indem man die übrigen r Veränderlichen als Funktionen von jenen betrachtet. So verfuhren wir z. B. in Nr. 160—163.

Siebentes Kapitel.

Theorie der ebenen Kurven.

---

§ 1. Kurve, Tangenten und Normalen.

167. Über den Begriff der Kurve. Unter einer ebenen Kurve verstehen wir den Inbegriff aller Bildpunkte (x, y) einer Funktion $y = f(x)$, die in einem Variabilitätsbereiche der Veränderlichen x überall stetig ist und überall eine bestimmte endliche Ableitung $f'(x)$ hat. Gelegentlich werden wir diese Definition zweckmäßig abändern.

Unter den gemachten Voraussetzungen gehört zu jedem Werte von x innerhalb des Variabilitätsbereiches ein Kurvenpunkt (x, y), ferner bilden alle Kurvenpunkte wegen der Stetigkeit von $f(x)$ eine lückenlose Kette, und drittens hat die Gerade, die durch einen bestimmt gewählten Kurvenpunkt M_0 und einen anderen Kurvenpunkt M geht, eine Grenzlage, wenn die Abszisse x von M in die Abszisse x_0 von M_0 übergeht. Diese Grenzlage ist die *Tangente* des Kurvenpunktes M_0, vgl. Nr. 27 und 32.

Es gibt Funktionen $y = f(x)$, die in einem Variabilitätsbereiche überall stetig sind und doch nirgends eine bestimmte endliche Ableitung haben. Ihre Bildpunkte (x, y) bilden also zwar lückenlose Ketten, diese haben jedoch nirgends Tangenten, weshalb wir sie auch nicht als Kurven bezeichnen.

Wir werden in der Folge öfters kurz sagen, eine Funktion $f(x)$ sei in einem Bereiche *differenzierbar*, sobald sie dort überall eine bestimmte endliche Ableitung hat. Benutzen wir diese Ausdrucksweise, so fassen wir das Gesagte so zusammen: Wir müssen von Funktionen $y = f(x)$, die wirklich solche

Bilder haben sollen, die man Kurven zu nennen pflegt, *nicht nur Stetigkeit, sondern auch Differenzierbarkeit verlangen.*

168. Analytische Darstellung einer ebenen Kurve. Ist $f(x)$ eine innerhalb des Intervalles $a < x < b$ *stetige und differenzierbare* Funktion, so stellt die Gleichung

$$y = f(x) \tag{1}$$

analytisch eine Kurve dar, besser gesagt, einen *Kurvenzweig,* denn es kann sehr wohl sein, daß verschiedene Teile einer geometrisch definierten Kurve durch verschiedene Funktionen analytisch ausgedrückt werden. Jede Gerade, die zur y-Achse parallel ist und deren Abszisse im Intervalle von a bis b liegt, hat mit diesem Kurvenzweige einen und nur einen Punkt gemein. Liegt *allgemeiner* eine nicht nach y aufgelöste Gleichung

$$F(x, y) = 0 \tag{2}$$

vor, die y als stetige und differenzierbare Funktion von x innerhalb eines Variabilitätsbereiches $a < x < b$ definiert, so kann sie ebenfalls zur analytischen Darstellung eines Kurvenzweiges benutzt werden.

Wir können auch, wie es schon in Nr. 93 angedeutet wurde, eine *Hilfsveränderliche* oder einen *Parameter* t heranziehen: Es sei nämlich $\varphi(t)$ irgend eine solche innerhalb des Intervalles $\alpha < t < \beta$ stetige und differenzierbare Funktion von t, die, sobald t von α bis β wächst, alle Werte von a bis b gerade einmal annimmt. Alsdann können wir in (1) für x diese Funktion $\varphi(t)$ setzen; variiert nämlich t von α bis β, so geht $x = \varphi(t)$ von a bis b, und infolge von (1) wird: $y = f(\varphi(t))$, d. h. eine Funktion $\psi(t)$, die in dem Bereiche $\alpha < t < \beta$ stetig und differenzierbar ist, indem $\psi' = f'(\varphi) \cdot \varphi'$ ihre Ableitung ist. Wir kommen so zu dieser Darstellung einer Kurve:

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \tag{3}$$

wo φ und ψ stetige und differenzierbare Funktionen von t innerhalb eines Variabilitätsbereiches $\alpha < t < \beta$ bedeuten sollen.

Sind *umgekehrt* φ und ψ zwei im Intervalle $\alpha < t < \beta$ stetige und differenzierbare Funktionen von t und nimmt $\varphi(t)$, wenn t von α bis β wächst, alle Werte von a bis b gerade einmal an, so ist t die zu $x = \varphi(t)$ inverse Funktion von x

(vgl. Nr. 10), etwa $t = \Phi(x)$, die alle Werte von α bis β gerade einmal annimmt, wenn x alle Werte von a bis b durchläuft. Sie ist stetig und differenzierbar, wenn wir t auf ein solches Intervall beschränken, in dem $\varphi'(t)$ nirgends verschwindet, vgl. Satz 18 in Nr. 37, so daß, wenn wir $t = \Phi(x)$ in die zweite Gleichung (3) einsetzen, eine Darstellung der Kurve in der Form $y = \psi(\Phi(x))$ hervorgeht, die sich der ersten Form (1) unterordnet. Lassen wir auch Stellen zu, an denen $\varphi'(t) = 0$ wird, so sagen wir immer noch, daß die Gleichungen (3) eine Kurve (oder einen Kurvenzweig) definieren. Jedoch alsdann kann eine Parallele zur Abszissenachse diese Kurve sehr wohl in zwei oder noch mehr Punkten treffen.

169. Gleichung der Tangente und Normale. Ist eine Kurve in der Form (1) der vorigen Nummer vorgelegt, so bildet die Tangente desjenigen Kurvenpunktes M, dessen Abszisse x ist, mit der x-Achse einen gewissen Winkel τ, von dem wir zwar schon wissen, daß sein Tangens den Wert $f'(x)$ hat, über dessen scharfe Definition aber hier noch etwas nachgetragen werden muß: Wir denken uns die Kurve im Sinne *zunehmender* Abszissen x durchlaufen. Der Tangente geben wir dementsprechend diejenige *positive* Richtung, nach der ein Punkt auf der Tangente hinwandert, wenn seine Abszisse wächst, siehe Fig. 25.

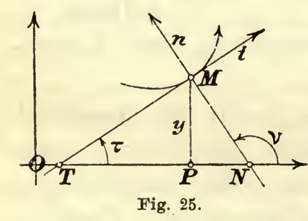


Fig. 25.

Alsdann soll τ der Winkel der positiven x-Achse und positiven Tangente sein. In dem Drehsinne von der positiven x-Achse zur positiven y-Achse hin gemessen ist er positiv, im entgegengesetzten Sinne negativ, so daß τ bis auf ganze Vielfache von 2π völlig bestimmt ist. Man kann, wenn man will, dem *Tangentenwinkel* τ überhaupt die Beschränkung $-\frac{1}{2}\pi \leqq \tau \leqq +\frac{1}{2}\pi$ auferlegen, braucht dies aber nicht zu tun. Man sieht, daß $\cos\tau$ stets positiv ist, weil der zwischen der positiven Achse und der positiven Tangente gelegene Winkel stets spitz ist. Da $\operatorname{tg}\tau = f'(x) = y'$ ist, so gelten die Formeln:

$$(1) \qquad \sin\tau = \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}, \quad \cos\tau = \frac{1}{\sqrt{1+y'^2}}, \quad \operatorname{tg}\tau = y',$$

in denen die Quadratwurzel das Pluszeichen hat.

Die Senkrechte zur Tangente durch den Berührungspunkt M heißt die *Normale* der Kurve in M (vgl. Nr. 40). Ihr geben wir ebenfalls einen positiven Sinn. Wir drehen nämlich die positive Tangente in positivem Sinne (d. h. von der positiven x-Achse zur positiven y-Achse hin) um einen rechten Winkel um M herum, wodurch die positive Normale hervorgehen soll. Ist ν der Winkel, den die positive x-Achse beschreiben muß, um in diese Normale überzugehen, der sogenannte *Normalenwinkel*, so kommt also:

$$\nu = \tau + \tfrac{1}{2}\pi,$$

woraus nach (1) folgt:

$$(2)\qquad \sin\nu = \frac{1}{\sqrt{1+y'^2}},\quad \cos\nu = \frac{-y'}{\sqrt{1+y'^2}},\quad \operatorname{tg}\nu = -\frac{1}{y'},$$

wobei die Quadratwurzel stets positiv zu nehmen ist.

In den laufenden Koordinaten $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}$ hat die Tangente bzw. Normale des Punktes (x, y) der Kurve

$$y = f(x)$$

die Gleichung:

$$(3)\qquad \mathfrak{y} - y = y'(\mathfrak{x} - x)\quad \text{bzw.}\quad \mathfrak{x} - x + y'(\mathfrak{y} - y) = 0.$$

Hieraus können wir sofort ihre Gleichungen ableiten für den Fall, daß die Kurve durch die unaufgelöste Gleichung

$$F(x, y) = 0$$

gegeben wird, da ja dann $y' = -F_x : F_y$ nach Nr. 54 ist. Statt (3) kommt also für die Tangente bzw. Normale:

$$(4)\quad F_x(\mathfrak{x}-x) + F_y(\mathfrak{y}-y) = 0\quad \text{bzw.}\quad F_y(\mathfrak{x}-x) = F_x(\mathfrak{y}-y).$$

Wenn die Kurve mittels einer Hilfsveränderlichen t in der Form

$$x = \varphi(t),\quad y = \psi(t)$$

gegeben ist, so empfiehlt es sich, auf ihr als Fortschreitungssinn nicht denjenigen festzusetzen, in dem die Abszisse x wächst, sondern denjenigen, in dem die Hilfsveränderliche t wächst. Übereinstimmung zwischen beiden Annahmen herrscht alsdann, so lange $\varphi'(t) > 0$ ist; an einer Stelle jedoch, wo $\varphi'(t) < 0$ ist, ist die neue positive Richtung entgegen der oben festgesetzten. In der Folge wollen wir immer, sobald die Kurve mittels einer Hilfsveränderlichen t dargestellt wird, die auf die Kurve be-

züglichen Formeln nach dieser neuen Bestimmung schreiben. Da $dx : dt = \varphi'$, $dy : dt = \psi'$ ist, wenn die Akzentstriche die Differentiation nach t andeuten, so kommt $dy : dx = \psi' : \varphi'$. An Stelle von (1) und (2) haben wir jetzt die Formeln:

$$(5) \qquad \sin\tau = \frac{\psi'}{\sqrt{\varphi'^2 + \psi'^2}}, \quad \cos\tau = \frac{\varphi'}{\sqrt{\varphi'^2 + \psi'^2}}, \quad \operatorname{tg}\tau = \frac{\psi'}{\varphi'},$$

$$(6) \qquad \sin\nu = \frac{\varphi'}{\sqrt{\varphi'^2 + \psi'^2}}, \quad \cos\nu = \frac{-\psi'}{\sqrt{\varphi'^2 + \psi'^2}}, \quad \operatorname{tg}\nu = -\frac{\varphi'}{\psi'},$$

wo die Quadratwurzel stets positiv zu nehmen ist. Die Gleichungen der Tangente und Normale sind:

$$(7) \qquad \psi'(\mathfrak{x} - x) = \varphi'(\mathfrak{y} - y) \quad \text{bzw.} \quad \varphi'(\mathfrak{x} - x) + \psi'(\mathfrak{y} - y) = 0.$$

170. Länge der Tangente, Normale, Subtangente und Subnormale. Sind T und N die Schnittpunkte der Tangente und Normale des Kurvenpunktes M mit der x-Achse und ist P der Fußpunkt der Ordinate von M (siehe Fig. 25 auf S. 284), so versteht man — vgl. Nr. 40 — unter den Längen der Tangente, Normale, Subtangente und Subnormale die Längen der Strecken von M nach T und nach N und der Strecken von P nach T und nach N. Dabei sollen die Strecken positiv oder negativ gerechnet werden, je nachdem ihre Endpunkte auf ihre Anfangspunkte M bzw. P in dem positiven Sinne der Tangente bzw. Normale folgen. Hiernach kommt:

$$MT = \frac{-y}{\sin\tau}, \quad MN = \frac{-y}{\cos\tau}, \quad PT = -y \operatorname{ctg}\tau, \quad PN = y \operatorname{tg}\tau.$$

Wird die Kurve im Sinne wachsender x durchlaufen, so ergibt sich also nach (1) in voriger Nummer:

$$MT = -\frac{y}{y'}\sqrt{1 + y'^2}, \; MN = -y\sqrt{1 + y'^2}, \; PT = -\frac{y}{y'}, \; PN = yy',$$

wo die Quadratwurzel *positiv* zu nehmen ist. Wird die Kurve

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t)$$

im Sinne wachsender t durchlaufen, so kommt nach (5) in voriger Nummer

$$MT = -\frac{\psi\sqrt{\varphi'^2 + \psi'^2}}{\psi'}, \; MN = -\frac{\psi\sqrt{\varphi'^2 + \psi'^2}}{\varphi'}, \; PT = -\frac{\psi\varphi'}{\psi'}, \; PN = \frac{\psi\psi'}{\varphi'},$$

wo die Quadratwurzel *positiv* zu nehmen ist.

171. Asymptoten. Ist $y = f(x)$ die Kurvengleichung und ist der Variabilitätsbereich von x bis $+\infty$ oder bis $-\infty$ erstreckt, so geht der Kurvenzweig ins Unendliche. Wir definieren nun:

Definition: Eine Gerade heißt eine Asymptote eines sich bis ins Unendliche erstreckenden Kurvenzweiges, wenn die Entfernung eines Kurvenpunktes M von der Geraden den Grenzwert Null hat, sobald der Punkt M auf dem Kurvenzweige ins Unendliche rückt.

Ehe wir die Bedingungen für das Vorhandensein einer Asymptote der Kurve $y = f(x)$ für $\lim x = +\infty$ oder $\lim x = -\infty$ ableiten, bemerken wir, daß eine solche Asymptote nicht zur y-Achse parallel sein kann, denn die Gerade $\mathfrak{x} = h$ hat vom Kurvenpunkte M oder (x, y) die Fntfernung $x - h$, die nicht den Grenzwert Null für lim $x = +\infty$ oder $= -\infty$ hat. Allerdings können auch zur y-Achse parallele Asymptoten auftreten, nämlich wenn $f(x)$ für einen *endlichen* Wert von x nach $+\infty$ oder $-\infty$ strebt. Jedoch von derartigen Asymptoten wollen wir erst nachher sprechen.

Die Gleichung einer nicht zur y-Achse parallelen Geraden läßt sich stets in der nach der laufenden Ordinate $\mathfrak{y}$ aufgelösten Form schreiben:

$$\mathfrak{y} = g\mathfrak{x} + h. \tag{1}$$

Der Kurvenpunkt (x, y) hat von ihr den Abstand:

$$\frac{y - gx - h}{\sqrt{1 + g^2}},$$

und die Gerade (1) wird also dann und nur dann eine Asymptote, wenn:

$$\lim_{x=\infty} (y - gx - h) = 0$$

ist. Wir schreiben hierin $x = \infty$, worunter $x = +\infty$ oder $x = -\infty$ zu verstehen ist, je nachdem der Variabilitätsbereich von $f(x)$ bis $+\infty$ oder $-\infty$ geht. Die Forderung läßt sich auch so schreiben:

$$\lim_{x=\infty} (y - gx) = h. \tag{2}$$

Da $\lim x = \pm\infty$ ist, so folgt durch Division mit x um so mehr:

$$\lim_{x=\infty}\left(\frac{y}{x}-g\right)=\lim_{x=\infty}\frac{h}{x}=0.$$

Also muß zunächst:

(3) $$\lim_{x=\infty}\frac{y}{x}=g$$

sein. Ist dies der Fall, d. h. hat $y:x$ für $\lim x=\infty$ einen bestimmten endlichen Grenzwert g, so setzen wir diesen Grenzwert für g in (2) ein; dann ist also noch zu fordern, daß auch $y-gx$ für $\lim x=\infty$ einen bestimmten endlichen Grenzwert h habe. Daher kommt, wenn wir $f(x)$ statt y schreiben, der

Satz 1: Erstreckt sich der durch $y=f(x)$ definierte Kurvenzweig ins Unendliche, indem x bis $+\infty$ oder bis $-\infty$ gehen darf, so hat die Kurve für diesen Grenzwert von x dann und nur dann eine Asymptote

$$\mathfrak{y}=g\mathfrak{x}+h,$$

wenn erstens ein bestimmter endlicher Grenzwert

$$\lim\frac{f(x)}{x}=g$$

und zweitens ein bestimmter endlicher Grenzwert

$$\lim\,[f(x)-gx]=h$$

für diesen Grenzwert von x vorhanden ist.

Betrachten wir nun die *Tangente* des Kurvenpunktes (x, y). Sie hat nach (3) in Nr. 169 die Gleichung

(4) $$\mathfrak{y}=y'\mathfrak{x}+(y-xy'),$$

und wir wollen untersuchen, was für eine Grenzlage der Tangente zukommt, wenn x bis ∞ geht. Dabei nehmen wir zunächst an, daß $\lim y$ oder also $\lim f(x)$ auch unendlich groß für $\lim x=\infty$ sei. Alsdann hat der Quotient $y:x$ nach Satz 27 in Nr. 130 notwendig denselben Grenzwert wie $y':1$, falls dieser vorhanden ist. Gibt es eine Asymptote, so ist daher wegen (3)

(5) $$\lim_{x=\infty}y'=g.$$

Ferner kommt nach (2)

$$h=\lim_{x=\infty}(y-gx)=\lim_{x=\infty}\frac{g-\frac{y}{x}}{-\frac{1}{x}}.$$

Da der Zähler des letzten Bruches wegen (3) für $\lim x = \infty$ den Grenzwert Null und der Nenner ebenfalls diesen Grenzwert hat, so gibt die Anwendung des Satzes 25 in Nr. 129, indem man Zähler und Nenner je für sich differenziert:

$$(6) \qquad h = \lim_{x=\infty} \frac{-\frac{y'}{x} + \frac{y}{x^2}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x=\infty} (y - xy'),$$

falls ein solcher Grenzwert existiert. Ist es der Fall, so lehren die Formeln (5) und (6), daß die Grenzlage der Tangente (4) für $\lim x = \infty$ die Gleichung

$$\mathfrak{y} = g\mathfrak{x} + h$$

hat. *Falls also der Tangente eine Grenzlage zukommt, ist die Grenzlage die Asymptote.*

Dies ist auch dann noch richtig, wenn y oder $f(x)$ nicht, wie wir soeben annahmen, für $\lim x = \infty$ unendlich groß wird, sondern einen bestimmten endlichen Grenzwert A hat. Denn in diesem Falle unterwerfen wir zunächst das Achsenkreuz einer Drehung um den Nullpunkt um irgend einen spitzen positiven Winkel α. Sind x_1, y_1 die Koordinaten des Kurvenpunktes (x, y) im neuen Achsenkreuze, so wird

$$(7) \qquad x_1 = x \cos\alpha + y \sin\alpha, \quad y_1 = -x \sin\alpha + y \cos\alpha.$$

Also kommt:

$$\lim_{x=\infty} x_1 = \cos\alpha \cdot \lim_{x=\infty} x + \sin\alpha \cdot A,$$

$$\lim_{x=\infty} y_1 = -\sin\alpha \cdot \lim_{x=\infty} x + \cos\alpha \cdot A.$$

Da $\cos\alpha$ und $\sin\alpha$ von Null verschieden sind, so ist jetzt sowohl $\lim x_1 = \infty$ als auch $\lim y_1 = \infty$, so daß im neuen Koordinatensysteme der zuerst besprochene Fall vorliegt.

Umgekehrt, wenn die Tangente (4) für $\lim x = \infty$ eine bestimmte Grenzlage $\mathfrak{y} = g\mathfrak{x} + h$ hat, wenn also $\lim y' = g$ und $\lim (y - xy') = h$ für $\lim x = \infty$ ist, so ist h gleich der Differenz $\lim y - \lim x \cdot \lim y'$, also gleich $\lim y - g \lim x$ oder gleich $\lim (y - gx)$, also die Forderung (2) für das Vorhandensein einer Asymptote erfüllt.

Wir haben demnach gefunden:

Satz 2: Wenn sich der durch $y = f(x)$ definierte Kurvenzweig ins Unendliche erstreckt, indem x entweder bis $+\infty$ oder bis $-\infty$ gehen darf, während y dabei entweder ebenfalls unendlich wird oder einen bestimmten endlichen Grenzwert annimmt, und wenn die Tangente des Kurvenpunktes (x, y) für $\lim x = +\infty$ *bzw.* $-\infty$ *eine bestimmte Grenzlage hat, so ist die Grenzlage der Tangente zugleich eine Asymptote.*

Es kann aber vorkommen, daß die Tangente keine bestimmte Grenzlage hat und doch eine Asymptote vorhanden ist. Z. B. sind bei der Kurve $y = \sin x : x$ für $\lim x = +\infty$ die Bedingungen des Satzes 1 erfüllt, weil

$$\lim_{x=+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x=+\infty} \frac{\sin x}{x^2} = 0, \quad \text{also} \quad g = 0$$

und daher

$$\lim_{x=+\infty} [f(x) - gx] = \lim_{x=+\infty} \frac{\sin x}{x} = 0, \quad \text{also} \quad h = 0$$

ist, so daß $\mathfrak{y} = 0$ oder also die Abszissenachse eine Asymptote ist (übrigens auch für $\lim x = -\infty$). Nun wird hier zwar

$$\lim_{x=+\infty} y' = \lim_{x=+\infty} \left(\frac{\cos x}{x} - \frac{\sin x}{x^2}\right) = 0,$$

aber

$$\lim_{x=+\infty} (y - xy') = -\lim_{x=+\infty} \cos x$$

bleibt unbestimmt, weil $\cos x$, wie groß auch x werden mag, immer noch alle Werte zwischen -1 und $+1$ annehmen kann. Also gibt es für $\lim x = +\infty$ keine bestimmte Grenzlage der Tangente (ebenso wenig für $\lim x = -\infty$).

Eine Kurve $y = f(x)$ kann, wie wir schon vorweg bemerkten, auch eine zur y-Achse parallele Asymptote haben, wenn nämlich $f(x)$ für einen *endlichen* Wert $x = a$ den Grenzwert $+\infty$ oder $-\infty$ hat. Wir können diesen Fall auf den vorher behandelten zurückführen, indem wir das Achsenkreuz wie oben einer Drehung um einen spitzen positiven Winkel α unterwerfen. Denn nach (7) ist dann

$$\lim_{x=a} x_1 = a \cos\alpha + \sin\alpha \cdot \lim_{x=a} y = \pm\infty,$$

$$\lim_{x=a} y_1 = -a \sin\alpha + \cos\alpha \cdot \lim_{x=a} y = \pm\infty,$$

so daß sich die Kurve für $\lim x_1 = \pm\infty$ ins Unendliche erstreckt.

172. Art und Ordnung der Berührung zwischen Kurve und Tangente. Wir betrachten eine bestimmte Stelle M oder (x, y) der Kurve $y = f(x)$. Es sei t die Tangente und P der Fußpunkt der Ordinate von M, siehe Fig. 26. Ferner sei der zu $x + h$ gehörige Kurvenpunkt mit M_1 und der zugehörige Fußpunkt mit P_1 bezeichnet, so daß PP_1 den Wert h hat. Die Ordinate von M ist $y = f(x)$, die von M_1 ist $y_1 = f(x + h)$. Die Tangente t treffe die Gerade $P_1 M_1$ in N_1. Der Punkt N_1 der Tangente hat dieselbe Abszisse $x + h$ wie der Punkt M_1 der Kurve, seine Ordinate η_1 ist aber eine andere. Aus der Gleichung (3) der Tangente in Nr. 169, worin $\mathfrak{x} = x + h$ und $\mathfrak{y} = \eta_1$ zu setzen ist, folgt $\eta_1 = y + y'h = f(x) + f'(x)h$, so daß

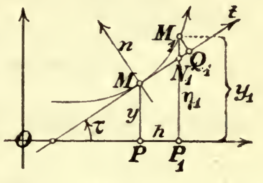


Fig. 26.

$$y_1 - \eta_1 = f(x+h) - f(x) - f'(x)h \tag{1}$$

die Differenz der Ordinaten von M_1 und N_1 bedeutet. Wenn nun die Funktion f nebst einer Anzahl von Ableitungen f', f'', ... für alle Werte der unabhängigen Veränderlichen von x bis $x + h$ bestimmte endliche Werte hat, so können wir $f(x + h)$ nach Satz 19 in Nr. 112 in eine begrenzte Reihe mit Restglied nach Potenzen von h entwickeln. Aus (1) folgt alsdann, daß sich $y_1 - \eta_1$ so darstellt:

$$y_1 - \eta_1 = f''(x)\frac{h^2}{2!} + f'''(x)\frac{h^3}{3!} + \cdots + f^{(n+1)}(x)\frac{h^{n+1}}{(n+1)!} + R_{n+2}, \tag{2}$$

wo

$$R_{n+2} = f^{(n+2)}(x + \theta h)\frac{h^{n+2}}{(n+2)!} \tag{3}$$

ist und θ einen gewissen positiven echten Bruch bedeutet. Wir haben hierbei vorausgesetzt, daß die Funktion f nebst allen Ableitungen bis zur $(n + 2)^{\text{ten}}$ im Intervalle von x bis $x + h$ bestimmte endliche Werte habe. Die Formel (2) lehrt, daß $\lim (y_1 - \eta_1) = 0$ für $\lim h = 0$ ist, was ja auch geometrisch einleuchtet. Sie zeigt aber noch mehr: Um sogleich den denkbar allgemeinsten Fall zu besprechen, wollen wir annehmen, *daß an der betrachteten Stelle x unter allen Differentialquotienten von $f(x)$ von der zweiten Ordnung an der erste, der*

nicht gleich Null ist, die $(n+1)^{te}$ Ordnung habe. Es sei also an der betrachteten Stelle:

$$(4)\quad f''(x)=0,\ f'''(x)=0, \ldots f^{(n)}(x)=0,\ \text{aber}\ f^{(n+1)}(x)\neq 0.$$

Dann gibt (2):

$$(5)\qquad y_1-\eta_1=f^{(n+1)}(x)\frac{h^{n+1}}{(n+1)!}+R_{n+2}.$$

Hiernach und nach (3) kommt:

$$(6)\qquad \lim_{h=0}\frac{y_1-\eta_1}{h^{n+1}}=\frac{f^{(n+1)}(x)}{(n+1)!}\neq 0,$$

d. h. nach Nr. 127: *Die Ordinatendifferenz $y_1-\eta_1$ von Kurve und Tangente verschwindet mit h in der Ordnung $n+1$.*

Das Lot von M_1 auf die Tangente t habe den Fußpunkt Q_1. Ist τ der Winkel der Tangente t mit der positiven x-Achse, gemessen in dem in Nr. 169 angegebenen Sinne, so kommt nach (1) in Nr. 169:

$$(7)\qquad Q_1M_1=N_1M_1\cos\tau=\frac{y_1-\eta_1}{\sqrt{1+y'^2}},$$

wo die Wurzel positiv genommen werden soll. *Wir rechnen also Q_1M_1 positiv, wenn Q_1 und M_1 so aufeinander folgen, wie es dem positiven Sinne der Normale n von M entspricht* (vgl. Nr. 169). Nach (6) wird nun:

$$\lim_{h=0}\frac{Q_1M_1}{h^{n+1}}=\frac{1}{\sqrt{1+y'^2}}\,\frac{f^{(n+1)}(x)}{(n+1)!}\neq 0.$$

Also verschwindet der Abstand des Kurvenpunktes M_1 von der Tangente des Punktes M mit der Abszissendifferenz h von M und M_1 in der Ordnung $n+1$.

Die Zahl n heißt die *Ordnung der Berührung* von Kurve und Tangente. Für *beliebige* Werte von x wird sich die Voraussetzung (4) auf $f''(x)\neq 0$ reduzieren, d. h. im allgemeinen wird $n=1$, also die Berührung von der *ersten* Ordnung sein. Denn sonst müßte ja überall $f''(x)=0$, also $f'(x)=$ konst. sein, so daß die Kurve eine gerade Linie wäre. Daher können Kurvenstellen, an denen die Berührung von höherer als erster Ordnung ist, nur vereinzelt auftreten.

Wenn die Berührung von n^{ter} Ordnung ist, also die Annahmen (4) erfüllt sind, so folgt aus (5) wegen des Satzes 22 in Nr. 115, daß, wenn $|h|$ hinreichend klein gewählt wird, die Differenz $y_1 - \eta_1$ dasselbe Vorzeichen wie $f^{(n+1)}(x)h^{n+1}$ hat. Dies Vorzeichen ändert sich mit dem von h, sobald n gerade ist, dagegen nicht, sobald n ungerade ist. Im ersten Falle also liegen die zu M benachbarten Punkte der Kurve auf verschiedenen Seiten der Tangente von M, nämlich die vor M liegenden Punkte auf der einen, die auf M folgenden auf der anderen Seite der Tangente. Im zweiten Falle dagegen liegen sie sämtlich auf derselben Seite der Tangente.

Wir haben also gefunden:

Satz 3: Wenn eine nicht geradlinige Kurve $y = f(x)$ vorliegt, so wird sie von der Tangente eines Punktes M im allgemeinen in erster Ordnung berührt, d. h. diejenigen Stellen M, an denen die Berührung von höherer als erster Ordnung ist, können nicht einen Zweig der Kurve vollständig erfüllen. Wird die Kurve von der Tangente des Punktes M oder (x, y) in der n^{ten} Ordnung berührt, sind also für den betrachteten Punkt $f''(x), f'''(x), \ldots f^{(n)}(x)$ gleich Null, während $f^{(n+1)}(x) \neq 0$ ist, und ist die Funktion $f(x)$ nebst allen ihren Ableitungen bis zur $(n+2)^{\text{ten}}$ Ordnung bestimmt und endlich in der Umgebung des betrachteten Wertes x, so wird der Abstand jener Tangente von einem Kurvenpunkt M_1, dessen Abszisse $x + h$ ist und in der Umgebung von x liegt, mit h gleich Null in der Ordnung $n + 1$. Die Kurve durchsetzt die Tangente in M, wenn die Ordnung n der Berührung gerade ist. Andernfalls liegen die zu M hinreichend benachbarten Kurvenpunkte sämtlich auf derselben Seite der Tangente von M.

Fig. 27.

Ist die Ordnung n der Berührung gerade, so verläuft also die Kurve in der Umgebung der Stelle M ungefähr so, wie es in Fig. 27 dargestellt wird. Man nennt solche Stellen der Kurve *eigentliche Wende- oder Inflexionspunkte.* Die erste notwendige Bedingung für einen solchen Punkt ist $f''(x) = 0$. Wenn $f''(x)$ verschwindet, aber $f'''(x)$ nicht, so liegt wirklich ein derartiger Punkt vor. Ist jedoch überdies $f'''(x) = 0$, so liegt keiner vor, wenn $f^{\mathrm{IV}}(x) \neq 0$

ist, usw. Man sagt nun auch, daß die Kurve an der Stelle x einen *Wendepunkt* hat, sobald nur die erste Bedingung $f''(x) = 0$ erfüllt wird. Jedoch ist der Punkt dann ein *uneigentlicher* Wendepunkt, wenn $f'''(x) = 0$ und $f^{IV}(x) \neq 0$ oder wenn $f'''(x) = 0$, $f^{IV}(x) = 0$, $f^{V}(x) = 0$ und $f^{VI}(x) \neq 0$ usw. ist.

173. Konkavität und Konvexität der Kurve. Man sagt, daß eine Kurve in einem ihrer Punkte M einer gegebenen Geraden g, die nicht durch M geht, ihre konkave Seite zuwende, wenn sie in einer hinreichend kleinen Umgebung von M vollständig innerhalb des *spitzen* Winkels verläuft, den die Tangente von M mit der Geraden g bildet; verläuft sie dagegen dort vollständig außerhalb dieses spitzen Winkels, so sagt man, daß sie der Geraden g in M ihre konvexe Seite zuwende, siehe Fig. 28, in der die Kurve in M_1 konkav, in M_2 konvex gegen g ist. Wir wollen feststellen, unter welchen Bedingungen die Kurve $y = f(x)$ insbesondere der x-*Achse* im Punkte M oder (x, y) die eine oder andere Seite zuwendet.

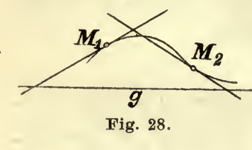


Fig. 28.

Zu diesem Zwecke benutzen wir die Formel (7) der vorigen Nummer. Wenn man bedenkt, in welchem Sinn die Tangente und Normale des Punktes M nach Nr. 169 positiv sind, so lehren die in Fig. 29 angegebenen Möglichkeiten, daß die Kurve der x-Achse ihre konvexe Seite zuwendet, wenn Q_1M_1 im Falle $y > 0$ positiv und im Falle $y < 0$ negativ ist, wenn also $y \cdot Q_1M_1 > 0$ oder $y(y_1 - \eta_1) > 0$ ist. Machen wir wieder an der betrachteten Stelle die Annahmen

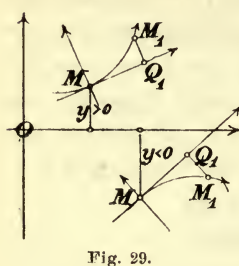


Fig. 29.

$$f''(x) = 0, \quad f'''(x) = 0, \ldots f^{(n)}(x) = 0, \quad \text{aber} \quad f^{(n+1)}(x) \neq 0,$$

so wendet also die Kurve nach (5) in voriger Nummer und wegen des Satzes 22 in Nr. 115 der x-Achse ihre konvexe Seite zu, sobald

$$y \cdot f^{(n+1)}(x) \cdot h^{n+1} > 0$$

wird. Natürlich ist dabei $y \neq 0$ anzunehmen. Diese Bedingung kann im Falle einer Berührung von gerader Ordnung nicht

zugleich für positive und negative Werte von h erfüllt sein, was ja auch geometrisch einleuchtet. Im Falle einer Berührung von ungerader Ordnung ist h^{n+1} stets positiv, d. h.:

Satz 4: Die Kurve $y = f(x)$ wendet in einem nicht auf der x-Achse gelegenen Punkte (x, y) dieser Achse nur dann ihre konvexe oder konkave Seite zu, wenn sie von ihrer Tangente dort in ungerader Ordnung berührt wird. Ist diese Ordnung gleich n, so ist die Kurve in bezug auf die x-Achse dort konvex oder konkav, je nachdem $yy^{(n+1)}$ einen positiven oder negativen Wert hat.

Insbesondere:

Satz 5: Die Kurve $y = f(x)$ ist an einer nicht auf der x-Achse gelegenen Stelle, an der sie von ihrer Tangente in der ersten Ordnung berührt wird, gegenüber der x-Achse konvex oder konkav, je nachdem dort yy'' einen positiven oder negativen Wert hat.

Denken wir uns eine Gerade g, die zuerst auf der x-Achse liegt, nach unten, d. h. nach der negativen y-Achse hin immer weiter verschoben, so kommen wir zu dem Begriffe der Konvexität oder Konkavität der Kurve gegenüber ihrer Betrachtung von unten her. Die Bedingungen dafür sind dieselben, die sich für die Konvexität oder Konkavität gegenüber der x-Achse ergeben, sobald M oberhalb der x-Achse liegt, also y positiv ist. Daraus folgt:

Satz 6: Die Kurve $y = f(x)$ ist an einer Stelle, an der sie von ihrer Tangente in der n^{ten} Ordnung berührt wird, von unten gesehen konvex oder konkav nur im Falle einer ungeraden Ordnung, und zwar ist sie alsdann konvex oder konkav, je nachdem an der betrachteten Stelle $y^{(n+1)}$ einen positiven oder negativen Wert hat.

174. Beispiele. *1. Beispiel:* Bei der *Sinuslinie* $y = \sin x$, siehe Fig. 4, S. 16, ist $y' = \cos x$, $y'' = -\sin x$, also $yy'' = -\sin^2 x < 0$, so daß sie der x-Achse stets ihre konkave Seite zuwendet. Soll ein Kurvenpunkt ein Wendepunkt sein, so muß $y'' = 0$, d. h. $x = k\pi$ sein, wo k eine ganze Zahl bedeutet. Dann ist $y = \sin x = 0$ und $y''' = -\cos x \neq 0$. Also sind alle Schnittpunkte der Sinuslinie mit der x-Achse *eigentliche* Wendepunkte, und in ihnen tritt Berührung in zweiter Ordnung ein. Sonst gibt es keine Wendepunkte.

2. Beispiel: Bei der *Tangenslinie* $y = \operatorname{tg} x$, siehe Fig. 5, S. 16, ist $y' = 1 : \cos^2 x$, $y'' = 2 \operatorname{tg} x : \cos^2 x$, also $yy'' > 0$. Sie wendet daher der x-Achse überall ihre konvexe Seite zu. Es verschwindet y'' nur für die Schnittpunkte $x = k\pi$ der Kurve mit der x-Achse, und diese Punkte sind *eigentliche Wendepunkte* mit Berührung in zweiter Ordnung.

3. Beispiel: Bei der *Ellipse*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

ist:

$$\frac{x}{a^2} + \frac{yy'}{b^2} = 0, \quad \frac{1}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} + \frac{yy''}{b^2} = 0,$$

also $yy'' < 0$, sie wendet daher der x-Achse überall ihre konkave Seite zu. Nirgends ist $y'' = 0$. Die Kurve wird also überall von ihren Tangenten nur in der ersten Ordnung berührt.

§ 2. Homogene Koordinaten.

175. Kurven und ihre Tangenten in homogenen Koordinaten. Wir wollen die rechtwinkligen Koordinaten x, y eines Punktes M durch *Verhältnisse* $x_1 : x_3$ und $x_2 : x_3$ ersetzen, also statt der *beiden* Veränderlichen x, y ihrer *drei* x_1, x_2, x_3 einführen. Eine von ihnen ist überzählig; wir können z. B. $x_3 = 1$ wählen und dadurch zu den alten Koordinaten x, y zurückkommen, die dann nur anders bezeichnet sind, nämlich mit x_1, x_2. Eine solche Spezialisierung soll jedoch nicht vorgenommen werden. Wir führen vielmehr mit voller Absicht statt der zwei Veränderlichen x, y ihrer drei x_1, x_2, x_3 ein, von denen also nur ihre *Verhältnisse* $x_1 : x_3$ und $x_2 : x_3$ für die geometrische Deutung in der Ebene in Betracht kommen. Es sind dann x_1, x_2, x_3 und tx_1, tx_2, tx_3 Bestimmungsstücke ein und desselben Punktes der Ebene, wie auch der Faktor t gewählt sein mag; wir bezeichnen diesen Punkt als den Punkt $(x_1 : x_2 : x_3)$, um anzudeuten, daß nur die Verhältnisse der drei Veränderlichen von Belang sind. Solche drei Veränderliche heißen *homogene Punktkoordinaten in der Ebene.*

Der Rückweg von den homogenen Koordinaten zu den gewöhnlichen ist leicht auszuführen: Man ersetzt einfach x_1, x_2 und x_3 durch x, y und 1.

Die homogenen Koordinaten sind aus verschiedenen Gründen nützlich. Einen Grund liefert die sogenannte *projektive Geometrie,* in der das Bedürfnis vorliegt, auch die unendlich fernen Punkte der Ebene analytisch zu behandeln. Man kann dabei — um dies nur ganz kurz auszuführen — von der Bemerkung ausgehen, daß ein Punkt (x, y) auf der Geraden $ax + by + c = 0$ ins Unendlichferne kommt, wenn $|x|$ über alle Grenzen wächst, wobei im allgemeinen auch $|y|$ über alle Grenzen wächst. Man darf aber mit $+\infty$ und $-\infty$ nicht wie mit Zahlen rechnen; daher ist hier die Einführung von homogenen Koordinaten nützlich, denn wenn wir x durch $x_1 : x_3$ und y durch $x_2 : x_3$ ersetzen, so wird die *Gleichung der Geraden* diese:

$$ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0,$$

wo die linke Seite eine *ganze lineare homogene Funktion* von x_1, x_2, x_3 ist. Es wird der Punkt (x, y) oder $(x_1 : x_3, x_2 : x_3)$ unendlich fern sein, wenn $x_3 = 0$ ist. Alsdann gibt die Gleichung $ax_1 + bx_2 = 0$ oder $x_1 : x_2 = -b : a$. Mithin sagt man, daß $(-b : a : 0)$ der unendlich ferne Punkt der Geraden $ax + by + c = 0$ sei. Dabei stellt man allerdings das *Axiom* auf, daß jede Gerade in der Ebene nur einen unendlich fernen Punkt habe. Die homogenen Koordinaten x_1, x_2, x_3 haben also den Vorzug, daß sie, sobald $x_3 = 0$ ist, zu den unendlich fernen Punkten der Ebene gehören, mithin trotz der unendlich fernen Lage der Punkte *endlich* bleiben.

Die homogenen Koordinaten haben abgesehen hiervon noch den Vorzug, daß mit ihrer Hilfe manche Formeln viel symmetrischer und übersichtlicher werden als mit Hilfe gewöhnlicher Koordinaten. Man sieht dies schon an der obigen Gleichung der Geraden, die in der Form $ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0$ offenbar symmetrischer ist als in der Form $ax + by + c = 0$. Wenn wir die Koeffizienten a, b, c mit a_1, a_2, a_3 bezeichnen, so können wir die Gerade $a_1x + a_2y + a_3 = 0$ in homogenen Koordinaten in der knappen Form

$$\sum_{1}^{3} {}_i\, a_i x_i = 0$$

darstellen.

Zu *jedem* Wertsysteme x_1, x_2, x_3 gehört zwar ein Punkt der Ebene, vorausgesetzt, daß man auch unendlich ferne Punkte zuläßt, für die $x_3 = 0$ wird; aber *eine* Ausnahme ist doch zu machen, nämlich zu dem Wertsysteme 0, 0, 0 gehört *kein* Punkt der Ebene. *Das Wertsystem* 0, 0, 0 *ist also bei homogenen Koordinaten sinnlos.* Der Anfangspunkt ist in homogenen Koordinaten der Punkt $(0:0:1)$, der unendlich ferne Punkt der x-Achse der Punkt $(1:0:0)$ und der unendlich ferne Punkt der y-Achse der Punkt $(0:1:0)$. Wollen wir von jenem oben erwähnten Axiome der projektiven Geometrie über die unendlich fernen Punkte keinen Gebrauch machen, so haben wir uns auf solche Punkte $(x_1:x_2:x_3)$ zu beschränken, deren dritte homogene Koordinate $x_3 \neq 0$ ist.

Ist $F(x, y) = 0$ die nicht aufgelöste Gleichung einer Kurve, so lautet sie in homogenen Koordinaten:

$$F\left(\frac{x_1}{x_3}, \frac{x_2}{x_3}\right) = 0.$$

Die linke Seite bleibt augenscheinlich ungeändert, wenn x_1, x_2, x_3 durch tx_1, tx_2, tx_3 ersetzt werden, und ist daher nach Nr. 91 eine *homogene Funktion nullten Grades* von x_1, x_2, x_3. Durch Multiplikation mit x_3^n kann man sie in eine *homogene Funktion* n^{ten} *Grades* verwandeln.

Umgekehrt: Es liege eine Gleichung

$$f(x_1, x_2, x_3) = 0 \tag{1}$$

vor, deren linke Seite eine *homogene Funktion* n^{ten} *Grades* von x_1, x_2, x_3 ist. Wird die Gleichung von einem Wertsysteme x_1, x_2, x_3 befriedigt, so wird ihr auch von dem Wertsysteme tx_1, tx_2, tx_3 genügt, denn es ist

$$f(tx_1, tx_2, tx_3) = t^n f(x_1, x_2, x_3),$$

und dies wird infolge von (1) gleich Null. Daher genügen der Gleichung (1) Punkte $(x_1:x_2:x_3)$ mit den *homogenen* Koordinaten x_1, x_2, x_3. Setzen wir insbesondere $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = 1$, so sehen wir, daß die Gleichung (1) die Kurve

$$f(x, y, 1) = 0$$

in den rechtwinkligen Koordinaten x, y darstellt.

175]

Wir nehmen daher im folgenden an: *Eine Kurve sei durch eine Gleichung* (1) *gegeben, deren linke Seite eine homogene Funktion n^{ten} Grades von x_1, x_2, x_3 sei.*

Differentiation der Gleichung (1) gibt

$$f_{x_1} dx_1 + f_{x_2} dx_2 + f_{x_3} dx_3 = 0. \tag{2}$$

Da $x_1 = x x_3$, $x_2 = y x_3$ ist, so kommt, wenn $x_3 \neq 0$ angenommen wird:

$$dx_1 = x_3 dx + x dx_3, \quad dx_2 = x_3 dy + y dx_3,$$

so daß aus (2) wird:

$$x_3 [f_{x_1} dx + f_{x_2} dy] + [x_1 f_{x_1} + x_2 f_{x_2} + x_3 f_{x_3}] \frac{dx_3}{x_3} = 0.$$

Es ist aber nach Satz 9 in Nr. 91 und nach (1):

$$x_1 f_{x_1} + x_2 f_{x_2} + x_3 f_{x_3} = nf = 0. \tag{3}$$

Mithin bleibt, weil $x_3 \neq 0$ angenommen war:

$$f_{x_1} dx + f_{x_2} dy = 0, \tag{4}$$

woraus folgt:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{f_{x_1}}{f_{x_2}}.$$

Die Gleichung der Tangente lautet also nach (3) in Nr. 169 in den laufenden Koordinaten $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$:

$$\mathfrak{y} - y = -\frac{f_{x_1}}{f_{x_2}} (\mathfrak{x} - x)$$

oder, wenn wir *überall* homogene Koordinaten einführen, also nicht nur $x = x_1 : x_3$, $y = x_2 : x_3$, sondern auch $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}_1 : \mathfrak{x}_3$ und $\mathfrak{y} = \mathfrak{x}_2 : \mathfrak{x}_3$ setzen:

$$\left(\frac{\mathfrak{x}_1}{\mathfrak{x}_3} - \frac{x_1}{x_3}\right) f_{x_1} + \left(\frac{\mathfrak{x}_2}{\mathfrak{x}_3} - \frac{x_2}{x_3}\right) f_{x_2} = 0.$$

Substituieren wir hierin für $x_1 f_{x_1} + x_2 f_{x_2}$ den aus (3) folgenden Wert $-x_3 f_{x_3}$, so kommt nach Multiplikation mit $\mathfrak{x}_3$:

$$\mathfrak{x}_1 f_{x_1} + \mathfrak{x}_2 f_{x_2} + \mathfrak{x}_3 f_{x_3} = 0.$$

Satz 7: Ist $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ die Gleichung einer Kurve in der Ebene mit den homogenen Koordinaten x_1, x_2, x_3, so lautet die Gleichung der Tangente des Kurvenpunktes $(x_1 : x_2 : x_3)$, geschrieben in den laufenden homogenen Koordinaten $\mathfrak{x}_1$, $\mathfrak{x}_2$, $\mathfrak{x}_3$:

$$\mathfrak{x}_1 f_{x_1} + \mathfrak{x}_2 f_{x_2} + \mathfrak{x}_3 f_{x_3} = 0.$$

[175

176. Beispiel. Ein *Kegelschnitt* wird bekanntlich analytisch durch eine Gleichung $F(x, y) = 0$ gegeben, deren linke Seite eine ganze rationale Funktion zweiten Grades in x, y ist. Ersetzen wir x und y durch $x_1 : x_3$ und $x_2 : x_3$ und multiplizieren wir mit x_3^2, so ergibt sich, daß ein Kegelschnitt in homogenen Koordinaten allgemein durch eine Gleichung von der Form

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{23}x_2x_3 + 2a_{31}x_3x_1 + 2a_{12}x_1x_2 = 0$$

dargestellt wird. Bezeichnen wir ihre linke Seite mit f, so ist:

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{2}f_{x_1} &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3,\\
\tfrac{1}{2}f_{x_2} &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3,\\
\tfrac{1}{2}f_{x_3} &= a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3.
\end{aligned}$$

Eigentlich wäre hierin a_{31} statt a_{13}, a_{12} statt a_{21} und a_{23} statt a_{32} zu schreiben. Wir wollen aber festsetzen, *daß allgemein* a_{ik} *denselben Koeffizienten wie* a_{ki} *bedeuten soll*, weil die vorstehenden drei Formeln so offenbar symmetrischer sind. Die Tangente des Kegelschnittes, deren Berührungspunkt der Punkt $(x_1 : x_2 : x_3)$ ist, hat nach Satz 7 von Nr. 175 in den homogenen laufenden Koordinaten $\mathfrak{x}_1$, $\mathfrak{x}_2$, $\mathfrak{x}_3$ die Gleichung:

$$(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3)\mathfrak{x}_1 + (a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3)\mathfrak{x}_2 + \\ + (a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3)\mathfrak{x}_3 = 0.$$

Die Kurvengleichung und die Tangentengleichung lassen sich beide knapper so schreiben:

$$\sum_1^3{}^{i,k}\, a_{ik}x_ix_k = 0, \quad \sum_1^3{}^{i,k}\, a_{ik}\mathfrak{x}_ix_k = 0.$$

Will man zu gewöhnlichen Koordinaten zurückkehren, so braucht man nur x_1, x_2, x_3 durch x, y, 1 und $\mathfrak{x}_1$, $\mathfrak{x}_2$, $\mathfrak{x}_3$ durch $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, 1 zu ersetzen.

177. Ebene algebraische Kurven. Ist $u(x_1, x_2, x_3)$ eine *homogene ganze rationale Funktion n^{ten} Grades von* x_1, x_2, x_3, so sagt man, daß die Gleichung

$$u(x_1, x_2, x_3) = 0 \tag{1}$$

eine *algebraische Kurve n^{ter} Ordnung* definiere. In Nr. 176 z. B. lag eine allgemeine algebraische Kurve zweiter Ordnung

vor, nämlich ein Kegelschnitt. Nach Nr. 175 ist jede algebraische Kurve erster Ordnung

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0$$

eine gerade Linie.

Es sei $(\mathfrak{x}_1 : \mathfrak{x}_2 : \mathfrak{x}_3)$ irgend ein bestimmt gewählter Punkt in der Ebene. Nach Satz 7 in Nr. 175 geht die Tangente des Punktes $(x_1 : x_2 : x_3)$ der algebraischen Kurve n^{ter} Ordnung (1) durch jenen Punkt, sobald

$$(2) \qquad \mathfrak{x}_1 u_{x_1} + \mathfrak{x}_2 u_{x_2} + \mathfrak{x}_3 u_{x_3} = 0$$

ist. Weil u_{x_1}, u_{x_2}, u_{x_3} nach Satz 10 in Nr. 91 homogene Funktionen $(n-1)^{ten}$ Grades von x_1, x_2, x_3 sind, so ist die linke Seite von (2) eine homogene ganze rationale Funktion $(n-1)^{ten}$ Grades von x_1, x_2, x_3. Daher folgt:

Satz 8: Die Berührungspunkte der von irgend einem festen Punkte ausgehenden Tangenten einer ebenen algebraischen Kurve n^{ter} Ordnung liegen auf einer algebraischen Kurve $(n-1)^{ter}$ Ordnung.

Ist der Punkt $(\mathfrak{x}_1 : \mathfrak{x}_2 : \mathfrak{x}_3)$ ein Punkt der Geraden

$$a_1 \mathfrak{x}_1 + a_2 \mathfrak{x}_2 + a_3 \mathfrak{x}_3 = 0$$

und rückt er auf dieser Geraden ins Unendlichferne, d. h. wird $\mathfrak{x}_3 = 0$ (vgl. Nr. 175) und $\mathfrak{x}_1 : \mathfrak{x}_2 = -a_2 : a_1$, so nimmt (2) die Form an:

$$a_2 u_{x_1} - a_1 u_{x_2} = 0,$$

und dies ist nach wie vor die Gleichung einer algebraischen Kurve $(n-1)^{ter}$ Ordnung.

Wir würden daher zu dem Satze 8 für den Fall kommen, daß der gegebene feste Punkt unendlich fern liegt. Um das Unendlichferne zu vermeiden, heben wir hervor, daß sich alle linearen homogenen Gleichungen

$$b_1 \mathfrak{x}_1 + b_2 \mathfrak{x}_2 + b_3 \mathfrak{x}_3 = 0,$$

die von demselben Wertsysteme $(-a_2 : a_1 : 0)$ befriedigt werden, ergeben, wenn wir $a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0$ wählen, d. h. $b_1 : b_2 = a_1 : a_2$ setzen, so daß sie die Form haben:

$$a_1 \mathfrak{x}_1 + a_2 \mathfrak{x}_2 + \text{konst. } \mathfrak{x}_3 = 0,$$

oder, nicht homogen geschrieben, die Form:

$$a_1 x + a_2 y + \text{konst.} = 0.$$

Sie stellen demnach lauter *parallele* Geraden vor. Daher lautet das letzte Ergebnis so:

Satz 9: Die Berührungspunkte der zu einer bestimmten Richtung parallelen Tangenten einer ebenen algebraischen Kurve n^{ter} Ordnung liegen auf einer algebraischen Kurve $(n-1)^{ter}$ Ordnung.

178. Wendepunkte einer algebraischen Kurve. Es sei wieder

$$u(x_1, x_2, x_3) = 0 \tag{1}$$

die Gleichung einer ebenen algebraischen Kurve n^{ter} Ordnung, also u eine homogene ganze rationale Funktion n^{ten} Grades von x_1, x_2, x_3. Zur Abkürzung wollen wir die Ableitungen von u nach x_1, x_2, x_3 durch angehängte Indizes 1, 2, 3 bezeichnen. Es sei also gesetzt:

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = u_i, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} = u_{ik} \qquad (i, k = 1, 2, 3), \tag{2}$$

so daß allgemein u_{ik} dasselbe bedeuten soll wie u_{ki}. Wird wie in Nr. 175 wieder $x_3 \neq 0$ angenommen und (1) differenziert, so ergibt sich analog der Gleichung (4) von Nr. 175:

$$u_1\, dx + u_2\, dy = 0. \tag{3}$$

Ferner wird:

$$du_1 = u_{11}\, dx_1 + u_{12}\, dx_2 + u_{13}\, dx_3,$$

also, weil $x_1 = x x_3$, $x_2 = y x_3$ ist:

$$du_1 = x_3 (u_{11}\, dx + u_{12}\, dy) + (x_1 u_{11} + x_2 u_{12} + x_3 u_{13}) \frac{dx_3}{x_3}.$$

Da aber u_1 nach Satz 10, Nr. 91, homogen vom $(n-1)^{ten}$ Grade ist, so folgt nach Satz 9 ebenda:

$$x_1 u_{11} + x_2 u_{12} + x_3 u_{13} = (n-1) u_1.$$

Also ergibt sich:

$$du_1 = x_3 (u_{11}\, dx + u_{12}\, dy) + (n-1) u_1 \frac{dx_3}{x_3},$$

und ebenso geht hervor:

$$du_2 = x_3 (u_{21}\, dx + u_{22}\, dy) + (n-1) u_2 \frac{dx_3}{x_3}.$$

Weil die Gleichung (1), nicht homogen geschrieben, eine Gleichung zwischen x und y ist, können wir y als Funktion

von x betrachten. Differenzieren wir unter dieser Annahme die Gleichung (3) vollständig, so kommt

$$du_1\,dx + du_2\,dy + u_2\,d^2y = 0$$

oder mit Hilfe der für du_1 und du_2 gefundenen Ausdrücke und wegen (3):

$$(4)\qquad x_3(u_{11}\,dx^2 + 2u_{12}\,dx\,dy + u_{22}\,dy^2) + u_2\,d^2y = 0.$$

Die erste notwendige Bedingung für einen *eigentlichen Wendepunkt* ist nun nach Nr. 172 die Bedingung $d^2y = 0$. Wenn wir sie allein berücksichtigen, so gilt sie auch für die *uneigentlichen* Wendepunkte, also für alle Wendepunkte im weiteren Sinne; und *wir wollen hier diese weitere Auffassung des Begriffes des Wendepunktes annehmen.* Nach (4) wird also, sobald $u_2 \neq 0$ ist, die Bedingung für die Wendepunkte diese:

$$(5)\qquad u_{11}\,dx^2 + 2u_{12}\,dx\,dy + u_{22}\,dy^2 = 0.$$

Wird dagegen für einen Punkt $(x_1 : x_2 : x_3)$ insbesondere $u_2 = 0$, so heißt dies nach Satz 7 in Nr. 175, daß seine Tangente in der Form $\mathfrak{x}_1 u_1 + \mathfrak{x}_3 u_3 = 0$ dargestellt ist, d. h. nicht homogen geschrieben in der Form $\mathfrak{x} = -u_3 : u_1$, also zur y-Achse parallel läuft. Wir wollen vorläufig annehmen, daß kein Wendepunkt eine zur y-Achse parallele Tangente habe, daß also $u_2 \neq 0$ für die Wendepunkte sei; der Fall $u_2 = 0$ soll in der nächsten Nummer besprochen werden.

Es ergab sich für die Wendepunkte die Bedingung (5), in der die Differentiale dx und dy der Gleichung (3) unterworfen sind, so daß die Elimination der Differentiale liefert:

$$(6)\qquad u_{11}u_2{}^2 - 2u_{12}u_1u_2 + u_{22}u_1{}^2 = 0.$$

Diese Gleichung kann anders geschrieben werden. Denn wenn man aus den nach Satz 9 in Nr. 91 *für alle Werte* von x_1, x_2, x_3 bestehenden Gleichungen:

$$(7)\qquad nu = u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3,$$

$$(8)\qquad \begin{cases} (n-1)\,u_1 = u_{11}x_1 + u_{12}x_2 + u_{13}x_3, \\ (n-1)\,u_2 = u_{21}x_1 + u_{22}x_2 + u_{23}x_3, \\ (n-1)\,u_3 = u_{31}x_1 + u_{32}x_2 + u_{33}x_3 \end{cases}$$

die linear auftretenden Größen x_1, x_2 und u_3 eliminiert, so kommt für alle Werte von x_1, x_2, x_3:

$$\begin{vmatrix} nu & u_1 & u_2 & x_3 \\ (n-1)\,u_1 - u_{13}x_3 & u_{11} & u_{12} & 0 \\ (n-1)\,u_2 - u_{23}x_3 & u_{21} & u_{22} & 0 \\ -u_{33}x_3 & u_{31} & u_{32} & -(n-1) \end{vmatrix} = 0$$

oder:

$$(9) \qquad -(n-1)^2\,[u_{11}u_2{}^2 - 2u_{12}u_1u_2 + u_{22}u_1{}^2] = x_3{}^2 \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} \end{vmatrix} - \\ - n\,(n-1)\,u\,(u_{11}u_{22} - u_{12}{}^2).$$

Da u für die Punkte der Kurve verschwindet und $n - 1 \neq 0$ ist, weil wir ja von den geraden Linien absehen werden, so folgt hieraus, daß die Bedingung (6) ersetzt werden kann durch diese:

$$(10) \qquad \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

Man nennt diese Determinante der neun Ableitungen zweiter Ordnung von u die *Hessesche Determinante;* wir wollen sie mit H_u bezeichnen, *so daß also* $H_u = 0$ *die Bedingung für die Wendepunkte der Kurve* $u = 0$ wird. Diese Bedingung ist eine Gleichung, deren linke Seite wieder eine homogene ganze rationale Funktion von x_1, x_2, x_3 ist. Daher definiert die Gleichung (10) eine gewisse algebraische Kurve. Die Wendepunkte der vorgelegten Kurve $u = 0$ sind also unter den Schnittpunkten der einen mit der anderen Kurve enthalten.

179. Fortsetzung der Betrachtung der Wendepunkte. Da die Gleichung (3) der vorigen Nummer den Differentialquotienten $dy : dx = -u_1 : u_2$ liefert, so ist die übrige Rechnung für den Fall, daß für einen Kurvenpunkt sowohl u_1 als auch u_2 verschwindet, deshalb hinfällig, weil der Differentialquotient unbestimmt wird und daher auch d^2y nicht wie oben gefunden werden kann. Derartige Punkte, für die $u_1 = 0$ und $u_2 = 0$ ist, werden wir erst später besprechen. Vorläufig haben wir nur festzustellen: Wenn $u_1 = 0$ und $u_2 = 0$ ist, so wird die Bedingung (6) der vorigen Nummer erfüllt;

aber es ist nicht gesagt, daß dann ein Wendepunkt vorliegt. Die Bedingung $H_u = 0$ gibt also außer den Wendepunkten auch solche Punkte, für die $u_1 = u_2 = 0$ ist. *Für derartige Punkte wird wegen der Gleichung* (7) *der vorigen Nummer und wegen* $u = 0$ *auch* $u_3 = 0$.

Es war in der vorigen Nummer von dem Falle $u_2 = 0$ ausdrücklich abgesehen worden. Ist für einen Wendepunkt $u_2 = 0$, aber $u_1 \neq 0$, so kommt man, wie wir jetzt zeigen wollen, dennoch zu demselben Ergebnisse. Denn in diesem Falle drehen wir das Achsenkreuz wie in Nr. 171 um einen positiven spitzen Winkel α, so daß

$$\bar{x} = x \cos\alpha + y \sin\alpha, \quad \bar{y} = -x \sin\alpha + y \cos\alpha$$

die neuen gewöhnlichen Koordinaten werden. Sind $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3$ die zugehörigen homogenen Koordinaten, d. h. ist $\bar{x} = \bar{x}_1 : \bar{x}_3$ und $\bar{y} = \bar{x}_2 : \bar{x}_3$, so können wir $\bar{x}_3 = x_3$ annehmen und erhalten:

$$(1) \quad \begin{cases} \bar{x}_1 = x_1 \cos\alpha + x_2 \sin\alpha, \quad \bar{x}_2 = -x_1 \sin\alpha + x_2 \cos\alpha, \\ \bar{x}_3 = x_3, \end{cases}$$

oder, nach x_1, x_2, x_3 aufgelöst:

$$(2) \quad \begin{cases} x_1 = \bar{x}_1 \cos\alpha - \bar{x}_2 \sin\alpha, \quad x_2 = \bar{x}_1 \sin\alpha + \bar{x}_2 \cos\alpha, \\ x_3 = \bar{x}_3. \end{cases}$$

Werden diese Werte in die Funktion $u(x_1, x_2, x_3)$ eingeführt, so geht eine homogene ganze rationale Funktion n^{ten} Grades von $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3$ hervor, die wir $\bar{u}$ nennen wollen, so daß $\bar{u} = 0$ die Gleichung der Kurve in den neuen Koordinaten $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3$ wird. Wenn wir analog den Formeln (2) in Nr. 178 die Bezeichnungen:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}_i} = \bar{u}_i, \quad \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}_i \, \partial \bar{x}_k} = \bar{u}_{ik} \qquad (i, k = 1, 2, 3)$$

einführen, so daß $\bar{u}_{ik} = \bar{u}_{ki}$ ist, so folgt aus (1) oder (2):

$$(3) \quad \begin{cases} \bar{u}_1 = u_1 \cos\alpha + u_2 \sin\alpha, \quad \bar{u}_2 = -u_1 \sin\alpha + u_2 \cos\alpha, \\ \bar{u}_3 = u_3 \end{cases}$$

und ferner:

$$\begin{aligned}
\bar{u}_{11} &= u_{11}\cos^2\alpha + 2u_{12}\sin\alpha\cos\alpha + u_{22}\sin^2\alpha,\\
\bar{u}_{12} &= -u_{11}\sin\alpha\cos\alpha + u_{12}(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) + u_{22}\sin\alpha\cos\alpha,\\
\bar{u}_{22} &= u_{11}\sin^2\alpha - 2u_{12}\sin\alpha\cos\alpha + u_{22}\cos^2\alpha,\\
\bar{u}_{13} &= u_{13}\cos\alpha + u_{23}\sin\alpha,\\
\bar{u}_{23} &= -u_{13}\sin\alpha + u_{23}\cos\alpha,\\
\bar{u}_{33} &= u_{33}.
\end{aligned}$$

Durch Einsetzen dieser Werte in die Hessesche Determinante $H_{\bar{u}}$ der Funktion $\bar{u}$, also in

$$H_{\bar{u}} = \begin{vmatrix} \bar{u}_{11} & \bar{u}_{12} & \bar{u}_{13} \\ \bar{u}_{21} & \bar{u}_{22} & \bar{u}_{23} \\ \bar{u}_{31} & \bar{u}_{32} & \bar{u}_{33} \end{vmatrix},$$

ergibt sich einfach:

$$H_{\bar{u}} = H_u. \tag{4}$$

Nach diesen Vorbereitungen fassen wir einen Punkt $(x_1 : x_2 : x_3)$ der Kurve $u = 0$ ins Auge, für den zwar $u_2 = 0$, aber $u_1 \neq 0$ ist. Aus (3) folgt, daß für ihn $\bar{u}_2 = -u_1 \sin\alpha \neq 0$ wird; der Ausnahmefall ist also im neuen Koordinatensysteme kein Ausnahmefall mehr. Man kann daher im neuen Systeme die Betrachtung der vorigen Nummer auch für diesen Punkt durchführen, wodurch man zu der Bedingung $H_{\bar{u}} = 0$ gelangt. Nach (4) aber ist sie dieselbe wie die ursprüngliche Bedingung $H_u = 0$.

Wir haben somit erkannt:

Satz 10: Ist $u(x_1, x_2, x_3) = 0$ die Gleichung einer ebenen algebraischen Kurve, geschrieben in den homogenen Koordinaten x_1, x_2, x_3, bedeutet also u eine homogene ganze rationale Funktion von x_1, x_2, x_3, so liegen alle Wendepunkte der Kurve zugleich auf derjenigen algebraischen Kurve, deren Gleichung durch Nullsetzen der Hesseschen Determinante von u hervorgeht:

$$H_u = 0.$$

Außer in den Wendepunkten trifft diese zweite Kurve die gegebene Kurve noch in denjenigen Punkten $(x_1 : x_2 : x_3)$, die allen drei Gleichungen genügen:

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x_3} = 0.$$

180. Abzählung der Wendepunkte einer algebraischen Kurve. Liegt wie bisher eine algebraische Kurve n^{ter} Ordnung $u = 0$ vor, so sind die Ableitungen zweiter Ordnung von u homogene ganze rationale Funktionen vom Grade $n - 2$, so daß die Hessesche Determinante H_u vom Grade $3(n - 2)$ ist. *Die Wendepunkte einer algebraischen Kurve n^{ter} Ordnung werden daher aus der Kurve durch eine algebraische Kurve von höchstens $3(n - 2)^{\text{ter}}$ Ordnung ausgeschnitten.*

Die beiden Gleichungen $u = 0$ und $H_u = 0$ sind in x_1, x_2, x_3 homogen. Führt man wieder nicht homogene Koordinaten x, y ein, so ergeben sich zwei Gleichungen vom n^{ten} und $3(n-2)^{\text{ten}}$ Grade in x, y. Zwei solche Gleichungen haben bekanntlich höchstens $3n(n - 2)$ gemeinsame Paare von Lösungen x, y; wir sagen *höchstens*, weil die Lösungen zum Teil zusammenfallen oder auch imaginär sein können. Es folgt also, *daß eine algebraische Kurve n^{ter} Ordnung höchstens $3n(n-2)$ Wendepunkte haben kann. Z. B. eine Kurve zweiter Ordnung, ein Kegelschnitt, hat gar keinen Wendepunkt, eine Kurve dritter Ordnung höchstens neun.*

Die ursprüngliche Bedingung für die Wendepunkte war die Gleichung (6) in Nr. 178:

$$u_{11}u_2{}^2 - 2u_{12}u_1u_2 + u_{22}u_1{}^2 = 0. \tag{1}$$

Da u_1, u_2 vom $(n-1)^{\text{ten}}$ Grade und u_{11}, u_{12}, u_{22} vom $(n-2)^{\text{ten}}$ Grade sind, wird dies eine Gleichung vom höchstens $(3n-4)^{\text{ten}}$ Grade, während $H_u = 0$ vom höchstens $(3n - 6)^{\text{ten}}$ Grade ist. Die Erklärung für diesen Unterschied liegt darin, daß die Bedingung (1) infolge der Identität (9) der Nr. 178 und wegen $u = 0$ auch dann erfüllt wird, wenn der darin rechts auftretende Faktor $x_3{}^2 = 0$ ist. Aber wenn $x_3 = 0$ ist, so liegt der Punkt $(x_1 : x_2 : x_3)$ nach Nr. 175 unendlich fern. Daher hat man $x_3{}^2 = 0$ als die Gleichung der unendlich fernen Geraden aufzufassen, und zwar zählt sie doppelt, weil x_3 im Quadrate steht, so daß sie die Kurve $u = 0$ in n doppelt zu zählenden unendlich fernen Punkten trifft. So kommt die Differenz heraus, denn die Kurve (1) trifft die Kurve $u = 0$ in höchstens $n(3n - 4)$ Punkten, dagegen die Kurve $H_u = 0$ trifft sie in höchstens $n(3n - 6)$ Punkten. Der Unterschied beider Zahlen ist gerade $2n$.

Es ist hervorzuheben, daß die Abzählungen eigentlich ein gründlicheres Eingehen auf die Behandlung des Unendlichfernen in der Geometrie der algebraischen Kurven verlangen. Es mag uns jedoch genügen, erkannt zu haben, daß eine algebraische Kurve n^{ter} Ordnung nicht mehr als $3n(n-2)$ Wendepunkte haben kann.

Streng genommen haben wir selbst dies nicht exakt bewiesen, denn es wäre ja denkbar, daß die Kurve $u = 0$ und $H_u = 0$ ganze Zweige miteinander gemein haben könnten. Wir wollen jedoch auf diesen Punkt nicht näher eingehen und den Exkurs in die Geometrie der algebraischen Kurven hiermit beschließen.

§ 3. Singuläre Punkte.

181. Beispiel eines Endpunktes. Es sei die Funktion

$$y = e^{\frac{1}{x}}$$

vorgelegt. Sie ist nach Nr. 8 stets positiv und für alle Werte von x im Intervalle $-\infty < x < 0$ und im Intervalle $0 < x < +\infty$ definiert. Dort ist sie überall stetig und hat die Ableitung:

$$y' = -\frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}.$$

Für $\lim x = +\infty$ und $\lim x = -\infty$ hat die Funktion den Grenzwert Eins und ihre Ableitung den Grenzwert Null. Sonst ist y' überall negativ.

In den beiden Intervallen $-\infty < x < 0$ und $0 < x < +\infty$ ist das Bild der Funktion nach Nr. 167 eine *Kurve.* Wir gelangen so zu zwei Kurvenzweigen, die die Gerade $y = 1$ zur Asymptote haben (vgl. Nr. 171) und beständig fallen. Diese beiden Kurvenzweige hängen aber nicht zusammen. Für $x = 0$ nämlich ist y nicht mehr eindeutig definiert. Wenn x *wachsend* nach Null strebt, so strebt y nach $e^{-\infty}$ oder Null; wenn x *abnehmend* nach Null strebt, so strebt y nach $e^{+\infty}$ oder $+\infty$. Aus dem 5. Beispiele in Nr. 131 (worin x durch $-x$, a durch e, n durch 2 zu ersetzen und die Funktion mit -1 zu multiplizieren ist) sieht man ferner, daß y' für bis Null wachsendes x

den Grenzwert Null, für bis Null abnehmendes x den Grenzwert $-\infty$ hat. Während daher der rechte Kurvenzweig die y-Achse zur Asymptote hat, siehe Fig. 30, endet der linke im Nullpunkte, dort die x-Achse berührend. Der linke Kurvenzweig hat also in O einen *Endpunkt.*

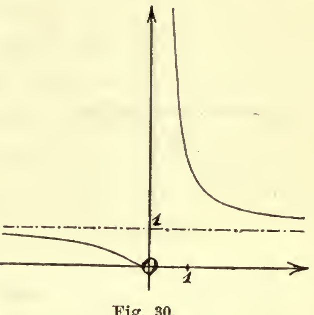


Fig. 30.

182. Beispiel eines Eckpunktes. Es sei nunmehr die Funktion vorgelegt:

$$y = \frac{x}{1 + e^{\frac{1}{x}}}.$$

Sie ist für alle Werte von x definiert, denn auch bei $\lim x = 0$ wird der Grenzwert, den y für wachsendes x erreicht, derselbe wie der, den y für abnehmendes x erreicht, nämlich Null. Die Funktion ist für jedes x stetig, insbesondere für $x = 0$. Letzteres folgt so: Ist h eine sehr kleine positive Zahl und $x = h$, so wird der Nenner sehr groß; indem man h hinreichend klein wählt, kann man erreichen, daß y beliebig wenig von Null abweicht. Ist $x = -h$, so wird der Nenner sehr wenig von Eins verschieden; indem man h hinreichend klein wählt, kann man auch jetzt erreichen, daß y beliebig wenig von Null abweicht. Für $\lim x = +\infty$ hat y den Grenzwert $+\infty$, für $\lim x = -\infty$ den Grenzwert $-\infty$. Die Bildkurve hat eine Asymptote, denn es ergeben sich die Grenzwerte:

$$g = \lim_{x=\pm\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x=\pm\infty} \frac{1}{1 + e^{\frac{1}{x}}} = \frac{1}{2},$$

$$h = \lim_{x=\pm\infty} (y - gx) = \lim_{x=\pm\infty} \frac{x}{2} \frac{1 - e^{\frac{1}{x}}}{1 + e^{\frac{1}{x}}} = \frac{1}{4} \lim_{x=\pm\infty} \frac{1 - e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}} = -\frac{1}{4},$$

so daß die Gerade

$$\mathfrak{y} = \frac{1}{2}\mathfrak{x} - \frac{1}{4}$$

nach Satz 1 in Nr. 171 sowohl für $\lim x = +\infty$ als auch für $\lim x = -\infty$ eine Asymptote vorstellt. Sie ist in Fig. 31

angegeben. Ferner hat y für jedes endliche x eine bestimmte endliche Ableitung, *abgesehen von der Stelle* $x = 0$. Hier, wo ja auch $y = 0$ wird, müßte nämlich die Ableitung, wenn sie vorhanden wäre, nach der Definition in Nr. 27 gleich dem Grenzwerte von $y : x$ für $x = 0$ sein. Es kommt aber:

$$\lim_{x=0} \frac{y}{x} = \lim_{x=0} \frac{1}{1 + e^{\frac{1}{x}}} = 0 \text{ oder } 1,$$

Fig. 31.

je nachdem x von positiven oder von negativen Werten nach Null strebt. Daher ergeben sich als Bild der Funktion zwei Kurvenzüge, die sich zwar im Anfangspunkte O treffen, aber dort verschiedene Tangenten haben. Die linke Tangente halbiert den Winkel der Achsen, die rechte ist die Abszissenachse. Daher werden wir den Kurvenpunkt O einen *Eckpunkt* nennen. Die Voraussetzungen der Nr. 167 sind für alle Werte von x außer für $x = 0$ erfüllt. Schon in Nr. 27 (vgl. Fig. 17 auf S. 43) sprachen wir gelegentlich von einem Eckpunkte.

183. Beispiel eines Doppelpunktes. Wir gehen jetzt von der Gleichung aus:

$$(1) \qquad y^2 - x(x - a)^2 = 0.$$

Dabei bedeute a eine *positive* Konstante. Die Gleichung definiert zwei Funktionen y von x, nämlich

$$y = (x - a)\left|\sqrt{x}\right| \quad \text{und} \quad y = -(x - a)\left|\sqrt{x}\right|.$$

Beide Funktionen sind nur für *positives* x reell, die zweite ist dabei der ersten entgegengesetzt gleich. Ihre Bildkurve geht daher aus der Bildkurve der ersten hervor, wenn diese Kurve um die x-Achse herumgeklappt oder, anders gesagt, an der x-Achse gespiegelt wird. Betrachten wir daher vorerst nur die Bildkurve der ersten Funktion. Hier ist y negativ für $0 < x < a$ und positiv für $x > a$. Es ist ferner:

$$y' = \left|\sqrt{x}\right| + \frac{x - a}{2\left|\sqrt{x}\right|}.$$

Für $x = 0$ wird $y = 0$ und y' negativ unendlich; die Kurve berührt im Anfangspunkte O die y-Achse, indem sie nach

unten geht. Ihre tiefste Stelle liegt da, wo $y' = 0$ wird, hat also die Abszisse $x = \frac{1}{3}a$ und eine negative Ordinate. (Siehe Fig. 32, worin $a = 3$ angenommen ist.) Von da an steigt die Kurve, indem sie an der Stelle $x = a$ die Abszissenachse überschreitet, und zwar ist $y' = |\sqrt{a}|$ für $x = a$. Für $x > a$ steigt die Kurve immer höher und höher. Die zweite Funktion $y = -(x - a)|\sqrt{x}|$ hat die durch Spiegelung an der x-Achse hervorgehende Bildkurve. Beide Zweige zusammen bilden die Kurve, die durch die vorgelegte Gleichung (1) definiert wird. Das Vorhergehende lehrt, daß die Gesamtkurve ein stetiger Zug ist, der sich an der Stelle $x = a$ der Abszissenachse selbst durchschneidet. Diese Stelle heißt daher ein *Doppelpunkt* der Kurve; ihm gehören zwei Tangenten zu, indem hier die beiden Werte $y' = \pm |\sqrt{a}|$ gelten. Wenn wir die linke Seite von (1) mit F bezeichnen, so wird:

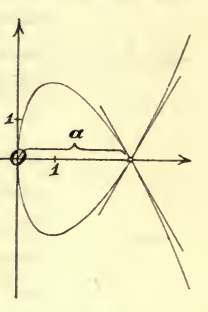


Fig. 32.

$$F_x = -(x - a)(3x - a), \quad F_y = 2y.$$

Beide Werte sind gleich Null für $x = a$, $y = 0$ und für $x = \frac{1}{3}a$, $y = 0$. Das zweite Wertepaar genügt jedoch der Gleichung (1) nicht, sondern nur das erste Paar $x = a$, $y = 0$, das zu dem Doppelpunkte gehört. Daraus folgt:

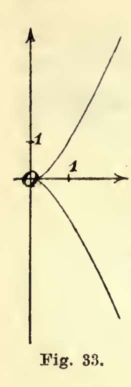
Der Doppelpunkt ist hier analytisch als derjenige Punkt der Kurve $F = 0$ charakterisiert, für den sowohl F_x als auch F_y gleich Null ist.

184. Beispiel einer Spitze. Anstatt a in der Gleichung (1) der vorigen Nummer positiv anzunehmen, wählen wir jetzt $a = 0$. Wir gehen also von der Gleichung aus:

$$(1) \qquad y^2 - x^3 = 0.$$

Hier sind wieder zunächst zwei verschiedene Funktionen $y = x|\sqrt{x}|$ und $y = -x|\sqrt{x}|$ zu betrachten, deren Bilder auch jetzt die x-Achse zur Symmetrielinie haben. Wieder muß x positiv genommen werden. Das Bild der ersten Funktion hat lauter positive Ordinaten. Es ist hier:

$$y' = \tfrac{3}{2}|\sqrt{x}|,$$


Fig. 33.

also stets positiv und gleich Null nur für $x = 0$. Das Bild ist also eine vom Anfangspunkte O ansteigende und hier die positive Abszissenachse berührende Linie. Klappen wir sie um die x-Achse herum, so geht das Bild von $y = -x\left|\sqrt{x}\right|$ hervor. Beide zusammen, siehe Fig. 33, geben die durch (1) definierte Kurve. Sie hat an der Stelle O eine *Spitze*. Wenn wir die linke Seite von (1) mit F bezeichnen, so wird $F_x = -3x^2$, $F_y = 2y$, und beide Werte sind gleich Null nur für $x = y = 0$. Daraus folgt:

Die Spitze ist hier analytisch als derjenige Punkt der Kurve $F = 0$ charakterisiert, für den sowohl F_x als auch F_y gleich Null ist.

185. Beispiel eines isolierten Punktes. Wir benutzen wieder die in Nr. 183 angenommene Gleichung (1), ersetzen aber a durch $-a$, schreiben also:

$$(1) \qquad y^2 - x(x+a)^2 = 0,$$

wo a eine *positive* Konstante bedeuten soll. Wir betrachten wieder die beiden einzelnen Funktionen:

$$y = (x+a)\left|\sqrt{x}\right| \quad \text{und} \quad y = -(x+a)\left|\sqrt{x}\right|.$$

Das Bild der zweiten geht aus dem der ersten durch Spiegelung an der Abszissenachse hervor. Da $\sqrt{x}$ auftritt, könnte man vermuten, daß x stets positiv sein müßte. Aber *eine* Ausnahme muß doch gemacht werden: Weil der Faktor $x + a$ auftritt, so ist y auch für $x = -a$ reell, nämlich gleich Null.

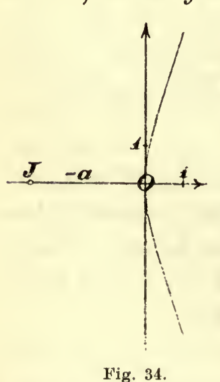


Fig. 34.

Hier tritt also der merkwürdige Fall ein, daß die durch (1) definierte Kurve (siehe Fig. 34, worin $a = 3$ gewählt worden ist), zwar nur im Gebiete positiver Abszissen verläuft, aber noch ein vereinzelter Punkt J, nämlich der Punkt $(-a, 0)$ der negativen Abszissenachse, zu ihr gehört. Er heißt ein *isolierter Punkt*. Wenn wir die linke Seite von (1) mit F bezeichnen, so wird

$$F_x = -(x+a)(3x+a), \quad F_y = 2y.$$

Beide Werte sind gleich Null für $x = -a$, $y = 0$ und für $x = -\frac{1}{3}a$, $y = 0$, aber das zweite Wertsystem genügt der Gleichung (1) nicht und gehört daher auch gar nicht zu einem Kurvenpunkte. Also folgt:

Der isolierte Punkt ist hier analytisch als derjenige Punkt der Kurve $F = 0$ charakterisiert, für den sowohl F_x als auch F_y gleich Null ist.

186. Beispiel einer Schnabelspitze. Es sei die Gleichung vorgelegt:

$$(1) \qquad (y - x^2)^2 - x^5 = 0.$$

Ihr genügen zwei Funktionen y von x, nämlich:

$$y = x^2(1 + |\sqrt{x}|) \quad \text{und} \quad y = x^2(1 - |\sqrt{x}|),$$

die nur für positives x definiert und stetig sind. Beide Funktionen werden durch Kurvenzweige dargestellt, die vom Nullpunkte O ausgehen. Es wird:

$$y' = \tfrac{1}{2}x(4 + 5|\sqrt{x}|) \quad \text{bzw.} \quad y' = \tfrac{1}{2}x(4 - 5|\sqrt{x}|).$$

Für $x = 0$ sind beide Werte y' gleich Null. Beide Zweige berühren also in O die positive x-Achse. Die erste Funktion y ist stets positiv und wächst beständig, die zweite ist positiv für jedes positive $x < 1$, dagegen negativ für $x > 1$ und hat ihr Maximum für $x = (\frac{4}{5})^2$. Infolgedessen ergibt sich das Bild in Fig. 35. Der Anfangspunkt O ist wie in dem Beispiele in Nr. 184 eine *Spitze*, wenn beide Kurvenzweige zusammen als eine Kurve aufgefaßt werden. Aber diese Spitze unterscheidet sich von der Spitze in Fig. 33 dadurch, daß jetzt beide Kurvenzweige in der Umgebung der Spitze auf derselben Seite der Spitzentangente liegen. Die Spitze heißt deshalb eine *Schnabelspitze*. Wird die linke Seite von (1) mit F bezeichnet, so kommt:

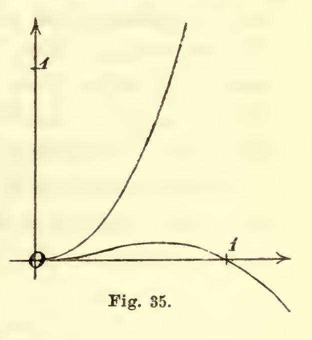


Fig. 35.

$$F_x = -4(y - x^2)x - 5x^4, \quad F_y = 2(y - x^2).$$

Beide Werte sind gleich Null nur für $x = 0$, $y = 0$. Also folgt:

Die Schnabelspitze ist hier analytisch als derjenige Punkt der Kurve $F = 0$ charakterisiert, für den sowohl F_x als auch F_y gleich Null ist.

187. Definition der regulären und singulären Punkte. In den Nummern 181 bis 186 haben wir in einer Reihe von Beispielen gesehen, daß auf Kurven gewisse merkwürdige Punkte vorkommen können. Dabei sind die Beispiele der beiden ersten Nummern von anderer Art als die übrigen. Denn in Nr. 181 und 182 wurde eine *entwickelte* Funktion y von x betrachtet. Es zeigte sich, daß sie in einem gewissen Bereiche von x stetig und differenzierbar war, also den Bedingungen genügte, die wir in Nr. 167 für eine *Kurve* aufstellten. Der *Endpunkt* in Nr. 181 und der *Eckpunkt* in Nr. 182 dagegen gehörten zu Stellen x, für die jene Bedingungen nicht mehr erfüllt waren. Denn der Endpunkt gehörte zu einem Werte von x, für den y zwei Werte (0 und $+\infty$) hatte, und der Eckpunkt gehörte zu einem Werte von x, für den y' zwei Werte (1 und 0) hatte. Streng genommen gehören also diese Punkte nicht mehr zur Kurve, wenn wir den Kurvenbegriff in der engen Fassung wie in Nr. 167 behalten wollen. Man wird aber diese einzelnen Punkte als *singuläre* Punkte doch zu den Kurven hinzurechnen, indem man die anderen Kurvenpunkte zum Unterschiede von ihnen als *reguläre* bezeichnen kann.

In den Beispielen der Nummern 183 bis 186 dagegen war y als Funktion von x durch eine Gleichung zwischen x und y gegeben:

$$F(x, y) = 0,$$

indem nacheinander für F die Funktionen gewählt wurden:

$$y^2 - x(x-a)^2, \quad y^2 - x^3, \quad y^2 - x(x+a)^2, \quad (y - x^2)^2 - x^5.$$

Alle diese Funktionen $F(x, y)$ sind für alle Wertepaare x, y, wenn man x und y als unabhängige Veränderliche auffaßt, also nicht der Bedingung $F = 0$ unterwirft, wohl definiert und stetig und haben stetige partielle Ableitungen von allen Ordnungen nach x und y. Daß dennoch solche merkwürdige Stellen, wie ein Doppelpunkt, eine Spitze, ein isolierter Punkt und eine Schnabelspitze, auftreten können, hat seinen Grund

darin, daß y an x durch die *Gleichung* $F = 0$ gebunden wurde. Diese Gleichung definierte nämlich in den Beispielen jedesmal *zwei* entwickelte Funktionen y von x; zu ihnen gehörten zwei Kurvenzweige, die wir dann zu einer Kurve zusammenfaßten. Wir haben also die Definition der Kurve, wie sie in Nr. 167 gegeben wurde, hierbei erweitert, indem wir die Gesamtheit *aller* Punkte (x, y), deren Koordinaten einer Gleichung $F(x, y) = 0$ genügen, als eine Kurve bezeichnen. So kommen jene *singulären* Punkte in den Nummern 183 bis 186 zustande.

Wir wollen in den folgenden Nummern des gegenwärtigen Paragraphen *unter einer Kurve den Inbegriff aller Punkte verstehen, deren Koordinaten x, y eine Funktion $F(x, y)$ gleich Null machen. Doch soll diese Funktion in der Umgebung eines betrachteten Kurvenpunktes (x_0, y_0) nach dem Taylorschen Satze als unendliche Reihe nach positiven ganzen Potenzen von $x - x_0$ und $y - y_0$ entwickelbar sein.* Vgl. Satz 29 in Nr. 137.

Diese Voraussetzung ist z. B. immer erfüllt, wenn es sich um eine *algebraische* Kurve handelt. Denn in Nr. 177 definierten wir eine algebraische Kurve durch eine gleich Null gesetzte homogene ganze rationale Funktion der drei homogenen Koordinaten x_1, x_2, x_3; wird aber $x_3 = 1$ gesetzt, so werden x_1 und x_2 nach Nr. 175 die gewöhnlichen Punktkoordinaten x und y, so daß also eine *algebraische Kurve in der Ebene als der Inbegriff aller Punkte (x, y) zu definieren ist, deren Koordinaten x, y eine ganze rationale Funktion $F(x, y)$ gleich Null machen.* Die ganzen rationalen Funktionen von x und y sind aber in der Umgebung einer jeden Stelle x_0, y_0 in *endliche* Reihen nach ganzen positiven Potenzen von $x - x_0$ und $y - y_0$ entwickelbar, da die Potenzen einen gewissen Grad nicht überschreiten.

Infolge der gemachten Voraussetzung haben F_x und F_y in der Umgebung der Stelle (x_0, y_0) bestimmte endliche Werte.

Wir definieren nun: *Regulär sollen alle diejenigen Punkte (x, y) der Kurve $F(x, y) = 0$ heißen, für die F_x und F_y nicht beide gleich Null sind. Wenn dagegen für einen Kurvenpunkt (x, y) sowohl F_x als auch F_y gleich Null ist, so soll er singulär heißen.* Es sind dies rein analytische Definitionen; ihre geometrische Bedeutung werden wir in den folgenden Nummern

besprechen. Man sieht vorläufig, daß die in Nr. 183 bis 186 besprochenen besonderen Punkte nach dieser Definition singulär sind.

Die unter (4) in Nr. 169 angegebenen Gleichungen der Kurventangente und -normale sind für einen singulären Punkt nichtssagend, da die Koeffizienten verschwinden. *Die Betrachtungen über Berührung in höherer Ordnung und über Konvexität und Konkavität sowie über Wendepunkte in den Nummern 172 und 173 gelten nur für reguläre, nicht für singuläre Punkte.*

Wir bemerken außerdem, daß sich für eine in *homogenen* Koordinaten x_1, x_2, x_3 dargestellte Kurve $u(x_1, x_2, x_3) = 0$ die Merkmale $F_x = 0$, $F_y = 0$ des singulären Punktes nach (3) in Nr. 178 in der Form $u_1 = 0$, $u_2 = 0$ darstellen, und daß diese beiden Gleichungen die Gleichung $u_3 = 0$ nach sich ziehen, wie schon in Nr. 179 gezeigt wurde. *Die in Satz 10 der Nr. 179 erwähnte Hessesche Kurve $H_u = 0$ trifft also die Kurve $u = 0$ außer in ihren Wendepunkten noch in ihren singulären Punkten.*

Wegen der obigen Voraussetzungen über die Funktion $F(x, y)$ haben wir bei unseren Definitionen von vornherein *solche Punkte ganz ausgeschlossen, an denen Unstetigkeiten eintreten,* also Punkte wie den Endpunkt in Nr. 181 und den Eckpunkt in Nr. 182, und zwar deshalb, weil es keine allgemeine Methode zur Behandlung solcher Punkte gibt.

Schließlich noch eine Anmerkung: Wenn die Kurve durch eine aufgelöste Gleichung $y = f(x)$ gegeben wird und $f(x)$ nach dem Taylorschen Satze nach Potenzen von $x - x_0$ entwickelbar ist, so erfüllt die Funktion $F(x, y) = y - f(x)$ die Bedingungen, denen wir oben die Funktion F unterwarfen. Da aber hier $F_y = 1 \neq 0$ ist, so treten *keine* singulären Punkte auf.

188. Reihenentwicklung an einer regulären Stelle. Es sei $F(x, y)$ gleich Null *insbesondere für* $x = 0$, $y = 0$, und ferner sei $F(x, y)$ in der Umgebung dieses Wertepaares nach dem Taylorschen Satze nach ganzen positiven Potenzen von x und y entwickelbar. Alsdann gehört der Anfangspunkt O zur Kurve $F(x, y) = 0$, und es ist für hinreichend kleine Werte von $|x|$ und $|y|$:

$$(1) \quad F(x, y) = (A_{10}x + A_{01}y) + (A_{20}x^2 + 2A_{11}xy + A_{02}y^2) + \\ + (A_{30}x^3 + 3A_{21}x^2y + 3A_{12}xy^2 + A_{03}y^3) + \cdots.$$

Wir werden im dritten Bande zeigen, daß man eine solche in der Umgebung von $x = 0$, $y = 0$ unbedingt konvergente Reihe gliedweise differenzieren darf. Das muß, nebenbei gesagt, besonders bewiesen werden, weil der Satz 12 in Nr. 34 von der gliedweisen Differentiation einer Summe nur für solche Summen bewiesen worden ist, die eine *endliche* Anzahl von Summanden haben. Nehmen wir also an, daß die Reihe gliedweise differenziert werden darf, so folgt:

$$(2)\begin{cases} F_x = A_{10} + 2(A_{20}x + A_{11}y) + 3(A_{30}x^2 + 2A_{21}xy + A_{12}y^2) + \cdots, \\ F_y = A_{01} + 2(A_{11}x + A_{02}y) + 3(A_{21}x^2 + 2A_{12}xy + A_{03}y^2) + \cdots, \end{cases}$$

also, wenn der Index Null die Substitution der Werte $x = 0$, $y = 0$ andeutet:

$$(3) \qquad F_x^{(0)} = A_{10}, \quad F_y^{(0)} = A_{01}.$$

Nach der Definition in voriger Nummer ist somit der Nullpunkt O ein *regulärer Kurvenpunkt, wenn* A_{10} *und* A_{01} *nicht beide gleich Null sind.* Ist $A_{01} = 0$, aber $A_{10} \neq 0$, so können wir immer durch Vertauschen der Koordinatenachsen erreichen, daß $A_{01} \neq 0$ wird. Es bedeutet also keine wesentliche Beschränkung der Allgemeinheit, wenn wir an der regulären Stelle O insbesondere voraussetzen:

$$(4) \qquad F_y^{(0)} = A_{01} \neq 0.$$

Wir werden im dritten Bande beweisen, daß es alsdann eine und nur eine Funktion $y = f(x)$ von x gibt, die für $x = 0$ ebenfalls verschwindet, die ferner in der Umgebung von $x = 0$ nach ganzen positiven Potenzen von x nach dem Taylorschen Satze entwickelbar ist und die drittens, in $F(x, y)$ für y eingesetzt, diese Funktion F gleich Null macht für alle Werte x in der Umgebung von $x = 0$, so daß $y = f(x)$ die Darstellung der Kurve in der Umgebung des regulären Punktes O ist. Hier können wir von allem diesen vorläufig nur Eines dartun, nämlich daß es *höchstens eine* solche Reihenentwicklung:

$$(5) \qquad y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots$$

geben kann, die der Bedingung $F = 0$ in der Umgebung von $x = 0$ genügen könnte. Dabei machen wir wieder davon Gebrauch, daß, wenn eine solche Reihe in der Umgebung von $x = 0$ unbedingt konvergiert, sie dort auch gliedweise differen-

ziert werden darf, was wir, wie gesagt, erst später beweisen. Um jene eine Reihe (5) zu berechnen, verfahren wir so:

Aus (2) folgt:

$$F_{xx} = 1 \cdot 2 A_{20} + 2 \cdot 3 (A_{30} x + A_{21} y) + \cdots,$$
$$F_{xy} = 1 \cdot 2 A_{11} + 2 \cdot 3 (A_{21} x + A_{12} y) + \cdots,$$
$$F_{yy} = 1 \cdot 2 A_{02} + 2 \cdot 3 (A_{12} x + A_{03} y) + \cdots,$$

also für $x = 0$, $y = 0$:

$$F^{(0)}_{xx} = 2 A_{20}, \quad F^{(0)}_{xy} = 2 A_{11}, \quad F^{(0)}_{yy} = 2 A_{02}.$$

Entsprechend lassen sich die höheren Ableitungen von F für $x = 0$, $y = 0$ durch die Koeffizienten A leicht ausdrücken. Nach (5) muß andererseits sein:

$$y' = 1 \cdot a_1 + 2 \cdot a_2 x + 3 \cdot a_3 x^2 + \cdots,$$
$$y'' = 1 \cdot 2 \cdot a_2 + 2 \cdot 3 \cdot a_3 x + \cdots,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

woraus für $x = 0$ folgt:

$$(6) \quad y_0' = 1 \cdot a_1, \quad y_0'' = 1 \cdot 2 \; a_2, \quad y_0''' = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot a_3, \cdots.$$

Nun fordern wir zunächst, daß die Funktion y von x in (5) gleich Null für $x = 0$ sei. Also ist $a_0 = 0$ anzunehmen. Die Funktion (5) soll die Gleichung $F(x, y) = 0$ in der Umgebung von $x = 0$ befriedigen. Dies ist jetzt für $x = 0$ selbst der Fall, da $F(0, 0) = 0$ ist. Aber durch vollständige Differentiation von $F = 0$ nach x ergeben sich nacheinander die Gleichungen:

$$(7) \quad \begin{cases} F_x + F_y y' = 0, \\ F_{xx} + 2 F_{xy} y' + F_{yy} y'^2 + F_y y'' = 0, \\ F_{xxx} + 3 F_{xxy} y' + 3 F_{xyy} y'^2 + F_{yyy} y'^3 \\ \qquad + 3 (F_{xy} + F_{yy} y') y'' + F_y y''' = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots, \end{cases}$$

wobei besonders beachtet werden möge, daß *jedesmal die Ableitung höchsten Grades von y mit F_y multipliziert ist.* Indem wir jetzt $x = 0$ annehmen und die Werte (6) einsetzen, erhalten wir eine Reihe von Gleichungen, von denen die erste a_1, die zweite außerdem a_2, die dritte noch a_3 usw. enthält. Denn es treten diese Größen wegen (3) multipliziert mit A_{01}, $1 \cdot 2 A_{01}$, $1 \cdot 2 \cdot 3 A_{01}$ usw. auf. Weil $A_{01} \neq 0$ nach (4) ist,

dienen also die Gleichungen (7) zur sukzessiven *eindeutigen* Berechnung *endlicher* Werte von $a_1, a_2, a_3, \ldots$.

Trotzdem wir ohne Beweis die gliedweise Differentiation von unendlichen Reihen benutzt haben, haben wir doch das Eine hieraus erkannt, *daß es nur eine unendliche Reihe* (5) *geben kann, die der Bedingung $F(x, y) = 0$ in der Umgebung von $x = 0$ genügt, sobald $F_y^{(0)}$ nicht verschwindet.* Wenn $F_y^{(0)} = 0$, aber $F_x^{(0)} \neq 0$ ist, so können wir durch Vertauschung der Rollen, die x und y spielen, ebenso einsehen, daß es nur eine unendliche Reihe

$$x = b_0 + b_1 y + b_2 y^2 + b_3 y^3 + \ldots$$

geben kann, die der Bedingung $F(x, y) = 0$ in der Umgebung von $y = 0$ genügt.

Wir haben jedoch *nicht* bewiesen, daß diese unendlichen Reihen, die in ihrer Art einzig sind, wirklich konvergieren. Vielmehr hat unsere Betrachtung noch große Lücken, die erst später ausgefüllt werden können.

Daß wir $x_0 = 0$ und $y_0 = 0$ wählten, war natürlich eine Einschränkung ohne jede Bedeutung. Genau dieselbe Überlegung wie in der Umgebung der Stelle $x = 0$, $y = 0$ läßt sich in der Umgebung irgend einer Stelle (x_0, y_0) machen, wenn in den gebrauchten unendlichen Reihen überall x und y durch $x - x_0$ und $y - y_0$ ersetzt werden. *An einer regulären Stelle (x_0, y_0) können wir somit gerade eine unendliche Reihe für $y - y_0$ nach ganzen positiven Potenzen von $x - x_0$ berechnen oder, wenn $F_y = 0$ für $x = x_0$, $y = y_0$ ist, eine unendliche Reihe für $x - x_0$ nach ganzen positiven Potenzen von $y - y_0$; und wir werden später beweisen, daß die gefundene Reihe unbedingt konvergiert.*

189. Reihenentwicklung an einer singulären Stelle. Die Methode der vorigen Nummer versagt, wenn der Punkt (0, 0) ein singulärer Punkt der Kurve $F(x, y) = 0$ ist, d. h. wenn nicht nur F, sondern auch F_x und F_y gleich Null für $x = 0$, $y = 0$ sind. Dann nämlich muß nach (3) in voriger Nummer

$$A_{10} = 0, \quad A_{01} = 0$$

angenommen werden, so daß die erste Gleichung (7) für

$x = 0$, $y = 0$ zur Identität wird. Wir können also aus ihr keine Folgerung ziehen, beginnen vielmehr mit der zweiten Gleichung (7). Sie liefert für $x = 0$, $y = 0$, da $F_y^{(0)} = 0$ ist und die Werte (6) einzusetzen sind, die Gleichung:

$$F_{xx}^{(0)} + 2F_{xy}^{(0)} a_1 + F_{yy}^{(0)} a_1^2 = 0, \tag{1}$$

d. h. eine *quadratische Gleichung zur Berechnung von* a_1.

Wir wollen vorerst annehmen, *sie habe zwei reelle verschiedene Wurzeln* a_1, d. h. es sei

$$F_{xy}^{(0)2} - F_{xx}^{(0)} F_{yy}^{(0)} > 0 \tag{2}$$

und

$$F_{yy}^{(0)} \neq 0.$$

Ist übrigens $F_{yy}^{(0)} = 0$, so kann man statt einer Reihenentwicklung von y nach Potenzen von x eine solche von x nach Potenzen von y suchen, wenn $F_{xx}^{(0)} \neq 0$ ist. Wenn wir also hier im folgenden $F_{yy}^{(0)} \neq 0$ voraussetzen, so bedeutet dies keine wesentliche Beschränkung der allgemeineren Voraussetzung: *Es sollen nicht beide Größen* $F_{xx}^{(0)}$ *und* $F_{yy}^{(0)}$ *gleich Null sein.*

Wir erhalten aus (1) zwei reelle verschiedene Werte von a_1, etwa a_1' und a_1''. Wenn wir nun die dritte, vierte usw. Gleichung (7) der vorigen Nummer für $x = 0$, $y = 0$ bilden, so sehen wir, daß die dritte, da jetzt $F_y^{(0)} = 0$ ist, wegen der Substitutionen (6) der vorigen Nummer a_2 bestimmt, die vierte a_3 usw. Denn die dabei auftretenden Koeffizienten von a_2, a_3 usw. würden nur dann gleich Null sein, wenn $F_{xy} + F_{yy}y'$ für $x = 0$, $y = 0$ gleich Null, d. h. $F_{xy}^{(0)} + F_{yy}^{(0)} a_1 = 0$ wäre. Dann aber hätte unsere quadratische Gleichung (1) gegen die Voraussetzung eine Doppelwurzel.

Demnach haben wir nunmehr, da für a_1 zwei Werte a_1' und a_1'' zu setzen sind, eine Reihe von Gleichungen vor uns, aus denen sich *zwei* Reihen von Werten für $a_2, a_3, a_4, \ldots$ ergeben, die wir mit $a_2', a_3', a_4', \ldots$ und mit $a_2'', a_3'', a_4'', \ldots$ bezeichnen wollen, so daß wir zu *zwei* Entwicklungen:

$$y = a_1'x + a_2'x^2 + a_3'x^3 + \cdots,$$
$$y = a_1''x + a_2''x^2 + a_3''x^3 + \cdots$$

gelangen, die, in $F(x, y)$ eingesetzt, die Forderung $F(x, y) = 0$

in der Umgebung der Stelle $x = 0$, $y = 0$ *formal* erfüllen. Es läßt sich, worauf wir hier nicht eingehen, zeigen, daß diese Entwicklungen in der Umgebung von $x = 0$ unbedingt konvergieren und also *zwei Kurvenzweige* definieren, die durch den singulären Nullpunkt gehen. Beide Kurvenzweige sind sicher verschieden, da $a_1' \neq a_1''$ ist. Es liegt also jetzt im Nullpunkte ein *Doppelpunkt* der Kurve vor. Man kann nämlich überdies zeigen, — was wir hier ebenfalls nicht tun wollen —, daß dies die beiden einzigen Kurvenzweige sind, die durch den Nullpunkt gehen.

Wir haben also rein formal und abgesehen von gewissen notwendigen Ergänzungen erkannt, *daß ein Punkt* (x_0, y_0) *der Kurve* $F(x, y) = 0$ *ein Doppelpunkt ist, wenn* F, F_x, F_y *für* $x = x_0$, $y = y_0$ *gleich Null sind, dagegen* $F_{xy}^2 - F_{xx}F_{yy}$ *für* $x = x_0$, $y = y_0$ *positiv ist und* F_{xx} *und* F_{yy} *für* $x = x_0$, $y = y_0$ *nicht beide verschwinden.* Nämlich das, was wir hier nur der größeren Einfachheit der Formeln halber für den Nullpunkt ableiteten, hätten wir ebenso für irgend einen anderen Punkt (x_0, y_0) der Kurve finden können, wenn wir $y - y_0$ nach Potenzen von $x - x_0$ entwickelt hätten.

Wenn dagegen $F_{xy}^2 - F_{xx}F_{yy} < 0$ für $x = x_0$, $y = y_0$ ist, so hat die quadratische Gleichung für a_1 keine reelle Wurzel. Wir kommen alsdann zwar auch zu zwei Reihenentwicklungen, aber ihre Koeffizienten sind imaginär. Es läßt sich zeigen, daß dann überhaupt keine (reellen) Kurvenzweige durch den betrachteten singulären Punkt gehen. *Im Falle also, wo* F, F_x *und* F_y *an der Stelle* (x_0, y_0) *gleich Null sind,* $F_{xy}^2 - F_{xx}F_{yy}$ *ebenda negativ ist und* F_{xx} *und* F_{yy} *nicht beide verschwinden, ist der Punkt* (x_0, y_0) *ein isolierter Punkt der Kurve* $F = 0$.

Beispiel: Liegt die Kurve

$$F = y^2 - x(x-a)^2 = 0$$

vor, so ist, wie wir in Nr. 183 sahen, $F = 0$, $F_x = 0$, $F_y = 0$ nur für $x = a$, $y = 0$. Es ist nun $F_{xx} = 4a - 6x$, $F_{xy} = 0$, $F_{yy} = 2$, also für den singulären Punkt $F_{xy}^2 - F_{xx}F_{yy} = 4a$. Ist $a > 0$, so ist der Punkt folglich ein Doppelpunkt; ist $a < 0$, so ist er ein isolierter Punkt. Hierzu vgl. Nr. 185, wo a durch $-a$ ersetzt worden war.

190. Fortsetzung der Betrachtung singulärer Stellen. Wir wollen jetzt annehmen, daß für $x = 0$, $y = 0$ nicht nur F, F_x und F_y, sondern auch $F_{xy}^2 - F_{xx}F_{yy} = 0$ sei. Alsdann hat die in voriger Nummer angegebene quadratische Gleichung (1) für a_1 eine *Doppelwurzel*, für die also auch $F_{xy}^{(0)} + F_{yy}^{(0)} a_1 = 0$ ist. Von den Gleichungen (7) in Nr. 188 fällt die erste wieder weg, während die zweite für $x = 0$, $y = 0$ jene quadratische Gleichung für a_1 und die dritte eine kubische Gleichung für a_1 gibt:

$$F_{xxx}^{(0)} + 3F_{xxy}^{(0)} a_1 + 3F_{xyy}^{(0)} a_1{}^2 + F_{yyy}^{(0)} a_1{}^3 = 0.$$

Im allgemeinen wird die Doppelwurzel a_1 nicht auch diese kubische Gleichung befriedigen, d. h. *es stellt sich der formalen Berechnung der Reihenentwicklung hier ein Hindernis entgegen.* Es ist dies ein anderes Hindernis als im Falle des isolierten Punktes. Dort nämlich kann man immer noch Reihenentwicklungen finden, die jedoch imaginär sind, während hier ein direkter Widerspruch vorkommt.

Da also keine Reihenentwicklung von y nach ganzen positiven Potenzen von x und ebenso keine von x nach ganzen positiven Potenzen von y vorhanden ist, muß man einen anderen Weg einschlagen. Um dies zu erläutern, wollen wir zunächst das Achsenkreuz in eine bequemere Lage bringen, indem wir es um einen Winkel α drehen. Sind x_1, y_1 die neuen rechtwinkligen Koordinaten, so ist wie unter (7) in Nr. 171:

$$(1) \qquad x_1 = x \cos\alpha + y \sin\alpha, \qquad y_1 = -x \sin\alpha + y \cos\alpha,$$

also:

$$x = x_1 \cos\alpha - y_1 \sin\alpha, \qquad y = x_1 \sin\alpha + y_1 \cos\alpha.$$

Daher wird jetzt $F(x, y)$, wenn diese Werte von x und y eingesetzt werden, eine Funktion $\Phi(x_1, y_1)$. Dabei ergibt sich genau so, wie wir in Nr. 179 die Ableitungen der neuen Funktion $\bar{u}$ berechneten:

$$(2) \qquad \Phi_{x_1} = F_x \cos\alpha + F_y \sin\alpha, \quad \Phi_{y_1} = -F_x \sin\alpha + F_y \cos\alpha,$$

$$(3) \qquad \begin{cases} \Phi_{x_1x_1} = F_{xx} \cos^2\alpha + 2F_{xy} \sin\alpha\cos\alpha + F_{yy} \sin^2\alpha, \\ \Phi_{x_1y_1} = -F_{xx} \sin\alpha\cos\alpha + F_{xy}(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) + F_{yy} \sin\alpha\cos\alpha, \\ \Phi_{y_1y_1} = F_{xx} \sin^2\alpha - 2F_{xy} \sin\alpha\cos\alpha + F_{yy} \cos^2\alpha. \end{cases}$$

Aus (2) folgt, daß für den Nullpunkt $\Phi_{x_1} = \Phi_{y_1} = 0$ wird, da für ihn $F_x = F_y = 0$ ist. Ferner wird nach (3):

$$\Phi_{x_1 y_1}^2 - \Phi_{x_1 y_1} \Phi_{y_1 y_1} = F_{xy}^2 - F_{xx} F_{yy},$$

also nach wie vor:

$$\Phi_{x_1 y_1}^{(0)2} - \Phi_{x_1 x_1}^{(0)} \Phi_{y_1 y_1}^{(0)} = 0.$$

Aber wir können den Winkel α so wählen, daß außerdem $\Phi_{x_1 x_1}^{(0)} = 0$ wird, wegen der ersten Gleichung (3).

Man sieht hieraus, daß wir uns ohne Beeinträchtigung der Allgemeinheit auf den Fall beschränken können, daß insbesondere $F_{xx}^{(0)} = 0$ ist. Da für $x = 0$, $y = 0$ der Ausdruck $F_{xy}^2 - F_{xx} F_{yy}$ verschwinden soll, so ist auch $F_{xy}^{(0)} = 0$. Folglich nimmt die in Nr. 188 unter (1) angegebene Reihenentwicklung für $F(x, y)$ die speziellere Form an:

$$(4) \quad F(x, y) = A_{02} y^2 + (A_{30} x^3 + 3 A_{21} x^2 y + 3 A_{12} x y^2 + A_{03} y^3) + \cdots.$$

Welchen Charakter nunmehr der singuläre Nullpunkt hat, wollen wir nur in dem Falle erschöpfend untersuchen, wo

$$A_{02} \neq 0$$

ist, d. h. *wo nicht alle Glieder zweiter Ordnung in der Entwicklung von $F(x, y)$ verschwinden.* Die Ergebnisse fallen verschieden aus, je nachdem $A_{30} \neq 0$ oder $= 0$ ist.

Es sei zunächst:

$$A_{30} \neq 0.$$

Je nachdem x positiv oder negativ ist, können wir x mit ξ^2 oder $-\xi^2$ bezeichnen. Wir setzen also $x = \varepsilon \xi^2$, wo $\varepsilon = \pm 1$ sein darf. Ferner werde $y : x$ mit η bezeichnet. Dies bedeutet: Es sollen neue Veränderliche ξ und η vermöge der Substitution

$$(5) \qquad x = \varepsilon \xi^2, \quad y = \varepsilon \xi^2 \eta \qquad (\varepsilon = \pm 1)$$

eingeführt werden. Aus der Gleichung $F(x, y) = 0$ wird dann eine Gleichung in ξ und η, deren linke Seite nach dem Taylorschen Satze nach positiven ganzen Potenzen von ξ und η in der Umgebung des Wertepaares $\xi = 0$, $\eta = 0$ entwickelbar ist. Von ihr läßt sich der Faktor ξ^4 absondern, was geschehen darf, da ja $\xi = 0$ nach (5) auch $x = 0$, $y = 0$ nach sich zieht, während wir nicht diesen Nullpunkt, sondern seine Umgebung betrachten wollen, wo x und y nicht beide gleich Null sind. Es bleibt demnach die Gleichung:

$$\varepsilon A_{02}\eta^2 + (A_{30}\xi^2 + 3A_{21}\xi^2\eta + 3A_{12}\xi^2\eta^2 + A_{03}\xi^2\eta^3) +$$
$$\varepsilon(A_{40}\xi^4 + 4A_{31}\xi^4\eta + 6A_{22}\xi^4\eta^2 + 4A_{13}\xi^4\eta^3 + A_{04}\xi^4\eta^4) + \cdots = 0$$

oder, wenn wir die Glieder nach ihren Dimensionen ordnen:

$$(6) \qquad (A_{30}\xi^2 + \varepsilon A_{02}\eta^2) + \cdots = 0,$$

wo die Glieder von höherer als zweiter Dimension nur durch Punkte angedeutet sind. Jetzt liegt rechnerisch wieder der in voriger Nummer besprochene Fall vor, indem an Stelle von

$$F = (A_{20}x^2 + 2A_{11}xy + A_{02}y^2) + \cdots = 0$$

die neue Gleichung (6) zu nehmen ist. Die zugehörige quadratische Gleichung für a_1 wird hier:

$$A_{30} + \varepsilon A_{02}a_1{}^2 = 0.$$

Nach Voraussetzung ist $A_{30} \neq 0$ und $A_{02} \neq 0$. Sind beide vom selben bzw. von verschiedenen Vorzeichen, so ergeben sich daher für a_1 zwei verschiedene reelle Werte a_1' und a_1'', wenn $\varepsilon = -1$ bzw. $\varepsilon = +1$ ist. *Dabei ist* $a_1'' = -a_1'$. Wenn wir also $\varepsilon = +1$ oder -1 nach dieser Maßgabe wählen, so erkennen wir, daß sich wie in voriger Nummer in jedem Falle zwei Reihen ergeben:

$$\eta = a_1'\xi + a_2'\xi^2 + a_3'\xi^3 + \cdots,$$
$$\eta = a_1''\xi + a_2''\xi^2 + a_3''\xi^3 + \cdots,$$

wobei $a_1'' = -a_1'$ ist. Nach (5) gibt es also in der Umgebung des Nullpunktes zwei Darstellungen:

$$x = \varepsilon\xi^2, \quad y = \varepsilon\xi^2(a_1'\xi + a_2'\xi^2 + a_3'\xi^3 + \cdots)$$

und

$$x = \varepsilon\xi^2, \quad y = \varepsilon\xi^2(a_1''\xi + a_2''\xi^2 + a_3''\xi^3 + \cdots)$$

der Kurve mittels einer *Hilfsveränderlichen* ξ, daher zwei Kurvenzweige. Da ε den bestimmten Wert $+1$ oder -1 bedeutet, ist x entweder für beide Zweige positiv oder für beide negativ. Ferner wird beim ersten Zweige:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy:d\xi}{dx:d\xi} = a_1'\xi + a_2'\xi^2 + \cdots + \tfrac{1}{2}\xi(a_1' + 2a_2'\xi + \cdots),$$

also für $\xi = 0$ auch $dy:dx = 0$, ebenso beim zweiten Zweige Beide Zweige berühren daher im Nullpunkte die x-Achse und zwar die positive, wenn $\varepsilon = +1$ ist, dagegen die negative, wenn $\varepsilon = -1$ ist. Wir setzen natürlich immer den noch unbewiesenen Umstand voraus, daß die gefundenen Reihen gültige

Taylorsche Entwicklungen seien. Sie haben nach Satz 22 in Nr. 115 für hinreichend kleines $|\xi|$ dasselbe Vorzeichen wie ihre ersten Glieder $\varepsilon a_1'\xi^3$ und $\varepsilon a_1''\xi^3$. Da $a_1'' = -a_1'$ ist, so folgt, daß die beiden Kurvenzweige im Falle $\varepsilon = +1$ im Nullpunkte die *positive* x-Achse auf *verschiedenen* Seiten berühren und im Falle $\varepsilon = -1$ ebenso die *negative* x-Achse. Es liegt daher eine *Spitze* vor wie in Nr. 184. Man nennt einen derartigen Punkt aus einleuchtendem Grunde auch einen *Rückkehrpunkt*.

Wir betrachten jetzt den Fall:

$$A_{30} = 0$$

und wollen neue Veränderliche ξ und η vermöge:

$$x = \xi, \quad y = \xi\eta \tag{7}$$

einführen, so daß die Gleichung (4), aus der sich ξ^2 forthebt, lautet:

$$A_{02}\eta^2 + (3A_{21}\xi\eta + 3A_{12}\xi\eta^2 + A_{03}\xi\eta^3) + (A_{40}\xi^2 + 4A_{31}\xi^2\eta + \cdots) + \cdots = 0$$

oder, wenn wir nur die Glieder von der niedrigsten, nämlich zweiten, Dimension wirklich angeben:

$$(A_{40}\xi^2 + 3A_{21}\xi\eta + A_{02}\eta^2) + \cdots = 0.$$

Wie man sieht, liegt jetzt rechnerisch wieder der Fall von Nr. 189 vor. Wir schließen daher: Ist

$$9A_{21}^2 - 4A_{02}A_{40} < 0,$$

so gibt es keine reellen, sondern nur imaginäre Entwicklungen von η nach Potenzen von ξ (oder umgekehrt). Der Nullpunkt wird daher ein *isolierter* Kurvenpunkt sein.

Ist dagegen

$$9A_{21}^2 - 4A_{02}A_{40} > 0$$

und $A_{02} \neq 0$, so gibt es zwei verschiedene Entwicklungen von η nach Potenzen von ξ, so daß wegen (7) zwei Kurvenzweige hervorgehen:

$$\begin{cases} y = x(a_1'x + a_2'x^2 + a_3'x^3 + \cdots), \\ y = x(a_1''x + a_2''x^2 + a_3''x^3 + \cdots), \end{cases} \tag{8}$$

wobei $a_1' \neq a_1''$ ist. Wenn aber $A_{02} = 0$, dagegen $A_{40} \neq 0$ ist, so gibt es zwei verschiedene Entwicklungen von ξ nach Potenzen von η, so daß wegen (7) wieder zwei Kurvenzweige

hervorgehen, die mittels einer Hilfsveränderlichen η so dargestellt werden:

$$(9)\quad \begin{cases} x = a_1' \eta + a_2' \eta^2 + \cdots, & y = \eta(a_1' \eta + a_2' \eta^2 + \cdots) \\ \text{und:} \\ x = a_1'' \eta + a_2'' \eta^2 + \cdots, & y = \eta(a_1'' \eta + a_2'' \eta^2 + \cdots). \end{cases}$$

Im Falle (8) liefert $x = 0$ für beide Zweige $y = 0$ und auch $dy : dx = 0$. Da x positiv oder negativ sein kann, so besteht die Kurve in der Umgebung des Nullpunktes aus zwei Zweigen, die im Nullpunkte die x-Achse berühren, *aber dort nicht ihr Ende haben.* Es liegt daher eine *Stelle* vor, *an der die Kurve sich selbst berührt,* aber keine Spitze hat.

Im Falle (9) ergibt sich derselbe Charakter des Nullpunktes, da dann bei beiden Zweigen für $\eta = 0$ sowohl x und y als auch $dy : dx$ gleich Null wird. Der Fall, daß A_{02} und A_{40} beide gleich Null sind, ist beiseite gelassen worden; ebenso wollen wir auf den Fall $9A_{21}^2 - 4A_{02}A_{40} = 0$ nicht näher eingehen. Man hat in diesen Fällen weitergehende Untersuchungen anzustellen. Z. B. gehört hierher die in Nr. 186 aufgetretene *Schnabelspitze.*

191. Allgemeine Bemerkungen über singuläre Stellen. In Nr. 188 haben wir, um auf wenigstens einigermaßen sicherem Grunde genauere Untersuchungen über singuläre Stellen durchführen zu können, über die Funktion $F(x, y)$, durch deren Nullsetzen eine Kurve definiert wird, ziemlich beschränkende Voraussetzungen gemacht. Die Gleichungen der Tangente und Normale unter (4) in Nr. 169 sind aber, wie wir schon in Nr. 187 hervorhoben, stets nichtssagend, sobald für einen Kurvenpunkt F_x und F_y beide gleich Null werden.

Wir sagen daher jetzt allgemeiner:

Ist $F(x, y)$ innerhalb eines gewissen Variabilitätsbereiches für x und y definiert und stetig und sind F_x und F_y innerhalb dieses Bereiches vorhanden, so soll ein Punkt (x, y) der Kurve $F(x, y) = 0$ nur dann regulär heißen, wenn für ihn F_x und F_y nicht alle beide gleich Null sind. Andernfalls heißt er singulär. Wenn wir später Betrachtungen für die Umgebung eines Kurvenpunktes (x, y) anstellen, so soll dabei immer ein regu-

lärer Punkt ins Auge gefaßt sein, wenn nicht ausdrücklich anderes gesagt wird.

Ist $y = f(x)$ die Kurvengleichung und die Funktion $f(x)$ in einem Bereiche für x stetig und differenzierbar, so ist die Kurve dort überall regulär, wie schon in Nr. 187 betont wurde.

Wird die Kurve mittels einer Hilfsveränderlichen t dargestellt in der Form:

$$(1) \qquad x = \varphi(t), \quad y = \psi(t)$$

und sind $\varphi(t)$ und $\psi(t)$ innerhalb eines Bereiches für t stetig und differenzierbar, so können singuläre Stellen verschieden charakterisiert sein: Denn wenn wir die Kurve in der Form $y = f(x)$ darstellen wollen, so müssen wir, vgl. Nr. 168, zunächst t als Funktion von x gewinnen. Aber zu allen Werten von t innerhalb eines Intervalles $\alpha < t < \beta$ können solche Werte von x vermöge $x = \varphi(t)$ gehören, die ein Intervall $a < x < b$ derart erfüllen, daß z. B. zu jedem x im Intervalle $a < x < b$ insgesamt n Werte von t im Intervalle $\alpha < t < \beta$ gehören. Es gibt dann n zu $x = \varphi(t)$ inverse Funktionen $t = \Phi(x)$, so daß $y = \psi(\Phi(x))$ insgesamt n Kurvenzweige darstellt, wenn x von a bis b wächst. Daher kann es sehr wohl sein, daß mehrere dieser Kurven einander schneiden, wodurch Doppelpunkte oder mehrfache Punkte hervorgehen.

Mithin ist, sobald wir die *gesamte* durch (1) definierte Kurve betrachten, ein Punkt (x_0, y_0) singulär, wenn die Funktionen x und y für mindestens zwei *verschiedene* Werte t_0 und t_0' dieselben Werte x_0 und y_0 annehmen. Wenn wir uns alsdann aber auf Werte von t in der Umgebung von t_0 beschränken, so verliert ein solcher Punkt seinen singulären Charakter, *so daß derartige Singularitäten nicht vorkommen, sobald wir uns auf ein hinreichend kleines Intervall von Werten der Hilfsveränderlichen t beschränken.* In der Tat gelang uns ja die Diskussion einiger singulärer Stellen in den letzten Nummern durch Einführung einer Hilfsveränderlichen ξ oder η, wodurch es uns möglich wurde, die durch einen singulären Punkt gehenden Kurvenzweige voneinander rechnerisch zu *trennen.*

Aber die Kurve (1) kann noch andere singuläre Punkte

haben: Wenn zu den Werten von t innerhalb eines Intervalles $\alpha < t < \beta$ solche Werte von x gehören, die innerhalb des Intervalles $a < x < b$ liegen und dies Intervall nur *einfach* erfüllen, so gibt es zwar nur eine zu $x = \varphi(t)$ inverse Funktion $t = \Phi(x)$, so daß wir zur Darstellung $y = \psi(\Phi(x))$ gelangen können, jedoch muß dabei von solchen Werten von t abgesehen werden, für die $\varphi'(t) = 0$ ist, weil dort der Differentialquotient von $\Phi(x)$ nach Satz 18 in Nr. 37 unstetig wird. Immerhin kann man diesen Ausnahmefall vermeiden, wenn für den betreffenden Wert von t nicht auch $\psi'(t) = 0$ ist, weil man alsdann t als die zu $y = \psi(t)$ inverse Funktion $t = \Psi(y)$ auffassen und in $x = \varphi(t)$ einsetzen kann, so daß man zu einer nach x aufgelösten Kurvengleichung $x = \varphi(\Psi(y))$ gelangt, indem nur die Rolle der beiden Koordinaten x und y vertauscht werden. Das geht jedoch nicht mehr, *wenn für ein und denselben Wert von t sowohl $\varphi'(t)$ als auch $\psi'(t)$ gleich Null ist.*

Wir wollen daher annehmen, für $t = t_0$ sei $\varphi'(t_0) = 0$ und $\psi'(t_0) = 0$. Wir setzen $\varphi(t_0) = x_0$ und $\psi(t_0) = y_0$. Ferner mögen $\varphi(t)$, $\psi(t)$ nebst ihren Ableitungen erster, zweiter und dritter Ordnung in der Umgebung von $t = t_0$ bestimmte endliche Werte haben. Nach Satz 19 in Nr. 112 ist dann für hinreichend kleines $|h|$:

$$x = \varphi(t) = x_0 + \varphi''(t_0)\frac{h^2}{2} + R_3,$$

$$y = \psi(t) = y_0 + \psi''(t_0)\frac{h^2}{2} + S_3,$$

wobei die Reste R_3 und S_3 nach Satz 22 in Nr. 115 ohne Einfluß auf die Vorzeichen von

$$x - x_0 = \varphi''(t_0)\frac{h^2}{2} + R_3, \quad y - y_0 = \psi''(t_0)\frac{h^2}{2} + S_3$$

sind, wenn wir noch $\varphi''(t_0) \neq 0$ und $\psi''(t_0) \neq 0$ annehmen. Daher hat $x - x_0$ für positives und negatives h in der Umgebung von $h = 0$ dasselbe Zeichen wie $\varphi''(t_0)$ und ebenso $y - y_0$ dasselbe wie $\psi''(t_0)$, d. h. die Kurvenpunkte, die sich für $t > t_0$, und diejenigen, die sich für $t < t_0$ in der Umgebung von (x_0, y_0) ergeben, liegen alle in ein und demselben von den vier rechten Winkeln, die bestimmt werden, wenn man durch den Punkt

(x_0, y_0) die Parallelen zu den Achsen legt. Außerdem ist für positives und negatives h:

$$\lim_{h=0} \frac{y-y_0}{x-x_0} = \frac{\psi''(t_0)}{\varphi''(t_0)}.$$

Ziehen wir durch den Punkt (x_0, y_0) die Gerade, deren Winkel τ mit der x-Achse durch

$$\operatorname{tg} \tau = \frac{\psi''(t_0)}{\varphi''(t_0)}$$

gegeben ist, so verlassen also die beiden Kurvenzweige, die für $t < t_0$ und $t > t_0$ hervorgehen, den Punkt (x_0, y_0) in der Weise, daß sie dort diese Gerade nach derselben Richtung vom Punkte (x_0, y_0) aus berühren, d. h. die Kurve hat im Punkte (x_0, y_0) eine *Spitze*. Noch höhere Singularitäten ergeben sich, wenn $\varphi''(t_0)$ und $\psi''(t_0)$ verschwindet.

Hiernach sind diejenigen Punkte der Kurve $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, für die sowohl $\varphi'(t)$ als auch $\psi'(t)$ gleich Null ist, als singulär zu bezeichnen. In der Tat werden auch die Gleichungen der Tangente und der Normale, die in Nr. 169 unter (7) angegeben sind, für solche Punkte nichtssagend.

§ 4. Differentialquotient der Fläche und der Bogenlänge.

192. Der Flächeninhalt bei einer ebenen Kurve. Das Bild der Funktion

$$y = f(x)$$

sei eine Kurve, die innerhalb eines Intervalles positive Ordinaten habe. Siehe Fig. 36. Wir errichten eine bestimmte Ordinate AC und die zu einer veränderlichen Abszisse $x = OP\,(> OA)$ gehörige Ordinate $y = PM$. Beide Ordinaten schließen zusammen mit der Abszissenachse und der Kurve ein *Flächenstück* $APMC$ ein. Wenn wir als Flächeneinheit das Quadrat wählen, dessen Seitenlänge die Längeneinheit ist, so wird dieses Flächenstück $APMC$, gemessen mit der Flächeneinheit, eine gewisse Größe u haben. Über die Art,

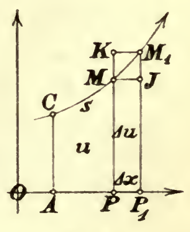


Fig. 36.

wie man die Fläche $APMC$ ausmessen kann, werden wir erst

im zweiten Bande sprechen. Wir begnügen uns hier damit, daß die Fläche u geometrisch definiert ist.

Ändert sich die Abszisse $x = OP$, so ändert sich auch der Flächeninhalt u. Zu jedem Werte von x gehört ein Wert von u, wenigstens solange x innerhalb eines gewissen Intervalles bleibt. *Also ist die Fläche u eine Funktion der Abszisse x.*

Lassen wir die Abszisse x um $\Delta x = PP_1$ wachsen, so erfährt die Fläche u eine Zunahme Δu. Wenn $P_1 M_1$ die Ordinate ist, die zu $x + \Delta x$ gehört, so bedeutet Δu die Fläche, die zwischen PM, $P_1 M_1$, der Abszissenachse und der Kurve liegt. Nehmen wir zunächst an, daß die Kurve von M bis M_1 beständig steige oder falle, so liegt die Fläche Δu zwischen den Flächen zweier Rechtecke, die sich ergeben, wenn wir durch M und M_1 die Parallelen MJ und KM_1 zur Abszissenachse ziehen, nämlich zwischen den Flächen der Rechtecke PP_1JM und PP_1M_1K:

$$PP_1JM \lesseqgtr PP_1M_1M \lesseqgtr PP_1M_1K.$$

Hierbei gelten wie auch nachher die oberen oder unteren Zeichen, je nachdem die Kurve von M bis M_1 beständig steigt oder fällt. Nun ist $P_1 M_1$ die zu $x + \Delta x$ gehörige Ordinate, also gleich $y + \Delta y$. Daher kommt:

$$y \Delta x \lesseqgtr \Delta u \lesseqgtr (y + \Delta y) \Delta x.$$

Solche Ungleichungen bestehen auch, wenn wir mit Δx dividieren; nur hat man, wenn Δx negativ angenommen wird, $>$ mit $<$ zu vertauschen. In jedem Falle wird also:

$$y < \frac{\Delta u}{\Delta x} < y + \Delta y \quad \text{oder} \quad y > \frac{\Delta u}{\Delta x} > y + \Delta y.$$

Ist $y = f(x)$ eine stetige Funktion, so wird $\lim \Delta y = 0$ für $\lim \Delta x = 0$. Also ergibt sich für $\lim \Delta x = 0$ nach Satz 34 in Nr. 25, daß der *Differenzenquotient* $\Delta u : \Delta x$ einen bestimmten endlichen Grenzwert hat, der daher der *Differentialquotient* der Fläche u nach der unabhängigen Veränderlichen x ist (vgl. Nr. 32):

$$\frac{du}{dx} = y = f(x).$$

Diese Formel ist unter der Voraussetzung bewiesen worden, daß die Kurve von M bis M_1 beständig steige oder beständig

falle, so daß von M bis M_1 eine der beiden Endordinaten PM und P_1M_1 die größte und die andere die kleinste ist. Diese Voraussetzung kann fallen gelassen werden, denn die Beweisführung gilt auch, wenn die kleinste und die größte Ordinate von M bis M_1 irgendwo zwischen PM und P_1M_1 liegen. Ist nämlich k der kleinste und g der größte Wert, den y in dem Intervalle von x bis $x + \Delta x$ annimmt, so wird wieder:

$$k\Delta x \lesseqgtr \Delta u \lesseqgtr g\Delta x,$$

wo die oberen oder unteren Zeichen gelten, je nachdem Δx positiv oder negativ ist. Hieraus folgt durch Division mit Δx, weil dann $>$ mit $<$ zu vertauschen ist, sobald Δx negativ gewählt wird, in jedem Falle:

$$k < \frac{\Delta u}{\Delta x} < g$$

oder, was dasselbe ist:

$$k < \frac{\Delta u}{\Delta x} < k + (g - k).$$

Außerdem ist im Intervalle von x bis $x + \Delta x$:

$$k \leqq y \leqq k + (g - k).$$

Für $\lim \Delta x = 0$ wird $g - k$, weil $y = f(x)$ stetig ist, zu Null und folglich $\lim k = y$. Also kommt wie vorhin:

$$\frac{du}{dx} = y = f(x).$$

Satz 11: Ist die Funktion $f(x)$ stetig und positiv in dem Intervalle von x_0 bis $x\,(> x_0)$ und bedeutet u den Inhalt desjenigen Flächenstückes, das von der Abszissenachse, von den zu x_0 und x gehörigen Ordinaten und von der Kurve $y = f(x)$ begrenzt wird, so ist u eine solche Funktion der veränderlichen Abszisse x, deren Ableitung gleich der Ordinate $f(x)$ ist:

$$\frac{du}{dx} = f(x).$$

Wir machen darauf aufmerksam, daß wir nur die Stetigkeit von $f(x)$ vorausgesetzt haben, nicht die Differenzierbarkeit, daß also der Kurvenbegriff hier in weiterem Sinne als in Nr. 167 genommen werden darf.

193. Die Bogenlänge einer ebenen Kurve. Der in voriger Nummer betrachteten Kurve kommt von C bis M

eine gewisse *Bogenlänge* s zu. Ohne hier auf die exakte Definition dieses Begriffes einzugehen, die erst der zweite Band bringen soll, können wir uns doch folgendes vorstellen:

Es sei unter Beibehaltung der Bezeichnungen der vorigen Nummer und der Fig. 36 von C bis M längs der Kurve ein unausdehnbarer Faden hingelegt. Alsdann werde er abgenommen, gerade gespannt und mittels der Längeneinheit des Koordinatensystems abgemessen, wodurch die Bogenlänge s von C bis M hervorgeht. Bei dieser Vorstellung setzen wir unbewiesen voraus, daß die Länge endlich sei. Außerdem sind die Begriffe der Biegsamkeit und Unausdehnbarkeit nicht definiert.

Der Punkt C habe die Abszisse $x_0 = OA$ und sei fest gewählt. Dagegen habe der Endpunkt M eine beliebige Lage auf der Kurve, seine Abszisse $OP = x$ sei also veränderlich. Alsdann ist s eine Funktion von x. Nehmen wir ihre Existenz ohne weiteres an, so können wir schon jetzt beweisen, daß sie eine Ableitung hat, und können diese Ableitung berechnen. Es wachse nämlich x wie in voriger Nummer um Δx, wobei s um Δs wachse. Dann bedeutet Δs den Bogen MM_1. Wir wollen s *positiv rechnen im Sinne wachsender Abszissen*, so daß Δs mit Δx positiv ist. Es ist nun die *Sehne* MM_1 gleich:

$$\sqrt{MJ^2 + JM_1^2} \quad \text{oder} \quad \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}.$$

Rechnen wir auch die Sehne MM_1 mit Δx positiv, so wird:

$$\text{Sehne } MM_1 = \Delta x \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2},$$

und diese Quadratwurzel muß *positiv* sein. Daher ist:

$$\frac{\text{Sehne } MM_1}{MJ} = \frac{\text{Sehne } MM_1}{\Delta x} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}.$$

Nun haben wir:

$$\frac{\Delta s}{\Delta x} = \frac{\text{Bogen } MM_1}{MJ} = \frac{\text{Bogen } MM_1}{\text{Sehne } MM_1} \cdot \frac{\text{Sehne } MM_1}{MJ} = \frac{\text{Bogen } MM_1}{\text{Sehne } MM_1} \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}.$$

Im zweiten Bande werden wir zeigen, daß das Verhältnis des Bogens MM_1 zur Sehne MM_1 für $\lim \Delta x = 0$ den Grenzwert Eins hat. Also kommt:

$$\lim_{\Delta x = 0} \frac{\Delta s}{\Delta x} = \lim_{\Delta x = 0} \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2},$$

folglich:

$$(1) \qquad \frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2},$$

falls $y = f(x)$ eine Ableitung hat. Der Satz, nach dem der Grenzwert aus dem Verhältnisse des Bogens zur Sehne gleich Eins ist, wird im zweiten Bande unter der Voraussetzung bewiesen werden, *daß* $y = f(x)$ *in der Umgebung der betrachteten Stelle* x *stetig ist und eine stetige Ableitung hat. Unter dieser Voraussetzung also stellt* (1) *die Ableitung der Bogenlänge* s *nach der Abszisse* x *vor, und zwar ist dabei, falls* s *mit* x *wachsend definiert wird, die Quadratwurzel positiv.* Für das *Differential* ds *der Bogenlänge* gilt die Formel

$$(2) \qquad ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}.$$

Man nennt dies Differential auch das *Bogenelement.*

Wird die Kurve in der Form $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ gegeben, so ist daher, falls $\varphi(t)$ und $\psi(t)$ in der Umgebung der betrachteten Stelle t stetig sind und stetige Differentialquotienten haben, aber Stellen vermieden werden, wo $\varphi'(t)$ und $\psi'(t)$ beide gleich Null sind (vgl. Nr. 191):

$$(3) \qquad ds = \sqrt{\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2}\, dt.$$

Da wir es aber nach Nr. 169 vorziehen, die Kurve im Sinne wachsender Werte von t zu durchlaufen, so rechnen wir s alsdann wachsend mit wachsendem t. Infolge davon muß die Quadratwurzel in (3) *positiv* gewählt werden. Der Differentialquotient der Bogenlänge hat mithin den Wert

$$(4) \qquad \frac{ds}{dt} = \sqrt{\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2}$$

mit positiver Quadratwurzel.

194. Die Bogenlänge als unabhängige Veränderliche. Formeln, die sich auf die Theorie der ebenen Kurven beziehen, werden häufig besonders einfach, wenn die Bogenlänge s als unabhängige Veränderliche gewählt wird.

Nach (4) in voriger Nummer ist, wenn t die Bogenlänge s selbst bedeuten soll, $\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2 = 1$. Wenn also

$$x = \varphi(s), \quad y = \psi(s)$$

eine Darstellung der Kurve mit Hilfe der Bogenlänge s bedeutet, so ist für beliebiges s:

$$\varphi'(s)^2 + \psi'(s)^2 = 1.$$

Nach (5) in Nr. 169 ergibt sich dann für den Tangentenwinkel τ:

$$\sin\tau = \frac{dy}{ds}, \quad \cos\tau = \frac{dx}{ds}. \tag{1}$$

§ 5. Krümmung der ebenen Kurven.

195. Das Krümmungsmaß. Es sei die Bildkurve der Funktion

$$y = f(x)$$

vorgelegt; die Funktion $f(x)$ sei nebst ihrem ersten und zweiten Differentialquotienten in dem zu betrachtenden Intervalle überall stetig. Ist M oder (x, y) ein Punkt der Kurve, die nach Nr. 169 im Sinne wachsender der Abszissen durchlaufen wird, und bedeutet τ den zugehörigen Tangentenwinkel, siehe Fig. 37, so wird sich τ ändern, wenn M auf der Kurve fortwandert. Gelangt M nach M_1, indem die Abszisse um Δx wächst, so gehöre zu M_1 der Tangentenwinkel $\tau + \Delta\tau$. Alsdann gibt $\Delta\tau$ den Richtungsunterschied zwischen der neuen und der alten Tangente an. Er hat sich dadurch herausgestellt, daß M eine gewisse Bogenlänge Δs bis M_1 zurückgelegt hat. *Der Bruch* $\Delta\tau : \Delta s$ *heißt die mittlere oder durchschnittliche Krümmung des Kurvenstückes von* M *bis* M_1. Hätte ein Punkt dasselbe Kurvenstück rückwärts durchlaufen, so wäre Δs negativ, aber auch $\Delta\tau$ hätte das Zeichen gewechselt. Es hätte sich also derselbe Wert für die mittlere Krümmung ergeben.

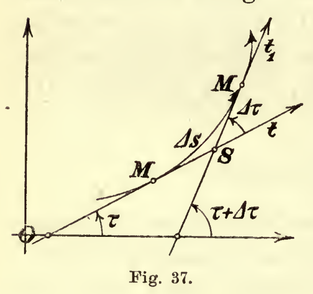


Fig. 37.

Wenn sich die Tangenten t von M und t_1 von M_1 in S schneiden, so ist hier $\sphericalangle(t, t_1) = \Delta\tau$. In der Figur haben wir $\Delta\tau$ positiv gewählt; man erkennt aber, daß $\Delta\tau$ positiv oder negativ

wird, je nachdem die Kurve von unten gesehen konvex oder konkav ist.

Wenn der Punkt M_1 immer näher bei M gewählt wird, so läßt sich zeigen, daß die mittlere Krümmung $\Delta\tau : \Delta s$ einem Grenzwerte zustrebt. Es ist nämlich

$$\frac{\Delta\tau}{\Delta s} = \frac{\Delta\tau}{\text{Sehne } MM_1} \cdot \frac{\text{Sehne } MM_1}{\text{Bogen } MM_1},$$

wobei die Sehne MM_1 nach Nr. 193 gleich

$$\Delta x \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}$$

und die Quadratwurzel positiv ist. Wir benutzen wieder den in Nr. 193 erwähnten Satz, wonach der Grenzwert des Verhältnisses der Sehne zum Bogen gleich Eins ist. Daraus folgt jetzt:

$$\lim_{\Delta x = 0} \frac{\Delta\tau}{\Delta s} = \lim_{\Delta x = 0} \frac{\Delta\tau}{\Delta x \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}}.$$

Wegen $\tau = \operatorname{arc\,tg} y'$ (vgl. (1) in Nr. 169) ist aber:

$$\lim_{\Delta x = 0} \frac{\Delta\tau}{\Delta x} = \frac{d \operatorname{arc\,tg} y'}{dx} = \frac{y''}{1 + y'^2}.$$

Außerdem hat $\Delta y : \Delta x$ den Grenzwert y'. Mithin hat $\Delta\tau : \Delta s$ den Grenzwert:

$$\frac{d\tau}{ds} = \frac{y''}{\sqrt{1 + y'^2}^3}, \tag{1}$$

wo die Wurzel positiv ist.

Dieser Grenzwert $d\tau : ds$ der mittleren Krümmung $\Delta\tau : \Delta s$, der also hervorgeht, wenn M_1 immer näher an M heranrückt, ist die mittlere Krümmung des zur Grenze Null strebenden Kurvenbogens MM_1 und heißt das *Krümmungsmaß oder die Krümmung der Kurve im Punkte M.* Das Differential $d\tau$ des Tangentenwinkels heißt der *Kontingenzwinkel*, so daß wir nach (1) sagen können: *Die Krümmung ist der Quotient von Kontingenzwinkel und Bogenelement.* Sie hat das Plus- oder Minuszeichen, je nachdem $y'' > 0$ oder < 0 ist, d. h. *je nachdem die Kurve an der betreffenden Stelle M von unten gesehen konvex oder konkav ist*, vgl. Satz 6 in Nr. 173. An einer Stelle, wo $y'' = 0$ ist, d. h. in einem eigentlichen oder uneigentlichen *Wendepunkte* (vgl. Nr. 172), wird die Krümmung gleich Null.

Will man sich die Wahl der unabhängigen Veränderlichen noch vorbehalten, so wird man in (1) die Differentiale erster und zweiter Ordnung von dx und dy einführen, indem man $y''dx$ durch das Differential von $dy:dx$ ersetzt, vgl. (7) in Nr. 93. Es ergibt sich so statt (1):

$$\frac{d\tau}{ds} = \frac{dx\,d^2y - dy\,d^2x}{\sqrt{dx^2 + dy^2}^{\,3}}. \tag{2}$$

Wenn die Kurve im Sinne der wachsenden Werte der unabhängigen Veränderlichen positiv gerechnet, dementsprechend τ wie in Nr. 169 gemessen und s auch wachsend mit der unabhängigen Veränderlichen gerechnet wird, so ist die Wurzel positiv zu nehmen.

Wird z. B. die Bogenlänge s selbst als die unabhängige Veränderliche gewählt, so kommt nach (2) in Nr. 193:

$$\frac{d\tau}{ds} = \frac{dx\,d^2y - dy\,d^2x}{ds^3}. \tag{3}$$

Das Krümmungsmaß $d\tau : ds$ ist positiv oder negativ, je nachdem der Tangentenwinkel τ mit wachsendem s zu- oder abnimmt, d. h. *je nachdem die Kurve beim Durchlaufen im Sinne wachsender Werte von s nach links oder rechts herumgeht.*

196. Die ebenen Kurven konstanter Krümmung. Hat die Kurve eine *konstante* Krümmung k, so ist $d\tau : ds = k$, also, wenn k zunächst von Null verschieden angenommen wird, $ds = d\tau : k$, so daß aus (1) in Nr. 194 folgt:

$$dx = \frac{1}{k}\cos\tau\,d\tau, \quad dy = \frac{1}{k}\sin\tau\,d\tau$$

oder:

$$dx = d\,\frac{\sin\tau}{k}, \qquad dy = d\,\frac{-\cos\tau}{k}.$$

Nach Satz 5 in Nr. 29 ist also, wenn a und b Konstanten bedeuten:

$$x - a = \frac{\sin\tau}{k}, \quad y - b = -\frac{\cos\tau}{k},$$

woraus folgt:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = \frac{1}{k^2}.$$

Es ergibt sich somit ein *Kreis*, der den reziproken Wert der konstanten Krümmung zum Radius hat.

Wenn die konstante Krümmung k gleich Null ist, so folgt aus $d\tau : ds = k$, daß $d\tau = 0$, also $\tau = \operatorname{arc\,tg} y' =$ konst., daher $y' =$ konst., etwa $y' = a$, mithin nach Satz 5, Nr. 29, $y - ax$ = konst., folglich:

$$y = ax + b$$

wird. Dies aber ist die Gleichung einer *Geraden.*

Satz 12: Die Kreise und die Geraden sind die einzigen ebenen Kurven konstanter Krümmung, insbesondere die Geraden diejenigen von der Krümmung Null.

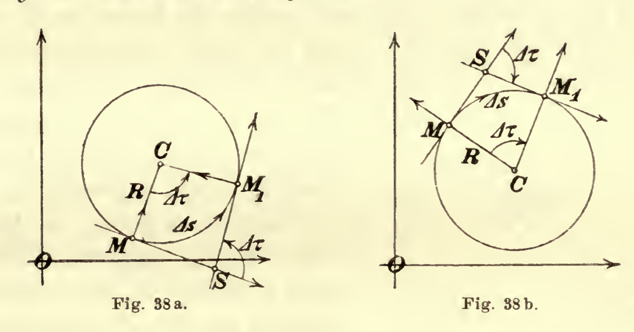


Fig. 38a. Fig. 38b.

Daß jeder Kreis eine konstante Krümmung hat, erhellt auch geometrisch. Für ein Bogenstück MM_1 eines Kreises um C mit dem Radius R, siehe Fig. 38a, wird nämlich $\Delta\tau$ gleich dem Zentriwinkel MCM_1. Dieser aber ist gleich dem Bogen Δs oder MM_1, dividiert mit dem Radius R. Daher ist $\Delta\tau : \Delta s = 1 : R$, d. h. auf dem Kreise ist überhaupt schon die *mittlere* Krümmung konstant, um so mehr also das Krümmungsmaß als ihr Grenzwert. Aber wenn man ein Kreisstück im Sinne wachsender Abszissen durchläuft, so muß zwischen der oberen und unteren Kreishälfte unterschieden werden. Man ziehe zur Vergleichung die Fig. 38b heran. In beiden Figuren wird der Bogen MM_1 im Sinne *wachsender* Abszissen durchlaufen, in Fig. 38a ist $\Delta\tau$ und der Zentriwinkel positiv, in Fig. 38b dagegen negativ. Ist also R der positiv gemessene Radius, so hat die untere Kreishälfte die konstante Krümmung $1 : R$, die obere die konstante Krümmung $-1 : R$. In der Tat ist auch die erste Hälfte von unten gesehen konvex, die zweite konkav. Man sieht noch mehr: Beachten wir, welche Normalenrichtung nach Nr. 169 positiv ist, so ergibt sich,

daß die Krümmung solcher Stellen M des Kreises positiv wird, deren positive Normalen die Mitte C enthalten, und die Krümmung solcher Stellen M negativ wird, deren negative Normalen die Mitte C enthalten.

Diese Vorzeichenunterscheidung mag beim Kreise unnatürlich erscheinen; wir werden jedoch sogleich eine Stelle einer beliebigen Kurve in nahe Beziehung zum Kreise bringen, wobei sich diese Unterscheidung als nützlich erweisen wird.

197. Der Krümmungskreis. Die Krümmung $k = d\tau : ds$ eines Kurvenpunktes (x, y) muß, wenn die Kurve weder eine Gerade noch ein Kreis ist, längs der Kurve veränderlich sein. Wir wollen nun auf der *positiven* Normale des Punktes M (vgl. Nr. 169) den reziproken Werk $R = 1 : k$ von k als Strecke bis zu einem Punkte C auftragen, sobald k positiv ist. Ist k dagegen negativ, so tragen wir auf der *negativen* Normale des Punktes M den absoluten Betrag von $R = 1 : k$ als Strecke bis C auf. Siehe Fig. 39 für beide Fälle, falls die Kurve im Sinne wachsender x durchlaufen wird. Alsdann schlagen wir um C den Kreis durch M. Er heißt der *Krümmungskreis* des Kurvenpunktes M und sein positiver oder negativer Radius R der *Krümmungsradius* des Punktes M. Nach den Bemerkungen der vorigen Nummer hat *der Krümmungskreis an der Stelle M auch dem Vorzeichen nach gerade diejenige Krümmung, die der Kurve an der Stelle zukommt.* Nach (1) in Nr. 195 ist der Krümmungsradius

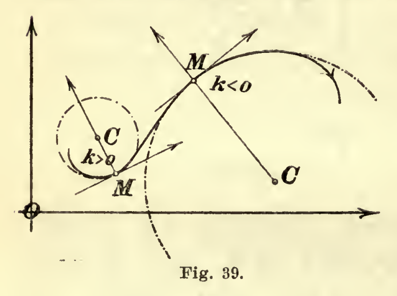


Fig. 39.

$$R = \frac{ds}{d\tau} = \frac{\sqrt{1 + y'^2}^3}{y''}, \tag{1}$$

wo die Quadratwurzel *positiv* ist. Für einen Wendepunkt ($y'' = 0$, vgl. Nr. 172) wird der Krümmungsradius R unendlich groß, und der Krümmungskreis artet in eine Gerade aus, in die sogenannte *Wendetangente*, nämlich die Tangente des Wendepunktes.

Soll die Wahl der Größe, die als unabhängige Veränder-

liche dienen soll, vorbehalten bleiben, so haben wir statt (1) analog (2) in Nr. 195 zu schreiben:

$$(2)\qquad R = \frac{ds}{d\tau} = \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}^3}{dx\,d^2y - dy\,d^2x}.$$

Wenn alsdann die Wurzel positiv gerechnet wird, sobald die Kurve im Sinne wachsender Werte der unabhängigen Veränderlichen durchlaufen und demnach die positive Richtung der Tangente und folglich auch die der Normale durch positive Drehung der positiven Tangente um einen rechten Winkel festgelegt wird, so ist auch jetzt $R > 0$ oder < 0, je nachdem der vorhin konstruierte Punkt C auf der positiven oder negativen Normale liegt.

Wird insbesondere die Bogenlänge s als unabhängige Veränderliche gewählt und die Kurve mit wachsenden Werten von s durchlaufen, so ergibt sich entsprechend der Formel (3) in Nr. 195:

$$(3)\qquad R = \frac{ds}{d\tau} = \frac{ds^3}{dx\,d^2y - dy\,d^2x}.$$

Wir kehren zu der Annahme zurück, daß x die unabhängige Veränderliche sei und die Kurve im Sinne wachsender x durchlaufen werde. Alsdann ist, wenn ν den Winkel der positiven Normale mit der positiven x-Achse bedeutet, nach (2) in Nr. 169:

$$(4)\qquad \sin\nu = \frac{1}{\sqrt{1 + y'^2}}, \quad \cos\nu = \frac{-y'}{\sqrt{1 + y'^2}},$$

wo die Wurzel positiv ist. Der Mittelpunkt C des Krümmungskreises, der sogenannte *Krümmungsmittelpunkt* von M, hat nun in *jedem* Falle nach Fig. 39 die Koordinaten:

$$(5)\qquad x_1 = x + R\cos\nu, \quad y_1 = y + R\sin\nu,$$

so daß wegen (1) und (4) kommt:

$$(6)\qquad x_1 - x = -\frac{(1 + y'^2)\,y'}{y''}, \quad y_1 - y = \frac{1 + y'^2}{y''}.$$

Daß hier die Quadratwurzel nicht mehr auftritt, hängt damit zusammen, daß der zu P gehörige Krümmungsmittelpunkt C eine durch die Gestalt der Kurve allein bedingte ganz bestimmte Lage hat, die unabhängig davon ist, ob wir die Kurve im Sinne wachsender Abszissen oder anders durchlaufen.

198. Der Krümmungsmittelpunkt als Grenzlage des Schnittpunktes benachbarter Normalen. Wir wollen nun beweisen:

Satz 13: Der Krümmungsmittelpunkt eines Punktes M einer ebenen Kurve ist die Grenzlage des Schnittpunktes der Normale von M mit der Normale eines benachbarten Kurvenpunktes M_1, wenn sich der Punkt M_1 dem Punkte M längs der Kurve beliebig nähert.

In der Tat, die Gleichung der Normale lautet nach (3) in Nr. 169 in den laufenden Koordinaten $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ so:

$$\mathfrak{x} - x + y'(\mathfrak{y} - y) = 0. \tag{1}$$

Wir bezeichnen ihre linke Seite, die ja eine Funktion von x ist, mit V, so daß $V = 0$ die Gleichung der Normale bedeutet. Um die Gleichung der Normale des Kurvenpunktes M_1 oder $(x + \Delta x,\ y + \Delta y)$ zu erhalten, muß man in dieser Gleichung $V = 0$ die Größen x, y, y' durch $x + \Delta x$, $y + \Delta y$, $y' + \Delta y'$ ersetzen; alsdann wachse V um ΔV. Der Schnittpunkt beider Normalen wird also durch

$$V = 0, \quad V + \Delta V = 0$$

oder durch

$$V = 0, \quad \Delta V = 0$$

oder auch durch

$$V = 0, \quad \frac{\Delta V}{\Delta x} = 0$$

gegeben. Nehmen wir nun an, daß der Punkt M_1 längs der Kurve nach M rücke, so wird der Schnittpunkt der beiden Normalen in eine Grenzlage gelangen, deren Koordinaten durch die beiden Gleichungen

$$V = 0, \quad \frac{dV}{dx} = 0$$

bestimmt sind. Die erste ist die Gleichung (1), die zweite ergibt sich aus ihr durch vollständige Differentiation nach x, wobei man $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ als Konstanten behandelt, lautet also:

$$\frac{dV}{dx} = -(1 + y'^2) + (\mathfrak{y} - y)y'' = 0. \tag{2}$$

Bezeichnen wir die den Gleichungen (1) und (2) genügenden Werte von $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ mit x_1, y_1, so kommt:

$$(3) \qquad x_1 - x = -\frac{(1+y'^2)y'}{y''}, \quad y_1 - y = \frac{1+y'^2}{y''}.$$

Dies sind aber die Formeln (6) der vorigen Nummer, womit der Satz 13 bewiesen ist.

Die Gleichungen (3) lassen sich so schreiben:

$$(4) \qquad x_1 = x - R \sin \tau, \quad y_1 = y + R \cos \tau,$$

wie aus (5) in Nr. 197 sofort folgt, weil $\cos \nu = -\sin \tau$ und $\sin \nu = \cos \tau$ nach (1) und (2) in Nr. 169 ist. Wir können hierfür, weil $R = ds : d\tau$ ist, auch schreiben:

$$(5) \qquad x_1 = x - \frac{ds}{d\tau} \sin \tau, \quad y_1 = y + \frac{ds}{d\tau} \cos \tau.$$

In Nr. 146 trat ein Punkt K auf der Normale eines Kurvenpunktes (x, y) auf, dessen Ordinate $\mathfrak{y}$ der damaligen Gleichung (3) genügte. Man sieht aus (2), daß jener Punkt K der Krümmungsmittelpunkt des Kurvenpunktes (x, y) war.

199. Definition der Evolute und Evolvente. Der geometrische Ort der Krümmungsmittelpunkte C oder (x_1, y_1) der verschiedenen Punkte M oder (x, y) einer ebenen Kurve heißt die *Evolute* der Kurve. Die Kurve selbst heißt eine *Evolvente* der Evolute.

Die Evolute ist also der Ort der Krümmungsmittelpunkte der Evolvente.

Die Gleichungen (3) in Nr. 198 bestimmen die Koordinaten (x_1, y_1) eines Punktes C der Evolute, wenn x als unabhängige Veränderliche gewählt wird. Diese besondere Voraussetzung kann vermieden werden: Wir führen in die Gleichungen (4) der vorigen Nummer den Wert von R aus (2) in Nr. 197 und die Werte von $\sin \tau$ und $\cos \tau$ ein, wodurch sich ergibt:

$$(1) \qquad x_1 = x - \frac{(dx^2 + dy^2)dy}{dx\, d^2y - dy\, d^2x}, \quad y_1 = y + \frac{(dx^2 + dy^2)dx}{dx\, d^2y - dy\, d^2x}.$$

Sind x, y als Funktionen einer Hilfsveränderlichen t gegeben, so werden auch die Koordinaten x_1, y_1 der Punkte der Evolute Funktionen der Hilfsveränderlichen t.

200. Eigenschaften der Evolute. Die Formeln (4) in Nr. 198, nämlich:

$$(1) \qquad x_1 = x - R \sin \tau, \quad y_1 = y + R \cos \tau,$$

geben die Koordinaten x_1, y_1 des zu einem Punkte M oder (x, y) der gegebenen Kurve gehörigen Punktes C der Evolute, ausgedrückt durch x, y, τ und R. Diese vier Größen sind längs der Kurve der M sämtlich Funktionen einer einzigen Veränderlichen (z. B. von x). Daher gibt die Differentiation:

$$dx_1 = dx - R\cos\tau \cdot d\tau - \sin\tau \cdot dR,$$
$$dy_1 = dy - R\sin\tau \cdot d\tau + \cos\tau \cdot dR.$$

Weil aber nach (1) in Nr. 194 für dx und dy die Werte $ds\cos\tau$ und $ds\sin\tau$ gesetzt werden können und außerdem $ds = Rd\tau$ ist, so kommt:

$$dx - R\cos\tau \cdot d\tau = 0, \qquad dy - R\sin\tau \cdot d\tau = 0,$$

so daß einfach bleibt:

$$(2) \qquad dx_1 = -\sin\tau \cdot dR, \quad dy_1 = \cos\tau \cdot dR.$$

Hieraus folgt:

$$\frac{dy_1}{dx_1} = -\operatorname{ctg}\tau = \operatorname{tg}(\tau + \tfrac{1}{2}\pi).$$

Es ist aber $\tau + \frac{1}{2}\pi$ der Normalenwinkel ν. Also folgt:

Satz 14: Die Normalen einer ebenen Kurve sind zugleich die Tangenten ihrer Evolute, und zwar berührt die Normale eines Kurvenpunktes die Evolute in dem zugehörigen Krümmungsmittelpunkte.

Haben wir bei der ursprünglichen Kurve der Punkte M einen bestimmten Fortschreitungssinn festgesetzt, so haben ihre Tangenten und folglich auch ihre Normalen bestimmte positive Richtungen, denn wir nehmen ja immer an, daß die positive Normale ebenso zur positiven Tangente liege, wie die positive y-Achse zur positiven x-Achse. Da nun die Normalen die Evolute berühren, so setzen wir fest: Die Evolute soll in demjenigen Sinne durchlaufen werden, der den positiven Richtungen der Normalen der Kurve der M entspricht. In diesem Sinne messen wir also auch die Bogenlänge s_1 der Evolute.

Hierbei ist zu bemerken: Für ein Stück M_0M_1 der gegebenen Kurve liegt das zugehörige Evolutenstück C_0C_1 völlig auf derselben Seite der Kurve, sobald längs M_0M_1 kein Wendepunkt (in dem R nach Nr. 197 unendlich groß würde) und kein singulärer Punkt (den wir ja ein für allemal ausschließen) vorhanden ist. Außerdem hat die Evolute, wenn etwa t die

unabhängige Veränderliche ist, durch die wir uns alle Größen ausgedrückt denken, singuläre Stellen da, wo $dx_1 : dt$ und $dy_1 : dt$ beide gleich Null sind, vgl. Nr. 191 am Schlusse. Dies ist nach (2) nur dann der Fall, wenn $dR = 0$ wird, d. h. nach (2) in Nr. 197 nur dann, wenn

$$(3)\quad (dx^2 + dy^2)(dx\,d^3y - dy\,d^3x) = 3(dx\,d^2x + dy\,d^2y)(dx\,d^2y - dy\,d^2x)$$

wird. Solche Stellen der Evolvente, an denen diese Bedingung erfüllt, also $dR = 0$ ist, heißen *Scheitel* der Kurve. Wir kommen auf sie in Nr. 218 zurück. Setzen wir voraus, daß das Kurvenstück $M_0 M_1$ keinen Scheitel habe, so hat also das Evolutenstück $C_0 C_1$ auch keinen singulären Punkt.

Bezeichnen wir mit τ_1 den Tangentenwinkel der Evolute, so ist nach unseren Festsetzungen $\tau_1 = \nu = \tau + \frac{1}{2}\pi$, und nach (2) kommt:

$$dx_1 = \cos\tau_1 \cdot dR, \quad dy_1 = \sin\tau_1 \cdot dR.$$

Nach (1) in Nr. 194 aber haben wir, wenn ds_1 das Bogenelement der Evolute bedeutet:

$$dx_1 = \cos\tau_1 \cdot ds_1, \quad dy_1 = \sin\tau_1 \cdot ds_1.$$

Also ist $dR = ds_1$, daher nach Satz 8 in Nr. 29 die Differenz $R - s_1$ konstant. Hat R in M_0 den Wert R_0 und in M_1 den Wert R_1, so folgt aus

$$R - s_1 = \text{konst.},$$

wenn $s_1^{(0)}$ und $s_1^{(1)}$ die Werte der Bogenlänge der Evolute in C_0 und C_1 bedeuten:

$$R_0 - s_1^{(0)} = R_1 - s_1^{(1)} = \text{konst.},$$

also durch Subtraktion:

$$(4)\qquad s_1^{(1)} - s_1^{(0)} = R_1 - R_0.$$

Satz 15: Rechnet man den Evolutenbogen positiv im Sinne der positiven Normale der Evolvente, so ist der Bogen eines Stückes $C_0 C_1$ der Evolute gleich der Differenz $R_1 - R_0$ der Krümmungsradien R_1 und R_0 der Evolvente in den entsprechenden Punkten M_1 und M_0. Dabei ist vorausgesetzt, daß das Stück $M_0 M_1$ der Evolvente keinen Wendepunkt, keinen singulären Punkt und keinen Scheitel enthalte.

201. Mechanische Erzeugung der Evolvente. Auf Grund der in voriger Nummer bewiesenen Eigenschaften hat der Ort der Krümmungsmittelpunkte den Namen *Evolute*, die Kurve selbst den Namen *Evolvente* bekommen. Wenn nämlich etwa R_0 absolut genommen kleiner als R_1 ist, siehe Fig. 40, so folgt aus (4) in voriger Nummer, d. h. aus $R_1 = s_1^{(1)} - s_1^{(0)} + R_0$, daß sich M_1 aus C_1 so konstruieren läßt: Wir ziehen in C_1 die Tangente an die Evolute im Sinne nach C_0 hin und tragen auf ihr die Summe des absolut gemessenen Bogens $C_0 C_1$ und der absolut genommenen Strecke $M_0 C_0$ ab. Der Endpunkt ist M_1. Es leuchtet also ein, daß ein in C_1 (oder weiter über C_1 hinaus) an der Evolute befestigter unausdehnbarer, aber biegsamer Faden, der längs $C_1 C_0$ an die Evolute angelegt und von C_0 an tangential bis M_0 angespannt ist, mit seinem Punkte M_0 die Evolvente $M_0 M_1$ beschreiben wird, sobald er, beständig straff gehalten, von der Evolute abgewickelt wird. Die Evolvente erscheint hier als eine Bahnkurve, als *eine orthogonale Trajektorie der Tangenten der Evolute.*

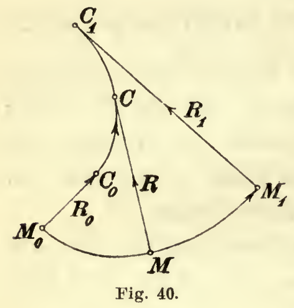


Fig. 40.

202. Evolute einer algebraischen Kurve. Stellt $F(x, y) = 0$ eine *algebraische* Kurve vor, d. h. ist $F(x, y)$ nach Nr. 187 eine ganze rationale Funktion von x und y, so ergeben sich aus

$$F_x + F_y y' = 0, \quad F_{xx} + 2F_{xy} y' + F_{yy} y'^2 + F_y y'' = 0$$

für y' und y'' gebrochene rationale Funktionen von x und y. Setzen wir sie in die Formeln (6) von Nr. 197 ein, so stellen sich auch x_1 und y_1 als gebrochene rationale Funktionen von x und y dar. Wir kommen daher zu drei Gleichungen:

$$(1) \qquad F = 0, \quad A_1 x_1 + A_2 = 0, \quad B_1 y_1 + B_2 = 0,$$

in denen F, A_1, A_2, B_1, B_2 sämtlich ganze rationale Funktionen von x und y sind. Wenn man diese Gleichungen wiederholt mit x und y multipliziert, so erhält man eine Anzahl von Gleichungen, die in den Produkten von der Form $x^\alpha y^\beta$ sämtlich linear sind. Bekanntlich kann man so viele Gleichungen

aufstellen, daß alle vorkommenden Produkte $x^\alpha y^\beta$ durch Nullsetzen der Determinante ihrer Koeffizienten eliminiert werden. Es ergibt sich folglich eine von x und y freie Gleichung $\Phi(x_1, y_1) = 0$, deren linke Seite rational und ganz in x_1 und y_1 ist. Daher gilt der

Satz 16: Die Evolute einer ebenen algebraischen Kurve ist ebenfalls eine algebraische Kurve.

Rechnen wir die Bogenlänge s_1 der Evolute etwa von der in Nr. 200 mit C_0 bezeichneten Stelle aus, so folgt aus (4) in Nr. 200, daß die Bogenlänge s_1 gleich $R - R_0$ ist. Wegen $R^2 = (x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2$ wird nun R^2 rational gebrochen in x und y, folglich auch $s_1{}^2$. Es ergibt sich somit eine Gleichung

$$D_1 s_1{}^2 + D_2 = 0, \tag{2}$$

in der D_1 und D_2 ganze rationale Funktionen von x und y sind. Aus den vier Gleichungen (1) und (2) lassen sich durch ein Verfahren wie vorhin x und y eliminieren, wodurch eine Gleichung $\Psi(x_1, y_1, s_1{}^2) = 0$ hervorgeht, deren linke Seite in x_1, y_1, $s_1{}^2$ rational und ganz ist. *Also wird s_1 eine algebraische Funktion von x_1 und y_1*, nach Nr. 6. Man sagt daher, *daß die Evolute einer algebraischen Kurve algebraisch rektifizierbar sei.* Unter der *Rektifikation* einer Kurve versteht man nämlich die Berechnung ihrer Bogenlänge.

§ 6. Polarkoordinaten.

203. Über die Verwendung von Polarkoordinaten überhaupt. Zuweilen ist es bei der Untersuchung ebener Kurven nützlich, von den rechtwinkligen Koordinaten x, y zu *Polarkoordinaten* ω, ϱ (vgl. Nr. 72) überzugehen. Ist der Anfangspunkt der Pol der Polarkoordinaten, die positive x-Achse der Anfangsstrahl und der positive Drehsinn der Amplitude ω der Sinn der Drehung der positiven x-Achse nach der positiven y-Achse hin, so gelten bekanntlich für den Radiusvektor ϱ und die Amplitude ω der Polarkoordinaten die Formeln:

$$x = \varrho \cos\omega, \quad y = \varrho \sin\omega. \tag{1}$$

Sie definieren aber ϱ und ω nicht eindeutig als Funktionen von x und y. Vielmehr gehören zu einem beliebigen Punkte

(x, y) unendlich viele Paare von Polarkoordinaten ω und ϱ. Ist nämlich ω_0 und ϱ_0 eines, das den Forderungen (1) genügt, so sind:

$$(2)\quad \omega = \omega_0 + 2k\pi,\ \ \varrho = \varrho_0 \ \text{ und } \ \omega = \omega_0 + (2k+1)\pi,\ \ \varrho = -\varrho_0,$$

wenn k eine beliebige ganze Zahl bedeutet, die allgemeinsten, die (1) ebenfalls erfüllen. Unter einem Punkte mit den Polarkoordinaten ω und ϱ muß man hiernach denjenigen Punkt M verstehen, der sich so ergibt: Man dreht zuerst die positive x-Achse um den Winkel ω herum in die neue Lage. Auf dem so erhaltenen Schenkel trägt man vom Anfangspunkte O die Länge von ϱ bis M ab und zwar auf dem Schenkel selbst, wenn $\varrho > 0$ ist, dagegen auf seiner rückwärtigen Verlängerung über O hinaus, wenn $\varrho < 0$ ist. Beachtet man dies, so geben alle Wertepaare (2) denselben Punkt (ω_0, ϱ_0).

Nach (1) kommt:

$$(3)\qquad \omega = \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x}, \quad \varrho = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Wegen (1) *ist hierin die Quadratwurzel positiv oder negativ zu wählen, je nachdem für* ω *aus* $\omega = \operatorname{arc\,tg}(y:x)$ *ein solcher Wert entnommen wird, für den* x *und* $\cos\omega$ *dasselbe oder verschiedene Vorzeichen haben.*

Die erste Gleichung (3) gibt keine Bestimmung von ω, wenn $x = y = 0$ ist. In der Tat muß der *Anfangspunkt* in Polarkoordinaten vermieden werden, da zu ihm zwar $\varrho = 0$, aber ein *beliebiger* Wert von ω gehört. Wenn eine Kurve durch den Anfangspunkt O geht, so wird man allerdings unter der Amplitude ω eines Punktes M der Kurve da, wo M die Lage O passiert, den Grenzwert verstehen, den ω dort erreicht, d. h. man wird unter der Richtung OM des Radiusvektors in diesem Falle die Grenzlage des Strahles OM verstehen für den Fall, daß M auf der Kurve in O hineinrückt, also die Richtung der Tangente. Aber die Definition der Polarkoordinaten verlangt dies nicht; es geschieht nur aus naheliegenden Gründen der Stetigkeit.

Vermeidet man bei der Betrachtung eines Kurvenstückes den Pol O der Polarkoordinaten, so kann man, da ϱ alsdann den Wert Null nicht durchschreitet, den Radiusvektor ϱ stets *positiv* annehmen, also als zweiten Schenkel von ω (nicht nur

als seine rückwärtige Verlängerung) benutzen. *Alsdann stimmen die Vorzeichen von* $\cos\omega$ *und* $\sin\omega$ *mit denen von* x *und* y *überein.*

Bei der Anwendung von Polarkoordinaten liebt man es, den Winkel ω als unabhängige Veränderliche zu benutzen. Wenn man von rechtwinkligen zu Polarkoordinaten übergeht und vorher die Kurve im Sinne wachsender x positiv gerechnet hat, sie nunmehr aber im Sinne wachsender ω positiv rechnen will, so muß man beachten, ob ω mit wachsendem x auch wächst oder abnimmt. Je nachdem das eine oder andere der Fall ist, bleibt der positive Sinn der alte oder nicht.

In der Folge nehmen wir den Radiusvektor stets positiv an. Ist eine Kurve durch eine Gleichung $\varrho = f(\omega)$ gegeben, die für gewisse Werte von ω negative Werte von ϱ liefert, so dürfen wir ja nach (2) statt ϱ und ω die Werte $-\varrho$ und $\omega + \pi$ annehmen, d. h. $\varrho = -f(\omega + \pi)$ setzen. Z. B. die Kurve $\varrho = -\omega^2$ ist dieselbe wie die Kurve $\varrho = (\omega + \pi)^2$.

Nachdem wir somit bei einer Kurve ϱ stets positiv gewählt haben, werden wir in der Folge zumeist als positiven Sinn auf ihr denjenigen Sinn festsetzen, in dem die Amplitude ω wächst. Dementsprechend ist die Tangentenrichtung positiv zu wählen, und eine Drehung um einen positiven rechten Winkel führt die positive Tangente in die positive Normale über, wie in Nr. 169.

204. Ableitung der Fläche eines Sektors. Eine Kurve sei in Polarkoordinaten in der Form $\varrho = f(\omega)$ gegeben, wobei $f(\omega)$ eine *stetige positive* Funktion von ω sei. Wir wollen ein Stück AM der Kurve ins Auge fassen, das den Pol O der Polarkoordinaten nicht enthält. Siehe Fig. 41. Die Amplitude ω wachse, wenn der Radiusvektor von OA in OM übergeht. Er überstreicht dabei einen gewissen *Sektor*, dessen Flächeninhalt gleich u sei. Wird A auf der Kurve fest gewählt, während M eine *veränderliche* Amplitude ω hat, so wird die Fläche u eine *Funktion* der Amplitude ω von M. Wenn ω um $\Delta\omega$ wächst, wandere M nach M_1. Die Fläche nehme dabei um Δu zu. In der folgenden Betrachtung darf $\Delta\omega$ auch

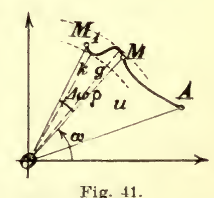


Fig. 41.

negativ gewählt werden, d. h. M_1 vor M zwischen A und M gewählt werden. Dann ist Δu negativ. Wir behaupten nun, daß der Differenzenquotient $\Delta u : \Delta\omega$ für $\lim \Delta\omega = 0$ einen bestimmten endlichen Grenzwert hat.

Es sei nämlich g der längste, k der kürzeste unter allen Radienvektoren zwischen OM und OM_1. Schlagen wir um O die Kreise mit den Radien g und k, so schneiden die Strahlen OM und OM_1 von ihnen Sektoren aus, von denen der erste größer, der zweite kleiner als Δu ist. Absolut genommen haben die beiden Kreissektoren die Inhalte $\frac{1}{2}g^2\Delta\omega$ und $\frac{1}{2}k^2\Delta\omega$. Demnach genügt der nach unseren Annahmen auch für negatives $\Delta\omega$ stets positive Bruch $\Delta u : \Delta\omega$ den Ungleichungen:

$$\tfrac{1}{2}k^2 < \frac{\Delta u}{\Delta\omega} < \tfrac{1}{2}g^2.$$

Für $\lim \Delta\omega = 0$ rücken OM und OM_1 zusammen, also auch die beiden Werte k und g in den Wert $\varrho = OM$. Nach Satz 34 in Nr. 25 ergibt sich demnach für $\Delta u : \Delta\omega$ der Grenzwert:

$$\frac{du}{d\omega} = \tfrac{1}{2}\varrho^2 = \tfrac{1}{2}f^2(\omega). \tag{1}$$

Dies also ist die *Ableitung der Sektorfläche u nach der Amplitude* ω. Das *Differential der Fläche* ist:

$$du = \tfrac{1}{2}\varrho^2 d\omega. \tag{2}$$

Wollen wir rechtwinklige Koordinaten x, y nach Nr. 203 einführen, so ziehen wir aus $\operatorname{tg}\omega = y : x$ durch Differentiation die Formel

$$\frac{d\omega}{\cos^2\omega} = \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2},$$

aus der wegen $x = \varrho\cos\omega$ sofort folgt:

$$\varrho^2 d\omega = x\,dy - y\,dx.$$

Aus (2) ergibt sich somit:

$$du = \tfrac{1}{2}(x\,dy - y\,dx) \tag{3}$$

205. Das Bogenelement in Polarkoordinaten. Wenn wir die Kurve $\varrho = f(\omega)$, deren Radienvektoren ϱ positiv seien, im Sinne wachsender Amplituden ω durchlaufen und in diesem Sinne die Bogenlänge s der Kurve von einer bestimmten Stelle

(ω_0) der Kurve an messen, so können wir das Bogendifferential leicht berechnen. Denn es ist nach (1) in Nr. 203:

$$dx = -\varrho \sin\omega \cdot d\omega + \cos\omega \cdot d\varrho, \qquad dy = \varrho \cos\omega \cdot d\omega + \sin\omega \cdot d\varrho,$$

daher nach (2) in Nr. 193:

$$(1) \qquad ds^2 = \varrho^2 d\omega^2 + d\varrho^2.$$

Bezeichnen wir $d\varrho : d\omega$ mit ϱ', so haben wir:

$$(2) \qquad \frac{ds}{d\omega} = \sqrt{\varrho^2 + \varrho'^2},$$

wo die Wurzel positiv ist.

206. Bestimmung der Tangente in Polarkoordinaten. Unter μ sei der Winkel verstanden, den die positive Tangente des Punktes M oder (ω, ϱ) der Kurve $\varrho = f(\omega)$ mit der Verlängerung des Radiusvektors OM über M hinaus bildet, d. h. es soll μ der Winkel sein, den diese Verlängerung beschreiben muß, um durch Drehung um O in die Lage der positiven Tangente zu kommen. Dabei ist der positive Sinn der Winkelmessung natürlich derselbe wie bei der Messung der Amplitude ω. Ist τ der Winkel der positiven Tangente mit dem Anfangsstrahle, so wird:

$$\mu = \tau - \omega.$$

Also ergibt sich:

$$(1) \qquad \sin\mu = \sin(\tau - \omega), \quad \cos\mu = \cos(\tau - \omega).$$

Nach (5) in Nr. 169 aber kommt, wenn jetzt ω die dort mit t bezeichnete unabhängige Veränderliche bedeutet:

$$\sin\tau = \frac{y'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}, \quad \cos\tau = \frac{x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}},$$

wo x' und y' die Ableitungen von

$$x = \varrho \cos\omega, \quad y = \varrho \sin\omega$$

nach ω sind, d. h. die Werte:

$$x' = \varrho' \cos\omega - \varrho \sin\omega, \quad y' = \varrho' \sin\omega + \varrho \cos\omega.$$

Wie in Nr. 205 soll hier ϱ' die Ableitung von ϱ nach ω vorstellen. Daher folgt:

$$\sin\tau = \frac{\varrho' \sin\omega + \varrho \cos\omega}{\sqrt{\varrho^2 + \varrho'^2}}, \quad \cos\tau = \frac{\varrho' \cos\omega - \varrho \sin\omega}{\sqrt{\varrho^2 + \varrho'^2}}.$$

Aus (1) ergibt sich mithin:

$$(2) \qquad \sin\mu = \frac{\varrho}{\sqrt{\varrho^2 + \varrho'^2}}, \quad \cos\mu = \frac{\varrho'}{\sqrt{\varrho^2 + \varrho'^2}},$$

wo die Wurzel positiv ist, wenn die Kurve im Sinne wachsender Amplituden ω positiv gerechnet wird. Nach (2) in voriger Nummer können wir hierfür schreiben:

$$(3) \qquad \sin\mu = \frac{\varrho\, d\omega}{ds}, \quad \cos\mu = \frac{\varrho'\, d\omega}{ds} = \frac{d\varrho}{ds},$$

so daß sich ergibt:

$$(4) \qquad \operatorname{tg}\mu = \frac{\varrho\, d\omega}{d\varrho} = \frac{\varrho}{\varrho'}.$$

Die Tangente steht auf dem Radiusvektor senkrecht, wenn $\varrho' = 0$ ist, und fällt mit ihm zusammen, wenn ϱ' unendlich wird.

Es sei λ der Winkel, den die positive Normale mit dem verlängerten Radiusvektor OM bildet, und zwar in entsprechender Weise gemessen wie der Tangentenwinkel μ. Dann wird

$$\lambda = \mu + \tfrac{1}{2}\pi,$$

so daß kommt:

$$(5) \quad \sin\lambda = \frac{\varrho'}{\sqrt{\varrho^2 + \varrho'^2}}, \quad \cos\lambda = \frac{-\varrho}{\sqrt{\varrho^2 + \varrho'^2}}, \quad \operatorname{tg}\lambda = -\frac{\varrho'}{\varrho},$$

wo die Wurzel positiv ist, wenn die Kurve im Sinne wachsender Amplituden ω durchlaufen wird.

207. Polartangente, -normale, -subtangente und -subnormale. Wir legen, siehe Fig. 42, durch den Anfangspunkt O die Senkrechte zum Radiusvektor OM, und zwar rechnen wir sie positiv in derjenigen Richtung von O aus, die aus der Richtung OM des Radiusvektors durch positive Drehung um $\frac{1}{2}\pi$ hervorgeht. Die Tangente und Normale mögen diese Gerade in T und N treffen. Alsdann heißen MT und MN in engerem Sinne, nämlich als *Strecken* von bestimmter Länge, die *Polartangente* und *Polarnormale* und OT und ON die *Polarsubtangente* und *Polarsubnormale.* Diese Strecken sollen dabei positiv gerechnet werden, wenn Anfangs- und Endpunkt jedesmal so aufeinander folgen, wie es den positiven Richtungen der Tangente, Normale und jener Senkrechten zum

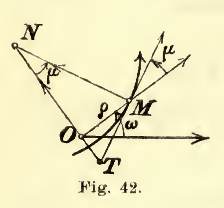


Fig. 42.

Radiusvektor entspricht; andernfalls sind sie negativ. Wir lesen aus der Figur ab:

$$MT = \frac{-\varrho}{\cos\mu}, \quad MN = \frac{\varrho}{\sin\mu}, \quad OT = -\varrho \operatorname{tg}\mu, \quad ON = \varrho \operatorname{ctg}\mu.$$

Setzen wir hierin die Werte der goniometrischen Funktionen aus Nr. 206 ein, so kommt:

$$MT = -\frac{\varrho}{\varrho'}\sqrt{\varrho^2 + \varrho'^2}, \quad MN = \sqrt{\varrho^2 + \varrho'^2}, \quad OT = -\frac{\varrho^2}{\varrho'}, \quad ON = \varrho',$$

wo die Wurzel positiv ist, wenn die Kurve im Sinne wachsender Amplituden ω durchlaufen wird. Wir können nach (3) in voriger Nummer auch schreiben:

$$MT = -\frac{\varrho\, ds}{d\varrho}, \quad MN = \frac{ds}{d\omega}, \quad OT = -\frac{\varrho^2 d\omega}{d\varrho}, \quad ON = \frac{d\varrho}{d\omega}.$$

208. Der Krümmungsradius in Polarkoordinaten. Wir haben schon in Nr. 94 erkannt, daß der Ausdruck

$$\frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}^3}{dx\,d^2y - dy\,d^2x} \quad \text{in} \quad \frac{\sqrt{\varrho^2 + \varrho'^2}^3}{\varrho^2 + 2\varrho'^2 - \varrho\varrho''}$$

übergeht, wenn Polarkoordinaten vermöge $x = \varrho\cos\omega$, $y = \varrho\sin\omega$ eingeführt werden. Wir haben also nach (2) in Nr. 197 den Krümmungsradius R in Polarkoordinaten ausgedrückt und fügen nur noch hinzu, daß in

$$R = \frac{\sqrt{\varrho^2 + \varrho'^2}^3}{\varrho^2 + 2\varrho'^2 - \varrho\varrho''}$$

die Wurzel positiv ist, wenn wieder der positive Sinn durch das Wachsen der Amplitude ω bedingt wird. Führen wir den reziproken Wert $1 : \varrho$ von ϱ ein, so geht hervor:

$$R = \frac{\sqrt{\left(\frac{1}{\varrho}\right)^2 + \left(\frac{1}{\varrho}\right)'^2}^3}{\left(\frac{1}{\varrho}\right)^3\left[\frac{1}{\varrho} + \left(\frac{1}{\varrho}\right)''\right]}.$$

Benutzen wir statt ω die Bogenlänge s als unabhängige Veränderliche, so nimmt dagegen R den in Nr. 95 berechneten Wert

$$R = \frac{\varrho\sqrt{1 - \varrho'^2}}{\varrho\varrho'' + \varrho'^2 - 1}$$

an. Die Akzente sollen aber in dieser letzten Formel die Differentiation nach s andeuten.

209. Dipolare Koordinaten. Als Anhang sei noch das System der dipolaren Koordinaten kurz erwähnt. Es sind dies die Entfernungen ϱ_1 und ϱ_2 des zu bestimmenden Punktes M von zwei festgewählten Punkten U und V, wobei ϱ_1 und ϱ_2 positiv gerechnet werden sollen. Wenn wir eine Gleichung zwischen ϱ_1 und ϱ_2 vorschreiben, so ist der geometrische Ort der Punkte (ϱ_1, ϱ_2), die ihr genügen, eine Kurve. Wir können die dipolaren Koordinaten ϱ_1 und ϱ_2 mit den rechtwinkligen Koordinaten in Zusammenhang bringen, indem wir den Anfangspunkt O in der Mitte von UV, die Richtung OU als positive x-Achse und die Senkrechte dazu als y-Achse wählen. Ist die Länge von UV gleich $2a$, so hat der Punkt M mit den rechtwinkligen Koordinaten x, y die dipolaren Koordinaten:

$$(1) \qquad \varrho_1 = \sqrt{(x-a)^2 + y^2}, \quad \varrho_2 = \sqrt{(x+a)^2 + y^2}.$$

Die vier Punkte $(\pm x, \pm y)$ haben offenbar dieselben dipolaren Koordinaten. Die Tangente eines Kurvenpunktes M bilde mit den Strahlen ϱ_1 und ϱ_2 die Winkel μ_1 und μ_2, wobei wir auf eine schärfere Definition dieser Winkel garnicht eingehen wollen. Nach den Formeln (3) in Nr. 206 ist auch jetzt, da ϱ_1 und ϱ_2 als Radienvektoren mit den Polen U und V und Amplituden ω_1 und ω_2 aufgefaßt werden können, wobei ω_1 und ω_2 die Winkel von ϱ_1 und ϱ_2 mit UV bedeuten:

$$(2) \quad \sin^2\mu_1 = \frac{\varrho_1{}^2 d\omega_1{}^2}{ds^2}, \quad \sin^2\mu_2 = \frac{\varrho_2{}^2 d\omega_2{}^2}{ds^2}, \quad \cos^2\mu_1 = \frac{d\varrho_1{}^2}{ds^2}, \quad \cos^2\mu_2 = \frac{d\varrho_2{}^2}{ds^2}.$$

Statt der dipolaren Koordinaten ϱ_1 und ϱ_2 kann man auch die Winkel ω_1 und ω_2 als Koordinaten benutzen.

Die *Ellipsen* und *Hyperbeln* mit den Brennpunkten U und V haben in ϱ_1, ϱ_2 die Gleichungen $\varrho_1 \pm \varrho_2 = \text{konst.}$, so daß $d\varrho_1 \pm d\varrho_2 = 0$ ist. Aus (2) folgt hier, daß $\cos^2\mu_1 = \cos^2\mu_2$ wird, d. h. die Tangente des Punktes M halbiert einen der beiden Winkel, die von UM und VM gebildet werden, was ja eine bekannte Brennpunktseigenschaft der Ellipsen und Hyperbeln ist.

§ 7. Einhüllende Kurven.

210. Definition der Einhüllenden. Es sei $F(x, y, \alpha)$ eine Funktion der drei Veränderlichen x, y, α, so daß

$$(1) \qquad F(x, y, \alpha) = 0$$

für jeden bestimmten Wert des *Parameters* α die Gleichung einer Kurve bedeutet. Die Gesamtheit der durch (1) dargestellten Kurven heißt eine (einfach unendliche) *Kurvenschar.*

Wird, nachdem α einen bestimmten Wert erhalten hat, dem Parameter ein anderer Wert $\alpha + \Delta\alpha$ erteilt, so erhält man eine zweite Kurve mit der Gleichung:

$$(2) \qquad F(x, y, \alpha + \Delta\alpha) = 0.$$

Die Koordinaten derjenigen Punkte, die *beiden* Kurven angehören, befriedigen auch die Gleichung:

$$(3) \qquad \frac{F(x, y, \alpha + \Delta\alpha) - F(x, y, \alpha)}{\Delta\alpha} = 0.$$

Hat F als Funktion von α eine Ableitung F_α, so geht die letzte Gleichung für $\lim \Delta\alpha = 0$ über in:

$$(4) \qquad \frac{\partial F(x, y, \alpha)}{\partial \alpha} = 0.$$

Man sagt, daß die durch (1) dargestellte Kurvenschar eine *einhüllende Kurve* habe, wenn die Elimination von α aus den beiden Gleichungen (1) und (4) wieder die Gleichung einer Kurve liefert:

$$(5) \qquad f(x, y) = 0,$$

die eben dann *die Einhüllende (Enveloppe)* der *eingehüllten* Kurvenschar (1) heißt. Die Einhüllende ist also der geometrische Ort derjenigen Punkte, die je zwei benachbarte Kurven der Schar gemein haben, wenn sie einander immer näher kommen.

211. Ein Beispiel. Es sei die Einhüllende aller Kreise zu bestimmen, die gleichgroßen Radius a haben und deren Mittelpunkte auf einer festen Geraden liegen. Wählen wir diese Gerade als x-Achse, so ist die Gleichung der Kreisschar:

$$(x - \alpha)^2 + y^2 - a^2 = 0,$$

und α ist der Parameter. Die Differentiation nach α gibt:

$$x - \alpha = 0,$$

und die Elimination von α liefert:

$$y^2 - a^2 = (y - a)(y + a) = 0$$

als einhüllende Kurve. Die Einhüllende besteht also hier aus den zwei Geraden parallel zur x-Achse mit den Ordinaten $\pm a$.

Auflösung der Gleichung der Kreisschar nach $x - \alpha$ gibt:

$$x - \alpha = \pm \sqrt{a^2 - y^2}.$$

Wählt man z. B. das Pluszeichen, so ist $x - \alpha - \left|\sqrt{a^2 - y^2}\right|$ eine Funktion $F(x, y, \alpha)$ der drei Veränderlichen x, y, α wie in Nr. 210. Die Schar aller Kurven

$$x - \alpha - \left|\sqrt{a^2 - y^2}\right| = 0$$

hat aber keine Einhüllende, denn die Differentiation nach α liefert die sinnlose Gleichung $-1 = 0$, die beweist, daß zwei benachbarte Kurven der durch die Gleichung

$$x - \alpha - \left|\sqrt{a^2 - y^2}\right| = 0$$

dargestellten Schar keinen Punkt gemein haben. In der Tat stellt diese Gleichung gar nicht volle Kreise einer Kreisschar dar, sondern eine Schar von *Halbkreisen*, von denen jeder zur Rechten der Geraden $x = \alpha$ durch den zugehörigen Mittelpunkt liegt. In der Kreisschar schneiden sich aber, wie Fig. 43 zeigt, die Kreise immer in der Art, daß die *rechte* Hälfte des einen Kreises die *linke* eines benachbarten trifft. Die rechten Hälften der Kreise haben also keine Einhüllende.

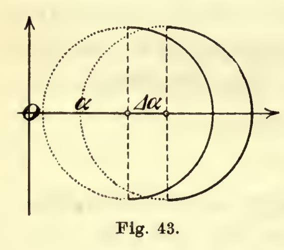


Fig. 43.

Will man dennoch die Einhüllende der Kreisschar aus der aufgelösten Form der Gleichungen bestimmen, so muß man sagen, daß erst das System der *beiden* Gleichungen

$$(1) \qquad x - \alpha - \left|\sqrt{a^2 - y^2}\right| = 0, \quad x - \alpha + \left|\sqrt{a^2 - y^2}\right| = 0$$

die Kreisschar definiert. Der Fall aber, daß eine Kurvenschar erst durch *mehrere* Gleichungen analytisch definiert wird, ist in der obigen allgemeinen Betrachtung in Nr. 210 nicht behandelt worden, und man muß daher hier zur Bestimmung der Einhüllenden direkt verfahren, indem man in jeder der Gleichungen α um $\Delta\alpha$ vermehrt und die gemeinsamen Lösungen der entstandenen Gleichungen

$$(2) \quad x - \alpha - \Delta\alpha - \left|\sqrt{y^2 - a^2}\right| = 0, \quad x - \alpha - \Delta\alpha + \left|\sqrt{y^2 - a^2}\right| = 0$$

211]

mit den Gleichungen (1) bestimmt. Ist z. B. $\Delta\alpha$ positiv, so hat nur die erste Gleichung (1) mit der zweiten Gleichung (2) Lösungen gemein, nämlich diese:

$$(3) \qquad x = \alpha + \tfrac{1}{2}\Delta\alpha, \quad y = \pm\sqrt{a^2 - \tfrac{1}{4}\alpha^2}.$$

Wenn dagegen $\Delta\alpha$ negativ ist, so hat nur die zweite Gleichung (1) mit der ersten Gleichung (2) Lösungen gemein, und zwar ebenfalls die Lösungen (3). Für $\lim \Delta\alpha = 0$ geht nun aus (3)

$$x = \alpha, \quad y = \pm a$$

hervor. Da α willkürlich ist, so ergeben sich demnach wie zu Anfang dieser Nummer die beiden Geraden $y = \pm a$ als der geometrische Ort der Schnittpunkte benachbarter Kreise.

Hieraus ist die Lehre zu ziehen, daß man sich, wenn eine Kurvenschar $F(x, y, \alpha) = 0$ vorliegt, bei den geometrischen Anwendungen stets vergewissern muß, ob die Gleichung in der vorgelegten Form auch wirklich die Kurven in ihren gesamten Linienzweigen oder nur Teile der Kurven darstellt.

212. Die Einhüllende als Berührende der Kurvenschar. Wir wollen jetzt beweisen:

Satz 17: Die Einhüllende einer ebenen Kurvenschar

$$F(x, y, \alpha) = 0$$

mit einem Parameter α berührt in jedem Punkte diejenige Kurve der Schar, die dort eine benachbarte Kurve der Schar trifft, vorausgesetzt, daß der Punkt nicht singulär ist.

Die Einhüllende der Schar

$$(1) \qquad F(x, y, \alpha) = 0$$

wird durch die beiden Gleichungen bestimmt:

$$(2) \qquad F(x, y, \alpha) = 0, \quad F_\alpha = 0.$$

Um nun die Richtung der Tangente in einem Punkte einer Kurve der Schar zu erhalten, muß man die Gleichung (1) differenzieren:

$$(3) \qquad F_x dx + F_y dy = 0.$$

Will man dagegen die Richtung der Tangente in einem Punkte der *Einhüllenden* finden, so kann man immer noch die Gleichung (1) als die Gleichung der Einhüllenden ansehen,

nur muß man α nicht mehr als Konstante, sondern als diejenige Funktion von x und y betrachten, die durch die zweite Gleichung (2) bestimmt wird. Unter dieser Annahme hat man die Gleichung (1) zu differenzieren, und das ergibt:

$$F_x dx + F_y dy + F_\alpha d\alpha = 0.$$

Da aber für *jeden* Punkt der Einhüllenden $F_\alpha = 0$ ist, so nimmt diese Gleichung dennoch wieder die Form (3) an. Also erhält man für einen solchen Punkt (x, y), der als Schnittpunkt einer Kurve der Schar mit einer benachbarten Kurve der Schar auch auf der Einhüllenden liegt, stets:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y},$$

ob nun der Punkt (x, y) als Punkt der Kurve der Schar oder ob er als Punkt der Einhüllenden betrachtet wird. Hiermit ist der Satz bewiesen.

Der Beweis versagt, wenn $F_x = F_y = 0$ ist, d. h. wenn der Punkt (x, y) ein singulärer Punkt der gerade betrachteten Kurve der Schar ist. (Vgl. Nr. 191.)

Ein Beispiel für die im Satz 17 ausgesprochene Eigenschaft der Einhüllenden haben wir bereits behandelt: Die Evolute einer Kurve ist nichts anderes als die Einhüllende der Normalenschar, und wir haben gesehen, daß sie die Normalen berührt. Siehe Satz 13 in Nr. 198 und Satz 14 in Nr. 200.

Die Gleichung $F(x, y, \alpha) = 0$ kann, wenn die Koordinaten x, y eines Punktes M in sie eingesetzt werden, mehrere Werte α liefern; unter diesen ist aber, wenn M zugleich ein Punkt der Einhüllenden ist, jedenfalls einer vorhanden, der auch der Gleichung $F_\alpha = 0$ genügt. Die auf diese Weise bestimmte Kurve der Schar wird von der Einhüllenden berührt, während die anderen Kurven, die etwa noch durch den Punkt M gehen können, die Einhüllende daselbst schneiden können.

Wenn der Parameter α in der Funktion $F(x, y, \alpha)$ nur im ersten Grade vorkommt, die Gleichung der Kurvenschar also die Form

$$\varphi(x, y) + \alpha\psi(x, y) = 0 \tag{4}$$

hat, so wird die Gleichung $F_\alpha = 0$ frei von α, nämlich diese:

$$\psi(x, y) = 0.$$

Beide Gleichungen zusammen bestimmen aber nur die Schnittpunkte der beiden Kurven $\varphi(x, y) = 0$ und $\psi(x, y) = 0$. Mithin haben die Kurven der Schar (4) keine Einhüllende, sondern nur eine Anzahl von gemeinsamen Punkten.

In den Nummern 249 und 250 werden wir einige Beispiele zur Theorie der Einhüllenden bringen.

213. Kurven, deren Koordinaten als Funktionen des Tangentenwinkels gegeben sind. Ist wie früher τ der Winkel, den die positive Tangente einer Kurve mit der positiven x-Achse bildet, so kann τ als unabhängige Veränderliche längs der Kurve gewählt werden. Die Tangente eines Punktes der Kurve hat dann in den laufenden Koordinaten $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ eine Gleichung von der Form

$$\mathfrak{x} \sin \tau - \mathfrak{y} \cos \tau - f(\tau) = 0. \tag{1}$$

Wir wollen umgekehrt annehmen, es sei $f(\tau)$ eine gegebene Funktion von τ und die Gleichung (1) vorgelegt. Für jeden Wert von τ definiert (1) eine Gerade. Es liegt also eine *Geradenschar* vor, bei der τ die Rolle des früheren Parameters α spielt. Nach Satz 17 in Nr. 212 ist die Einhüllende der Geradenschar diejenige Kurve, die alle Geraden der Schar berührt. Um sie zu bestimmen, haben wir die Theorie der Nr. 210 anzuwenden. Dabei ist, wie gesagt, der Parameter α die Größe τ und F die Funktion

$$F(x, y, \tau) = x \sin \tau - y \cos \tau - f(\tau).$$

Die beiden Gleichungen $F = 0$ und $F_\alpha = 0$ sind also hier:

$$x \sin \tau - y \cos \tau - f(\tau) = 0,$$

$$x \cos \tau + y \sin \tau - f'(\tau) = 0. \tag{2}$$

Hieraus lassen sich x und y berechnen. Es kommt:

$$x = f'(\tau) \cos \tau + f(\tau) \sin \tau, \quad y = f'(\tau) \sin \tau - f(\tau) \cos \tau. \tag{3}$$

Diese Gleichungen stellen also *allgemein* eine Kurve dar, die mittels des Tangentenwinkels τ als der unabhängigen Veränderlichen ausgedrückt ist.

Differentiation von (3) gibt:

$$dx = (f'' + f) \cos \tau \, d\tau, \quad dy = (f'' + f) \sin \tau \, d\tau, \tag{4}$$

also $dy : dx = \operatorname{tg} \tau$, wie vorauszusehen war. Quadrieren und Addieren der Formeln (4) liefert das Quadrat des Bogendifferentials ds. Wenn wir daraus

$$(5) \qquad ds = (f'' + f)\, d\tau$$

berechnen, so stimmen auch die Formeln (1) von Nr. 194 in ihren Vorzeichen genau. Da $d\tau$ der Kontingenzwinkel ist, so ergibt sich als Wert des Krümmungsradius:

$$(6) \qquad R = \frac{ds}{d\tau} = f'' + f.$$

Wenn wir x und y in (2) an keine weitere Bedingung binden, so ist (2) die Gleichung derjenigen Geraden, die zur Tangente senkrecht ist und durch den Kurvenpunkt (3) geht, d. h. die Gleichung der *Normale*, geschrieben in den laufenden Koordinaten x und y. Lassen wir darin τ willkürlich, so liegt in (2) die Schar aller Normalen der vorhin betrachteten Kurve (3) vor. Ihre Einhüllende, d. h. nach Nr. 200 die *Evolute*, ergibt sich nach Nr. 210, indem wir (2) nach τ differenzieren:

$$(7) \qquad -x \sin \tau + y \cos \tau - f'' = 0;$$

die Punkte der Evolute müssen dann beiden Gleichungen (2) und (7) genügen. Ist (x_1, y_1) der zum Punkte (x, y) der Kurve (3) oder zum Tangentenwinkel τ gehörige *Krümmungsmittelpunkt*, so sind also seine Koordinaten die aus (2) und (7) folgenden Werte von x und y, nämlich:

$$(8) \qquad x_1 = f' \cos \tau - f'' \sin \tau, \qquad y_1 = f' \sin \tau + f'' \cos \tau.$$

Durch Differentiation folgt weiter:

$$dx_1 = -(f' + f''') \sin \tau\, d\tau, \qquad dy_1 = (f' + f''') \cos \tau\, d\tau,$$

also ist das Bogendifferential der Evolute:

$$ds_1 = (f' + f''')\, d\tau,$$

daher nach (6) gleich dR. So findet man die Ergebnisse von Nr. 200 aufs neue.

Außerdem sehen wir, daß in (8) nur die Differentialquotienten f' und f'' von f vorkommen. Daraus folgt: Wenn wir in (3) statt $f(\tau)$ die Funktion $f(\tau) + C$ einführen, wo C eine *beliebige* Konstante ist, so hat die Kurve:

$$x = f' \cos \tau + (f + C) \sin \tau, \qquad y = f' \sin \tau - (f + C) \cos \tau$$

dieselbe Evolute (8) wie die Kurve (3). *Demnach gehören zu einer Evolute* (8) *unendlich viele Evolventen.* Sie haben sämtlich die Tangenten der Evolute zu Normalen, *sind also die orthogonalen Trajektorien der Tangenten der Evolute* (vgl. Nr. 201).

§ 8. Oskulierende Kurven.

214. Definition einer Berührung höherer Ordnung. Es seien

$$y = f(x) \qquad \text{und} \qquad y_1 = f_1(x)$$

die Gleichungen zweier Kurven MM' und MM_1' (siehe Fig. 44), wobei wir die Ordinaten mit y und y_1 bezeichnen. Wir nehmen an, daß beide Kurven einen Punkt M mit einer gewissen Abszisse x gemein haben, so daß y und y_1 für diesen Wert x übereinstimmen.

Fig. 44.

Wir sagen nun, *daß sich die beiden Kurven im Punkte M in der μ^{ten} Ordnung berühren,* wenn für die Abszisse x dieses Punktes die Gleichungen bestehen:

$$(1) \qquad y_1 = y, \quad y_1' = y', \quad y_1'' = y'', \cdots, y_1^{(\mu)} = y^{(\mu)},$$

wo $y^{(\mu)}$ und $y_1^{(\mu)}$ die μ^{ten} Ableitungen bedeuten, und wenn außerdem

$$(2) \qquad y_1^{(\mu+1)} \neq y^{(\mu+1)}$$

ist.

Wir nehmen an, daß die Funktionen y und y_1 nebst ihren Ableitungen bis zur $(\mu + 2)^{ten}$ Ordnung einschließlich in der Umgebung der Stelle x bestimmte endliche Werte haben, so daß der Satz 19 von Nr. 112 für $n = \mu + 2$ angewandt werden kann. Vermehren wir x um Δx, so werden die zur Abszisse $x + \Delta x$ gehörigen Ordinaten Y und Y_1 beider Kurven folglich wegen (1) gegeben durch:

$$Y = y + y' \cdot \frac{\Delta x}{1!} + y'' \cdot \frac{(\Delta x)^2}{2!} + \cdots + y^{(\mu)} \frac{(\Delta x)^\mu}{\mu!} + y^{(\mu+1)} \cdot \frac{(\Delta x)^{\mu+1}}{(\mu+1)!} + R_{\mu+2},$$

$$Y_1 = y + y' \cdot \frac{\Delta x}{1!} + y'' \cdot \frac{(\Delta x)^2}{2!} + \cdots + y^{(\mu)} \frac{(\Delta x)^\mu}{\mu!} + y_1^{(\mu+1)} \cdot \frac{(\Delta x)^{\mu+1}}{(\mu+1)!} + R_{\mu+2}',$$

sobald $|\varDelta x|$ hinreichend klein ist, und daher wird die Differenz, nämlich:

$$(3) \qquad Y - Y_1 = \frac{y^{(\mu+1)} - y_1^{(\mu+1)}}{(\mu+1)!} (\varDelta x)^{\mu+1} + R_{\mu+2} - R'_{\mu+2},$$

an der Stelle x, d. h. für $\lim \varDelta x = 0$, mit $\varDelta x$ in der $(\mu+1)^{\text{ten}}$ Ordnung gleich Null.

Die letzte Gleichung liefert uns eine geometrische Definition für die Zahl μ, die Ordnung der Berührung. In Fig. 44 soll $OP = x$, $PP' = \varDelta x$ sein. Ferner sollen M' und m die zur Abszisse $x + \varDelta x$ gehörigen Punkte beider Kurven sein, d. h. $P'M' = Y$, $P'm = Y_1$, so daß $Y - Y_1 = mM'$ ist. Es wird also mM' mit $\varDelta x$ in der Ordnung $\mu + 1$ gleich Null, d. h. es ist

$$\lim_{PP'=0} \frac{mM'}{PP'^{\mu+1}}$$

endlich und von Null verschieden.

Um die Strecken mM' und PP' durch solche zu ersetzen, die eine vom Koordinatensysteme unabhängige Bedeutung haben, verschieben wir den Anfangspunkt der Koordinaten in den Punkt M und machen die Tangente t in M zur x-Achse. Wenn wir die Koordinaten in dem neuen Systeme mit überstrichenen Buchstaben bezeichnen, so bestehen in bezug auf die erste Kurve Gleichungen von der Form:

$$\bar{x} = x \cos\alpha + y \sin\alpha + a, \quad \bar{y} = -x \sin\alpha + y \cos\alpha + b.$$

Bedeuten $\bar{y}'$, $\bar{y}''$ usw. die Ableitungen von $\bar{y}$ nach $\bar{x}$, so folgt, daß

$$\bar{y}' = \frac{d\bar{y}}{d\bar{x}} = \frac{-\sin\alpha + y' \cos\alpha}{\cos\alpha + y' \sin\alpha}$$

ist und daß sich allgemein $\bar{y}^{(n)}$ durch $y', y'', \ldots y^{(n)}$ ausdrückt. Genau ebenso drückt sich bei der zweiten Kurve $\bar{y}_1^{(n)}$, d. h. die n^{te} Ableitung von $\bar{y}_1$ nach $\bar{x}$, durch $\bar{y}_1', \bar{y}_1'', \cdots \bar{y}_1^{(n)}$ aus. Infolge von (1) und (2) ist also auch in dem neuen Koordinatensysteme für den Punkt M:

$$\bar{y}_1 = \bar{y}, \quad \bar{y}_1' = \bar{y}', \cdots \bar{y}_1^{(\mu)} = \bar{y}^{(\mu)}, \quad \text{aber} \quad \bar{y}_1^{(\mu+1)} \neq \bar{y}^{(\mu+1)}.$$

In dem neuen Systeme ist anstatt mM' die Strecke $M_1'M'$ senkrecht zur Tangente mit dem Fußpunkte Q und anstatt PP' die Strecke MQ zu nehmen. Diese beiden Größen aber haben eine von dem Koordinatensysteme unabhängige Bedeutung.

Fällt man also von einem Punkte M', der auf der Kurve $y = f(x)$ in der Umgebung von M liegt, das Lot MQ auf die gemeinsame Tangente beider Kurven im gemeinsamen Punkte M, so schneiden die beiden Kurven auf dem Lote das Stück $M_1'M'$ aus; der Fußpunkt Q des Lotes ist um die Strecke MQ vom gemeinsamen Berührungspunkte M entfernt; und wenn μ die Ordnung der Berührung beider Kurven ist, so muß

$$\lim_{MQ=0} \frac{M_1'M'}{MQ^{\mu+1}}$$

endlich und von Null verschieden sein. Es folgt also:

Satz 18: Wenn zwei ebene Kurven $y = f(x)$ und $y_1 = f_1(x)$ den Punkt M mit der Abszisse x gemein haben und einander dort in der μ^{ten} Ordnung berühren, wenn also dort $y = y_1$, $y' = y_1'$, $\cdots$ $\cdots y^{(\mu)} = y_1^{(\mu)}$, aber $y^{(\mu+1)} \neq y_1^{(\mu+1)}$ ist, so tritt folgendes ein: Schneidet eine zur gemeinsamen Normale von M benachbarte parallele Gerade, die von M den Abstand MQ hat, die Kurven in M' und M_1', so ist der Grenzwert von $M_1'M' : MQ^{\mu+1}$ für lim $MQ = 0$ *endlich und von Null verschieden. Vorausgesetzt wird dabei, daß $f(x)$ und $f_1(x)$ nebst ihren Ableitungen bis zur $(\mu+2)^{ten}$ Ordnung in der Umgebung des betrachteten Wertes x bestimmt und endlich seien.*

Später (in Nr. 298) werden wir zeigen, daß umgekehrt, wenn der Quotient $M_1'M' : MQ^{\mu+1}$ einen endlichen und von Null verschiedenen Grenzwert hat, stets eine Berührung in gerade μ^{ter} Ordnung eintritt.

215. Berührung in gerader und ungerader Ordnung. Ist die Ordnung μ der Berührung ungerade, so ändert $Y - Y_1$ nach (3) in voriger Nummer und nach Satz 22 in Nr. 115 das Zeichen nicht, wenn man das Zeichen von Δx ändert, sobald nur Δx in der Umgebung von $\Delta x = 0$ gewählt wird; das Zeichen bleibt also das nämliche wie das der Differenz $y^{(\mu+1)} - y_1^{(\mu+1)}$. Dies besagt, daß zu beiden Seiten des Berührungspunktes die eine Kurve durchaus auf derselben Seite der andern verläuft. Ist dagegen μ eine gerade Zahl, so ändert $Y - Y_1$ mit Δx auch das Zeichen, die Kurven durchsetzen daher einander im Berührungspunkte. D. h.:

Satz 19: Wenn zwei Kurven in der Ebene einander in

einem Punkte in gerader Ordnung berühren, so durchsetzen sie einander dort, im Falle einer Berührung von ungerader Ordnung jedoch nicht.

Im Falle einer Berührung μ^{ter} Ordnung gibt es keine Kurve durch den Punkt M, die in der Umgebung von M zwischen den beiden ersten verläuft, es sei denn, daß sie im Punkte M Berührungen von μ^{ter} oder höherer Ordnung mit jenen Kurven eingeht. Denn ist Y_2 diejenige Ordinate der dritten Kurve, die zur Abszisse $x + \Delta x$ gehört, so ist

$$Y_2 - Y_1 = (Y_2 - Y) + (Y - Y_1).$$

Verschwände $Y_2 - Y$ in niederer als der $(\mu + 1)^{\text{ten}}$ Ordnung mit Δx, so wäre $Y_2 - Y_1$ von derselben Ordnung, und folglich hätten

$$Y_2 - Y_1 \quad \text{und} \quad Y_2 - Y$$

dasselbe Vorzeichen, d. h. die dritte Kurve verliefe nicht zwischen der ersten und zweiten Kurve.

Es ist z. B. nicht möglich, durch den Kurvenpunkt M eine Gerade zu ziehen, die in der Umgebung des Berührungspunktes M zwischen der Kurve und ihrer Tangente verliefe. Denn eine Sekante durch M berührt — so dürfen wir sagen — die Kurve in der nullten Ordnung, also in einer niedrigeren als die Tangente. Vgl. auch Nr. 172.

216. Definition des Oskulierens. K bezeichne eine gegebene Kurve $y = f(x)$; wir nehmen an, daß die Funktion $f(x)$ in der Umgebung der gerade betrachteten Stelle $x = x_0$ nach dem Taylorschen Satze entwickelbar sei:

$$(1) \qquad y = f(x) = y_0 + y_0'(x - x_0) + \frac{y_0''}{2}(x - x_0)^2 + \cdots.$$

Der Kurve K stellen wir eine *Schar* von Kurven K' gegenüber:

$$F(x, y_1, c_0, c_1, \cdots c_n) = 0,$$

in deren Gleichung $n + 1$ willkürliche Konstanten vorkommen und deren Ordinaten wir mit y_1 bezeichnen. Wir wollen annehmen, daß die Gleichung dieser Kurvenschar nach y_1 aufgelöst und diese Funktion y_1 von $x, c_0, c_1, \cdots c_n$ in der Umgebung von $x = x_0$ nach dem Taylorschen Satze entwickelbar sei. Dabei mögen als Koeffizienten der ersten $n + 1$ Glieder

insbesondere die $n+1$ Konstanten $c_0, c_1, \cdots c_n$ auftreten. Dann sieht die Gleichung der Kurvenschar so aus:

$$(2) \quad y_1 = c_0 + c_1 \cdot (x - x_0) + c_2 \cdot (x - x_0)^2 + \cdots \\ + c_n \cdot (x - x_0)^n + A_{n+1}(x - x_0)^{n+1} + \cdots.$$

Die Größen $c_0, c_1, \cdots c_n$ sind willkürlich, aber die folgenden Koeffizienten $A_{n+1}, A_{n+2}, \cdots$ Funktionen von ihnen.

Wird nun eine ganze Zahl μ kleiner als n gewählt, so kann man über die Konstanten $c_0, c_1, \cdots c_n$ so verfügen, daß die Kurven K und K' in einem zu x_0 gehörigen Punkte einander in der μ^{ten} Ordnung berühren. Zu diesem Zwecke hat man ja nur $c_0, c_1, \cdots c_\mu$ so zu wählen, daß

$$(3) \qquad c_0 = y_0, \quad c_1 = y_0', \quad c_2 = \frac{y_0''}{2!}, \cdots \quad c_\mu = \frac{y_0^{(\mu)}}{\mu!}$$

wird. Die übrigen $n - \mu$ Konstanten bleiben dann willkürlich, und insbesondere wird man noch

$$c_{\mu+1} \neq \frac{y_0^{(\mu+1)}}{(\mu+1)!}$$

zu wählen haben. Wird aber $\mu = n$ gewählt, so ist die Kurve K' der gegebenen Schar durch die Gleichungen (3) vollkommen bestimmt und hat im Punkte (x_0, y_0) mit K eine Berührung von mindestens n^{ter} Ordnung. In diesem Falle sagt man: *Die Kurve K' der gegebenen Kurvenschar oskuliere die Kurve K im Punkte M.* Dann ist nämlich diejenige unter allen Kurven der Schar bestimmt worden, die mit der Kurve K an der Stelle (x_0, y_0) eine Berührung von der größtmöglichen Ordnung eingeht.

Aber es sind hier zwei Fälle zu unterscheiden. Durch die $n+1$ Gleichungen

$$c_0 = y_0, \quad c_1 = y_0', \cdots, \quad c_n = \frac{y_0^{(n)}}{n!}$$

sind nämlich jetzt alle c bestimmt und mit ihnen daher auch bereits alle folgenden Koeffizienten $A_{n+1}, A_{n+2}, \cdots$ in der Entwicklung (2). Im allgemeinen wird nun nicht gerade auch

$$A_{n+1} = \frac{y_0^{(n+1)}}{(n+1)!}$$

werden; die Berührung wird also im allgemeinen gerade die von n^{ter} Ordnung sein. Aber es könnte die letzte Gleichung

an einer Stelle x_0 doch erfüllt werden und sogar noch von den folgenden Gleichungen einige. Dann ist die Berührung von noch höherer als n^{ter} Ordnung. Die Kurven K und K' könnten sogar möglicherweise völlig zusammenfallen.

Man wird unter Umständen auch bei einer Kurvenschar, deren Gleichung die allgemeine Form

$$(4) \qquad F(x, y_1, c_0, c_1 \cdots c_n) = 0$$

hat, über die $n+1$ Konstanten so verfügen können, daß die Berührung mit der Kurve K mindestens von der n^{ten} Ordnung wird. Die Konstanten können jedoch so in F eingehen, daß dies nicht mehr möglich ist. Die Behauptung, daß in der Schar, wenn ihre Gleichung in der Form (4) gegeben ist, eine Kurve enthalten sei, die K in mindestens n^{ter} Ordnung berührt, bedarf daher in jedem Falle eines besonderen Nachweises, indem man sich nicht mit der bloßen Abzählung der Konstanten begnügt, sondern die verlangte Kurve der Schar tatsächlich bestimmt.

217. Oskulierende Gerade und oskulierender Kegelschnitt. Die Gleichung einer Geraden enthält nur zwei Konstanten; sie läßt sich sofort in die Form (2) der vorigen Nummer setzen. Man kann daher zwischen einer gegebenen Kurve und einer Geraden in einem allgemein gegebenen Kurvenpunkte nur eine Berührung in erster Ordnung herstellen. Die oskulierende Gerade einer Kurve ist also in jedem Punkte nichts anderes als die Tangente der Kurve. Es ist nämlich

$$y_1 = c_0 + c_1 \cdot (x - x_0)$$

die allgemeine Gleichung einer Geraden, und man hat nach (3) in voriger Nummer anzusetzen:

$$c_0 = y_0, \quad c_1 = y_0'.$$

Dann wird die Gleichung der Geraden:

$$y_1 - y_0 = y_0' \cdot (x - x_0),$$

also in der Tat die Gleichung der Tangente im Punkte (x_0, y_0). Ihre laufenden Koordinaten sind x und y_1.

Die allgemeine Kegelschnittsgleichung enthält *fünf* willkürliche Konstanten. Bringt man sie auf die Form (2) der vorigen Nummer, so kann man zeigen, daß c_0, c_1, c_2, c_3, c_4

willkürlich bleiben; mithin hat der oskulierende Kegelschnitt einer gegebenen Kurve eine Berührung von mindestens vierter Ordnung mit dieser Kurve. In gewissen besonderen Fällen kann die Berührung eine höhere Ordnung haben. So gibt es z. B. auf einer Kurve dritter Ordnung im allgemeinen 27 Punkte, in denen der oskulierende Kegelschnitt eine Berührung fünfter Ordnung mit der Kurve eingeht. Wenn man Kegelschnitte betrachtet, die noch anderweitigen bestimmten Bedingungen genügen sollen, so wird die Zahl der willkürlichen Konstanten kleiner als fünf, und der oskulierende Kegelschnitt hat im allgemeinen eine Berührung von niederer als vierter Ordnung. Dieser Fall tritt z. B. ein, wenn man nur Parabeln betrachtet, die von vier Konstanten abhängen, oder Kreise, die von drei Konstanten abhängen. Diesen letzten Fall wollen wir genauer untersuchen.

218. Der oskulierende Kreis. Die allgemeine Gleichung eines Kreises enthält drei Konstanten, nämlich die Koordinaten a, b des Mittelpunktes und den Radius R. Man kann daher im allgemeinen in einem Punkte (x, y) einer gegebenen Kurve nur eine Berührung *zweiter* Ordnung mit einem Kreise herstellen, und die Bedingungen dieser Oskulation sind:

$$y_1 = y, \quad y_1' = y', \quad y_1'' = y'', \tag{1}$$

wenn y_1 die Ordinate des zu x gehörigen Punktes des Kreises bezeichnet. Die Gleichung des Kreises ist:

$$(x-a)^2 + (y_1 - b)^2 = R^2.$$

Differenziert man sie zweimal, so folgt:

$$\begin{aligned} (x-a) + (y_1 - b)\, y_1' &= 0, \\ 1 + y_1'^2 + (y_1 - b)\, y_1'' &= 0. \end{aligned} \tag{2}$$

Ersetzt man y_1, y_1', y_1'' in diesen drei Gleichungen durch die Werte (1), so kommt:

$$\left\{ \begin{aligned} &(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2, \\ &(x-a) + (y-b)y' = 0, \\ &1 + y'^2 + (y-b)y'' = 0, \end{aligned} \right. \tag{3}$$

woraus sich die Koordinaten a, b des Mittelpunktes und der Radius R des im Kurvenpunkte (x, y) oskulierenden Kreises berechnen lassen. Es gehen dabei die in Nr. 197 unter (6)

und (1) für x_1, y_1 und R gefundenen Werte hervor, so daß wir zum *Krümmungskreise* des Kurvenpunktes (x, y) kommen.

Satz 20: In der Ebene ist von allen Kreisen durch einen Punkt einer Kurve der Krümmungskreis dieses Punktes derjenige, der die Kurve dort in der höchsten, nämlich in mindestens zweiter Ordnung berührt.

Er wird die Kurve dort im allgemeinen in gerade zweiter Ordnung berühren, d. h. die Kurve im Berührungspunkte nach Satz 19 in Nr. 215 durchsetzen. Dagegen berührt er sie in mindestens dritter Ordnung, wenn noch die Bedingung $y_1''' = y'''$ an der Stelle (x, y) erfüllt ist. Nochmalige Differentiation von (2) gibt dafür, wenn darin y_1, y_1', y_1'', y_1''' durch y, y', y'', y''' ersetzt werden, die Bedingung:

$$3y'y'' + (y - b)y''' = 0$$

oder, wenn $y - b$ aus der letzten Gleichung (3) hierin eingesetzt wird:

$$3y'y''^2 - (1 + y'^2)y''' = 0.$$

Diese Bedingung ist dieselbe wie die Gleichung (3) in Nr. 200. Daher sind diejenigen Punkte einer Kurve, in denen sie mit ihrem Krümmungskreise eine Berührung von höherer als zweiter Ordnung eingeht, die *Scheitel* der Kurve.

Satz 21: Die Scheitel einer ebenen Kurve, d. h. diejenigen Punkte (x, y) der Kurve, in denen das Differential dR des Krümmungsradius R gleich Null ist, sind identisch mit den Punkten, in denen die Kurve vom Krümmungskreise in höherer als zweiter Ordnung berührt wird. Die Bedingung dafür ist

$$3y'y''^2 - (1 + y'^2)y''' = 0,$$

wenn y', y'', y''' die Ableitungen von y nach x bedeuten.

Da in einem Scheitel das Differential dR des Krümmungsradius verschwindet, so ist der Scheitel ein solcher Punkt, in dem die erste notwendige Bedingung für das Vorhandensein eines Maximums oder Minimums des Krümmungsradius erfüllt wird (vgl. Nr. 140). Man kann nun, wenn man will, zwischen *eigentlichen und uneigentlichen Scheiteln* (ähnlich wie zwischen eigentlichen und uneigentlichen Wendepunkten, vgl. Nr. 172) unterscheiden, d. h. als eigentliche Scheitel nur solche Kurvenpunkte bezeichnen, in denen nicht nur $dR = 0$, sondern wirklich

ein Maximum oder Minimum des Krümmungsradius vorhanden ist. Im allgemeinen wird mit $dR = 0$ nicht auch $d^2R = 0$ sein, d. h. im allgemeinen wird der Scheitel ein eigentlicher Scheitel sein (vgl. Satz 1, Nr. 142). Wir werden nur die erste notwendige Bedingung $dR = 0$ für einen Scheitel voraussetzen.

Sollen *alle* Kurvenpunkte Scheitel sein, so muß für alle Werte von x die Bedingung des Satzes 21 erfüllt sein. Nun aber ist, wenn x_1, y_1 die Koordinaten des Krümmungsmittelpunktes bedeuten, nach (6) in Nr. 197:

$$x_1 = x - \frac{(1+y'^2)y'}{y''}, \quad y_1 = y + \frac{1+y'^2}{y''}, \tag{4}$$

also, wenn vollständig nach x differenziert wird:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dx} = -\dfrac{y'}{y''^2}[3y'y''^2 - (1+y'^2)y'''], \\ \dfrac{dy_1}{dx} = -\dfrac{1}{y''^2}[3y'y''^2 - (1+y'^2)y'''], \end{cases} \tag{5}$$

so daß $dx_1 = 0$ und $dy_1 = 0$ folgt, also $x_1 =$ konst. und $y_1 =$ konst. Da auch $dR = 0$, daher $R =$ konst. ist, so sind dann alle Krümmungskreise der Kurve miteinander identisch, d. h. die Kurve ist dieser Kreis selbst. Hierbei war die Annahme $y'' = 0$ auszuschließen. Im Falle $y'' = 0$ aber ist $y = ax + b$, d. h. es liegt eine Gerade vor, die überall mit ihrem Krümmungskreise zusammenfällt. Daher:

Satz 22: Die einzigen ebenen Kurven, die überall Scheitel haben, sind die Geraden und die Kreise.

Dies rechtfertigt nachträglich unsere obige Aussage, daß die Punkte einer Kurve im allgemeinen keine Scheitel sind.

Hat eine Kurve eine Symmetriegerade und wählen wir die Gerade als y-Achse, so hat die Funktion $y = f(x)$, deren Bild die Kurve ist, die Eigenschaft, daß stets $f(x) = f(-x)$ ist. Hieraus ergibt sich durch Differentiation nach x:

$$f'(x) = -f'(-x), \quad f''(x) = f''(-x), \quad f'''(x) = -f'''(-x).$$

Für $x = 0$ folgt hieraus, falls dann die Ableitungen nicht unstetig werden, daß $f'(0) = 0$ und $f'''(0) = 0$, also y' und y''' gleich Null für die Schnittpunkte der Kurve mit der Symmetriegeraden werden. Dann aber ist für diesen Punkt die Bedingung des Satzes 21 erfüllt. Daher:

Satz 23: Hat eine ebene Kurve eine Symmetriegerade, so sind ihre Schnittpunkte mit der Symmetriegerade Scheitel, falls dort die drei ersten Ableitungen stetig bleiben.

Z. B. die höchsten und tiefsten Stellen der Sinuslinie $y = \sin x$ (siehe Nr. 9) sind Scheitel, ebenso diejenigen Punkte eines Kegelschnittes, die man in der analytischen Geometrie seine Haupt- und Nebenscheitel zu nennen pflegt.

Die Gleichungen (4) stellen die Koordinaten x_1, y_1 der Punkte der Evolute als Funktionen von x, also einer Hilfsveränderlichen, dar. Aus (5) und aus Satz 21 folgt, daß, wenn x die Abszisse eines Scheitels der gegebenen Kurve ist, alsdann für den zugehörigen Punkt der Evolute $dx_1 : dx$ und $dy_1 : dx$ gleich Null sind. Nach Nr. 191 ist dieser Punkt der Evolute folglich singulär und zwar in der Regel eine Spitze.

Einem Scheitel der Evolvente gehört also ein singulärer Punkt der Evolute und zwar in der Regel eine Spitze der Evolute zu.

Achtes Kapitel.

Anwendungen der Theorie der ebenen Kurven.

§ 1. Die Fläche und das Bogenelement der Kegelschnitte.

219. Die Parabelfläche. Obwohl die Ausmessung der von Kurven begrenzten Flächen der Integralrechnung angehört und daher in allgemeiner Form erst im zweiten Bande behandelt werden soll, können wir doch schon hier einige der einfachsten Fälle, insbesondere zunächst die Kegelschnitte, behandeln.

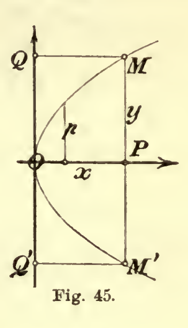


Fig. 45.

Es sei erstens (siehe Fig. 45) die Fläche des Segmentes MOM' zu bestimmen, das zwischen dem Bogen der die y-Achse im Scheitel O berührenden *Parabel* $y^2 = 2px$ und einer Parallelen $M'M$ zur y-Achse enthalten ist. Sind x, y die Koordinaten eines veränderlichen Kurvenpunktes M, so gilt für das Differential des oberhalb der x-Achse gelegenen Flächenstückes u, das mit x veränderlich ist, nach Satz 11 in Nr. 192 die Formel:

$$du = y dx.$$

Die Gleichung $y^2 = 2px$ der Parabel ergibt aber:

$$y = \sqrt{2p} \cdot x^{\frac{1}{2}};$$

also kommt:

$$du = \sqrt{2p} \cdot x^{\frac{1}{2}} dx.$$

Da nun $x^{\frac{1}{2}} dx$ das Differential von $\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}}$ ist, so hat die Fläche u das nämliche Differential wie die Funktion $\frac{2}{3}\sqrt{2p} \cdot x^{\frac{3}{2}}$ und

kann sich daher nach Satz 8 in Nr. 29 von dieser Funktion nur um eine additive Konstante unterscheiden. Ferner werden beide Funktionen für $x = 0$ ebenfalls gleich Null; mithin muß die Konstante auch gleich Null sein. Daher ergibt sich:

$$u = \tfrac{2}{3}\sqrt{2px} \cdot x = \tfrac{2}{3}xy.$$

Diese Gleichung besagt, daß die Parabelfläche OPM gleich zwei Dritteln der Fläche des Rechtecks $OPMQ$ ist. Desgleichen ist die Fläche $OM'P$ gleich zwei Dritteln des Rechtecks $OPM'Q'$; mithin ist das Segment MOM' auch gleich zwei Dritteln des Rechtecks $Q'M'MQ$.

220. Die Ellipsenfläche. Es seien $2a$ und $2b$ die Längen der Haupt- und Nebenachse einer *Ellipse*, und diese beiden Achsen mögen die Koordinatenachsen sein. Es werde nun diejenige Fläche u gesucht, die zwischen den beiden Achsen, dem Bogen BM und der Ordinate $y = PM$ liegt (siehe Fig. 46). Wird der Kreis konstruiert, der die große Achse $2a$ zum Durchmesser hat, und mit u_1 die Fläche bezeichnet, die zwischen den Achsen, dem Kreisbogen $B'M'$ und der Ordinate $y_1 = PM'$ liegt, so ist nach Satz 11 in Nr. 192:

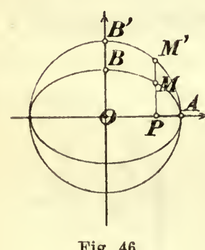


Fig. 46.

$$du = y\,dx, \quad du_1 = y_1\,dx.$$

Da aber y_1 und y die Ordinaten des Kreises und der Ellipse sind, so ist bekanntlich $y_1 : a = y : b$, also

$$du = \frac{b}{a}\,du_1.$$

Mithin haben die Größen u und $bu_1 : a$ dasselbe Differential, und weil beide mit x verschwinden, sind sie nach Satz 8 in Nr. 29 einander gleich, d. h. es ist:

$$u = \frac{b}{a}\,u_1.$$

Die ganze Kreisfläche ist gleich πa^2, die ganze Ellipsenfläche demnach gleich πab.

221. Die Hyperbelfläche. Hier schicken wir voraus: Die Betrachtung in Nr. 192 bleibt — wie manche unserer früheren Betrachtungen — richtig, wenn die Koordinaten x, y nicht recht-, sondern schiefwinklig sind. An die Stelle der in Nr. 192 erwähnten Rechtecke treten dann Parallelogramme. *Die Flächeneinheit ist der Inhalt desjenigen Rhombus, dessen Seiten parallel zu den Achsen und gleich der Längeneinheit sind.*

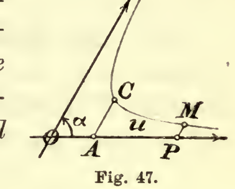


Fig. 47.

Wir betrachten nun eine *Hyperbel*, die auf ihre beiden Asymptoten als Koordinatenachsen bezogen ist; ihre Gleichung lautet:

$$xy = m^2.$$

Es sei u die Fläche, die zwischen der Kurve, der x-Achse und den Ordinaten AC und PM liegt; $OA = x_0$ sei fest und $OP = x > x_0$ veränderlich. Siehe Fig. 47. Nach Nr. 192 ist allgemein:

$$du = y\,dx.$$

Also wird für die Hyperbel:

$$du = m^2 \frac{dx}{x}\cdot$$

Nun ist $dx : x$ das Differential des natürlichen Logarithmus von x; daher kommt nach Satz 8 in Nr. 29:

$$u = m^2 \ln x + \text{konst.}$$

Die Fläche u ist gleich Null, wenn x gleich der Abszisse x_0 des Punktes C ist; folglich muß sein:

$$0 = m^2 \ln x_0 + \text{konst.} \quad \text{oder} \quad \text{konst.} = -m^2 \ln x_0.$$

Demnach wird:

$$u = m^2 \ln \frac{x}{x_0}\cdot$$

Benutzen wir als *Flächeneinheit* nicht den Rhombus mit den Seitenlängen Eins, sondern das *Quadrat*, dessen Seitenlänge die Längeneinheit ist, so ändert sich die Formel. Ist nämlich α der Winkel der beiden Koordinatenachsen, d. h. der Hyperbelasymptoten, so ist dann noch mit $\sin\alpha$ zu multipli-

zieren, da sich der Inhalt des Rhombus zu dem des Quadrates wie $\sin\alpha$ zu Eins verhält. Also ist dann:

$$u = m^2 \sin\alpha \ln\frac{x}{x_0}\cdot$$

Bei einer *gleichseitigen Hyberbel* ist α ein rechter Winkel. Wählen wir bei ihr als feste Anfangsordinate die des Scheitels C der Hyperbel, für den $x_0 = m$ ist, und nehmen wir m gleich der Längeneinheit an, so wird:

$$u = \ln x.$$

Die durch die verschiedenen Ordinaten der gleichseitigen Hyperbel begrenzten Flächen sind also gleich den natürlichen Logarithmen der entsprechenden Abszissen. Deshalb heißen die natürlichen Logarithmen auch die *hyperbolischen.*

222. Das Bogenelement der Ellipse. Die Koordinaten eines laufenden Punktes einer *Ellipse,* bezogen auf die Hauptachsen, lassen sich als Funktionen eines veränderlichen Winkels φ durch die Gleichungen

$$x = a\sin\varphi, \quad y = b\cos\varphi$$

ausdrücken; a und b sind die Längen der Halbachsen, φ ist die sogenannte *exzentrische Anomalie,* gerechnet von der kleinen Achse aus. Konstruiert man nämlich den konzentrischen Kreis mit dem Durchmesser $2a$, so wird der zu einem Punkte M der Fläche zugehörige Winkel φ gefunden, indem man die Ordinate PM (vgl. Fig. 46 auf S. 370) bis zu ihrem Durchschnitte M' mit diesem Kreise verlängert; denn es ist alsdann $\sphericalangle B'OM' = \varphi$. Aus den obigen Gleichungen folgt:

$$dx = a\cos\varphi\, d\varphi, \quad dy = -b\sin\varphi\, d\varphi,$$

also nach (2) in Nr. 193 das Differential der Bogenlänge:

$$(1) \qquad ds = \sqrt{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi}\, d\varphi.$$

Bezeichnet man mit k die Exzentrizität, d. h. $\sqrt{a^2 - b^2} : a$, so gewinnt dieser Ausdruck die Form:

$$(2) \qquad ds = a\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}\, d\varphi,$$

wofür man auch schreiben kann:

$$(3) \qquad \frac{ds}{a} = \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}} - k^2 \frac{\sin^2\varphi\, d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}}.$$

Bisweilen ist es nützlich, ds als Funktion des Winkels ν zu bestimmen, den die Normale der Ellipse mit der x-Achse bildet. Nach den vorigen Formeln und nach (2) in Nr. 169 wird:

$$\operatorname{tg}\nu = -\frac{dx}{dy} = \frac{a}{b}\operatorname{ctg}\varphi, \quad \text{d. h.} \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{a}{b}\operatorname{ctg}\nu,$$

also:

$$a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi = \frac{a^2 b^2}{a^2\cos^2\nu + b^2\sin^2\nu}$$

und:

$$d\varphi = -\frac{a}{b}\frac{\cos^2\varphi}{\sin^2\nu}\,d\nu = -\frac{ab\,d\nu}{a^2\cos^2\nu + b^2\sin^2\nu}.$$

Daher kommt:

$$ds = \frac{-a^2 b^2\,d\nu}{\sqrt{a^2\cos^2\nu + b^2\sin^2\nu}^3}$$

oder auch:

$$(4) \qquad ds = \frac{b^2}{a}\frac{-d\nu}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\nu}^3}.$$

Da $\nu = \tau + \frac{1}{2}\pi$ nach Nr. 169 ist, so kommt $d\nu = d\tau$. Folglich ist $ds : d\nu$ nach Nr. 197 der *Krümmungsradius* der Ellipse.

223. Das Bogenelement der Hyperbel. Wählen wir als x-Achse die Nebenachse, als y-Achse die Hauptachse einer *Hyperbel* und bezeichnen wir mit $2a$ die Länge der ersten Achse, mit $2b$ die Länge der zweiten, setzen wir ferner $k = b : \sqrt{a^2 + b^2}$, so wird die Gleichung der Kurve (vgl. Fig. 48):

$$y = \frac{k}{\sqrt{1 - k^2}}\sqrt{x^2 + a^2}.$$

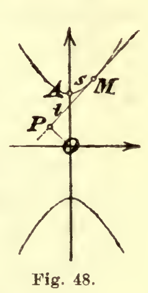


Fig. 48.

Die Koordinaten x, y kann man als Funktionen eines Winkels φ ausdrücken, indem man

$$x = a\sqrt{1 - k^2}\operatorname{tg}\varphi, \quad y = \frac{ak}{\sqrt{1 - k^2}}\frac{\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}}{\cos\varphi}$$

setzt. Sie genügen bei jedem Werte von φ der Kurvengleichung. Hieraus folgt:

$$dx = a\sqrt{1 - k^2}\frac{d\varphi}{\cos^2\varphi}, \quad dy = a\sqrt{1 - k^2}\frac{k\sin\varphi}{\cos^2\varphi\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}}d\varphi.$$

Also wird nach (2) in Nr. 193 das Bogendifferential:

$$(1)\qquad ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = a\sqrt{1-k^2}\,\frac{d\varphi}{\cos^2\varphi\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}.$$

Für den Endpunkt M des Bogens s, dessen Anfang wir im Scheitel A auf der y-Achse annehmen, konstruieren wir die Tangente; dann fällen wir auf sie vom Mittelpunkte die Senkrechte OP. Die Normalform der Gleichung der Geraden OP lautet in den laufenden Koordinaten $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$:

$$\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\cdot\mathfrak{x} + k\sin\varphi\cdot\mathfrak{y} = 0.$$

Bezeichnet t die Strecke PM der Tangente, also die Entfernung des Punktes M von der Geraden OP, ist mithin

$$(2)\qquad t = \frac{a}{\sqrt{1-k^2}}\operatorname{tang}\varphi\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi},$$

so folgt:

$$(3)\qquad dt = a\sqrt{1-k^2}\,\frac{d\varphi}{\cos^2\varphi\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} + \frac{ak^2}{\sqrt{1-k^2}}\left(\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} - \frac{\sin^2\varphi\,d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}\right).$$

Subtrahieren wir nun die Gleichung (3) von der Gleichung (1), so wird:

$$(4)\qquad d(s-t) = \frac{ak^2}{\sqrt{1-k^2}}\left(\frac{\sin^2\varphi\,d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} - \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}\right).$$

Die Größe t ist eine nach (2) leicht zu berechnende algebraische Funktion der Koordinaten. Man sieht, daß das Differential der Differenz $s-t$ eine ähnliche Form hat wie das Differential (3) des Ellipsenbogens in Nr. 222.

224. Rektifikation der Parabel. Unter *Rektifikation* versteht man, wie schon in Nr. 202 erwähnt wurde, die Bestimmung der Bogenlänge einer Kurve. Es liege nun insbesondere die Gleichung einer *Parabel* vor:

$$y^2 = 2px,$$

bezogen auf ihre Achse und Scheiteltangente als Koordinatenachsen. Für den Tangentenwinkel τ ist nach Nr. 169:

$$\operatorname{tg}\tau = \frac{dy}{dx} = \frac{p}{y},$$

so daß die Parabel auch so dargestellt werden kann:

$$y = p \operatorname{ctg} \tau, \quad x = \frac{p}{2} \operatorname{ctg}^2 \tau.$$

(Es ist dies ein Beispiel zu Nr. 213, indem jetzt die Funktion $f(\tau)$ den Wert $-p \cos^2 \tau : 2 \sin \tau$ hat.) Nun ergibt sich:

$$dy = -\frac{p\,d\tau}{\sin^2 \tau}, \quad dx = -\frac{p \operatorname{ctg} \tau\, d\tau}{\sin^2 \tau},$$

demnach als Bogendifferential nach (2) in Nr. 193:

$$(1) \qquad ds = -\frac{p\,d\tau}{\sin^3 \tau}.$$

Wir müssen hier das Minuszeichen setzen, weil die Bogenlänge s, die wir vom Scheitel an rechnen wollen, wächst, wenn der Winkel τ abnimmt.

Fig. 49.

Bezeichnen wir mit t die Länge PM der Tangente zwischen dem Berührungspunkte M, der zugleich Endpunkt des Bogens s ist, und dem Schnittpunkte P mit der y-Achse (siehe Fig. 49), so wird:

$$t = \frac{x}{\cos \tau} = \frac{p}{2} \frac{\cos \tau}{\sin^2 \tau},$$

demnach:

$$(2) \qquad dt = \frac{p}{2} \frac{d\tau}{\sin \tau} - p \frac{d\tau}{\sin^3 \tau}.$$

Subtraktion dieser Gleichung von (1) gibt:

$$(3) \qquad d(s - t) = -\frac{p}{2} \frac{d\tau}{\sin \tau}.$$

In Nr. 52 wurde gezeigt, daß $d\tau : \sin \tau$ das Differential von $\ln \operatorname{tg} \frac{1}{2}\tau$ ist; mithin kommt nach Satz 8 in Nr. 29:

$$s - t = -\frac{p}{2} \ln \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\tau + \text{konst.}$$

Der Bogen s und die Strecke t verschwinden aber für $\tau = \frac{1}{2}\pi$ (d. h. wenn M in O liegt), folglich ist die Konstante gleich Null; es kommt also:

$$(4) \qquad s = t - \frac{p}{2} \ln \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\tau.$$

225. Anwendung der Parabelrektifikation. Hieran schließen wir eine Anwendung: Die gerade Linie PF, die den Punkt P mit dem Brennpunkte F der Parabel verbindet, steht bekanntlich auf der Tangente senkrecht; ihre Länge ist:

$$PF = \frac{p}{2 \sin \tau}.$$

Wählen wir nun den Punkt J auf der Verlängerung von MP so, daß JM gleich dem Bogen s ist, so wird:

$$JP = s - t = -\frac{p}{2} \ln \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\tau.$$

Wenn wir das Lot JS zu JM konstruieren und alsdann die beiden Geraden JM und JS zu Koordinatenachsen machen, so werden die Koordinaten $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ des Brennpunktes F in diesem neuen Systeme:

$$\mathfrak{x} = -\frac{p}{2} \ln \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\tau, \qquad \mathfrak{y} = \frac{p}{2 \sin \tau}.$$

Aus der ersten Gleichung folgt:

$$e^{-\frac{2\mathfrak{x}}{p}} = \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\tau \quad \text{und} \quad e^{\frac{2\mathfrak{x}}{p}} = \operatorname{ctg} \tfrac{1}{2}\tau$$

oder:

$$e^{\frac{2\mathfrak{x}}{p}} + e^{-\frac{2\mathfrak{x}}{p}} = \frac{2}{\sin \tau},$$

und auf Grund der zweiten Geichung wird also:

$$e^{\frac{2\mathfrak{x}}{p}} + e^{-\frac{2\mathfrak{x}}{p}} = \frac{4\mathfrak{y}}{p} \quad \text{oder} \quad \mathfrak{y} = \frac{p}{4}\left(e^{\frac{2\mathfrak{x}}{p}} + e^{-\frac{2\mathfrak{x}}{p}}\right).$$

Es ist nach dem Vorhergehenden leicht einzusehen, daß dies die Gleichung derjenigen Kurve wird, die der Brennpunkt beschreibt, wenn die Parabel, ohne zu gleiten, auf der festen Geraden JM abrollt. Diese Kurve ist die *Kettenlinie.*

§ 2. Krümmung der Kegelschnitte.

226. Krümmungsradius beim Kegelschnitte. Die allgemeine Gleichung eines *Kegelschnittes* kann immer, indem die Hauptachse als x-Achse und ein Hauptscheitel als Anfangspunkt gewählt wird, auf die Form

$$(1) \qquad y^2 = 2px + qx^2$$

gebracht werden, wo p eine *positive* Konstante bedeutet und

bekanntlich der *Parameter* des Kegelschnittes heißt. Durch zweimalige Differentiation erhält man:

$$yy' = p + qx, \tag{2}$$

$$yy'' + y'^2 = q. \tag{3}$$

Multipliziert man die Gleichungen (1) und (3) miteinander und subtrahiert man alsdann die Gleichung (2), nachdem sie ins Quadrat erhoben worden ist, so folgt:

$$y^3 y'' = -p^2.$$

Der in Nr. 197 gewonnene Wert (1) für den Krümmungsradius wird folglich hier:

$$R = -\frac{\sqrt{y^2(1+y'^2)}^3}{p^2},$$

wobei die Quadratwurzel positiv ist. Nach Nr. 170 hat aber, wenn die Normale des Kurvenpunktes die x-Achse in N trifft, die Länge MN dieser Normale den Wert:

$$MN = -y\sqrt{1+y'^2}.$$

Demnach ergibt sich:

$$R = \frac{MN^3}{p^2}. \tag{4}$$

Der Krümmungsradius des Kegelschnittes ist also dem Kubus der Normale proportional, diese gerechnet vom Kurvenpunkte M bis zum Schnittpunkte N mit der Hauptachse. In (4) ist MN positiv oder negativ, je nachdem die Richtung von M nach N die positive oder negative Richtung der Normale ist. Die Kurve wird positiv im Sinne wachsender x durchlaufen.

Die Gleichung (2) gibt nach (1), ins Quadrat erhoben:

$$y^2 y'^2 = p^2 + 2pqx + q^2x^2 = p^2 + qy^2,$$

folglich ist:

$$MN = \pm\sqrt{p^2 + (1+q)y^2}, \tag{5}$$

wo das Plus- oder Minuszeichen gilt, je nachdem y' für den betrachteten Punkt M, also je nachdem $(p+qx):y$ positiv oder negativ wird. Man kann mithin den Krümmungsradius nach (4) und (1) leicht als Funktion einer der beiden Koordinaten ausdrücken.

Einen anderen bemerkenswerten Ausdruck für ihn erhält man, wenn man den Winkel λ einführt, den die Normale mit dem von einem Brennpunkte ausgehenden Radiusvektor bildet.

Bezeichnet ϱ die Länge dieses Brennstrahls und ω seinen Winkel mit der x-Achse, so hat man bekanntlich:

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{1 + \sqrt{1+q}\cos\omega}{p}, \quad \text{daher} \quad \frac{d\varrho}{\varrho^2} = \frac{\sqrt{1+q}\sin\omega}{p}\, d\omega.$$

Der Winkel λ wird nun nach (5) in Nr. 206 bestimmt durch die Gleichung

$$\operatorname{tg}\lambda = -\frac{d\varrho}{\varrho\, d\omega},$$

und es kommt demnach hier:

$$\operatorname{tg}\lambda = \frac{-\sqrt{1+q}}{p}\varrho\sin\omega = \frac{-y\sqrt{1+q}}{p}.$$

Die Gleichung (5) gibt folglich:

$$MN^2 = \frac{p^2}{\cos^2\lambda}. \tag{6}$$

Die Projektion der Normale auf den von einem Brennpunkte ausgehenden Radiusvektor ist also beim Kegelschnitte konstant und gleich dem Parameter.

Der Ausdruck (4) für den Krümmungsradius wird, indem man MN durch seinen Wert aus der Gleichung (6) ersetzt:

$$R = \frac{MN}{\cos^2\lambda}, \tag{7}$$

wo auch das Vorzeichen stimmt, weil R positiv oder negativ ist, je nachdem R auf der positiven oder negativen Normale liegt, und MN positiv oder negativ ist, je nachdem N auf der positiven oder negativen Normale liegt.

227. Konstruktion des Krümmungsmittelpunktes beim Kegelschnitte. Die letzte Formel führt zu einer einfachen Konstruktion des Krümmungsradius. (Siehe Fig. 50.) Man ziehe die Normale von M bis zu ihrem Schnittpunkte N mit der Hauptachse, errichte in N die zur Normale Senkrechte NG bis zu ihrem Durchschnitte G mit dem Brennstrahle MF und konstruiere im Punkte G das Lot GC zum Brennstrahle, das die Normale in C schneide. Dann ist C der Krümmungsmittelpunkt des Kurvenpunktes M. Denn es ist:

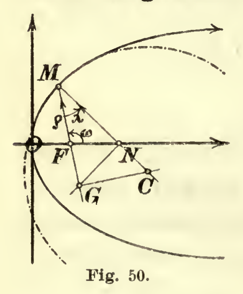


Fig. 50.

$$MG = \frac{MN}{\cos\lambda}, \quad MC = \frac{MG}{\cos\lambda}.$$

Diese Konstruktion versagt jedoch, wenn der Kurvenpunkt M der Scheitel O ist. Rückt M längs des Kegelschnittes nach O, so wird die Grenzlage des Punktes N nach Satz 13, Nr. 198, der Krümmungsmittelpunkt von O, weil der Scheitel O die Hauptachse OF zur Normalen hat. Beim Grenzübergange wird demnach R gleich MN, so daß aus (4) in voriger Nummer $R = p$ als Krümmungsradius des Scheitels O hervorgeht.

228. Evolute der Ellipse. Aus der Ellipsengleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{1}$$

folgt durch zweimalige Differentiation:

$$\frac{x}{a^2} + \frac{yy'}{b^2} = 0,$$

$$\frac{1}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} + \frac{yy''}{b^2} = 0$$

oder:

$$y' = -\frac{b^2}{a^2}\,\frac{x}{y}, \qquad y'' = -\frac{b^4}{a^2 y^3},$$

ferner:

$$1 + y'^2 = \frac{a^4 y^2 + b^4 x^2}{a^4 y^2} = \frac{b^2(a^4 - c^2 x^2)}{a^4 y^2} = \frac{b^4 + c^2 y^2}{a^2 y^2},$$

wenn $a^2 - b^2 = c^2$ gesetzt wird.

Die Gleichungen (6) in Nr. 197 für die Koordinaten des Krümmungsmittelpunktes geben folglich:

$$x_1 = \frac{c^2 x^3}{a^4}, \qquad y_1 = -\frac{c^2 y^3}{b^4}. \tag{2}$$

Nimmt man c^2 positiv an, d. h. $a^2 > b^2$, und setzt man

$$a_1 = \frac{c^2}{a}, \qquad b_1 = \frac{c^2}{b},$$

so erfüllen x_1 und y_1 wegen (1) die Gleichung:

$$\left(\frac{x_1}{a_1}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y_1}{b_1}\right)^{\frac{2}{3}} = 1, \tag{3}$$

die demnach die *Evolute der Ellipse* darstellt.

Diese Kurve hat als Symmetrieachsen die Ellipsenachsen,

und die Punkte G, G', in denen sie die Hauptachse schneidet, liegen zwischen den Brennpunkten F, F' der Ellipse, weil $a_1 < c$ ist. Ferner erkennt man aus den Gleichungen (2), daß der zu einem Quadranten der Ellipse gehörige Quadrant der Evolute auf der andern Seite der Hauptachse neben ihm liegt. Auch kann man bemerken, daß die Evolute ganz innerhalb der Ellipse liegt, wenn $b_1 < b$, d. h. $a < b\sqrt{2}$ ist. Sie trifft die Ellipse gerade in den Nebenscheiteln, wenn $a = b\sqrt{2}$ ist, schneidet dagegen die Ellipse in vier Punkten, wenn $a > b\sqrt{2}$ ist. Die Krümmungsradien der Ellipse in den Neben- und Hauptscheiteln haben die Längen $b + b_1$ und $a - a_1$ oder $a^2 : b$ und $b^2 : a$. Die Länge eines Quadranten der Evolute ist folglich nach Satz 15 in Nr. 200 gleich:

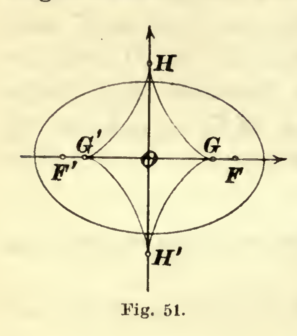


Fig. 51.

$$\frac{a^2}{b} - \frac{b^2}{a} = \frac{a^3 - b^3}{ab}.$$

Differenziert man die Gleichung (3) zweimal, so folgt:

$$\frac{1}{a_1}\left(\frac{x_1}{a_1}\right)^{-\frac{1}{3}} + \frac{1}{b_1}\left(\frac{y_1}{b_1}\right)^{-\frac{1}{3}} \frac{dy_1}{dx_1} = 0,$$

$$-\frac{1}{3a_1^2}\left(\frac{x_1}{a_1}\right)^{-\frac{4}{3}} - \frac{1}{3b_1^2}\left(\frac{y_1}{b_1}\right)^{-\frac{4}{3}}\left(\frac{dy_1}{dx_1}\right)^2 + \frac{1}{b_1}\left(\frac{y_1}{b_1}\right)^{-\frac{1}{3}} \frac{d^2y_1}{dx_1^2} = 0$$

und hieraus:

$$\frac{dy_1}{dx_1} = -\frac{b_1^{\frac{2}{3}}}{a_1^{\frac{2}{3}}} \cdot \frac{y_1^{\frac{1}{3}}}{x_1^{\frac{1}{3}}}, \qquad \frac{d^2y_1}{dx_1^2} = \frac{b_1^{\frac{4}{3}}}{3a_1^{\frac{2}{3}} x_1^{\frac{4}{3}} y_1^{\frac{1}{3}}}.$$

Der Krümmungsradius R_1 der Evolute wird also nach (1), Nr. 197:

$$R_1 = \frac{3x_1^{\frac{1}{3}} y_1^{\frac{1}{3}} (a_1^{\frac{4}{3}} x_1^{\frac{2}{3}} + b_1^{\frac{4}{3}} y_1^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}}{a_1^{\frac{4}{3}} b_1^{\frac{4}{3}}}.$$

Der Wert $dy_1 : dx_1$ ist gleich Null bzw. gleich ∞ in den Schnittpunkten G, G' bzw. H, H' mit der großen und kleinen Achse. Hieraus erkennt man, daß diese vier Punkte Spitzen sind. Vgl. die letzte Bemerkung in Nr. 218. Der Wert von $d^2y_1 : dx_1^2$ hat immer dasselbe Vorzeichen wie y_1. Die Evolute

ist also nach Satz 5 in Nr. 173 überall konvex gegenüber der Abszissenachse.

229. Evolute der Hyperbel. Bei der Rechnung, die uns zur Gleichung der Ellipsenevolute führte, braucht b^2 nicht positiv angenommen zu werden; sie gilt daher auch für die Hyperbel. Schreibt man nämlich $-b^2$ an Stelle von b^2, so erhält die mit c^2 bezeichnete Größe den Wert

$$c^2 = a^2 + b^2,$$

und die Gleichungen (1) und (2) der vorigen Nummer werden:

$$(1) \qquad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

$$(2) \qquad x_1 = \frac{c^2 x^3}{a^4}, \quad y_1 = -\frac{c^2 y^3}{b^4}.$$

Die Gleichung (1) stellt die Hyperbel dar, die Gleichungen (2) geben die Koordinaten ihres Krümmungsmittelpunktes an. Setzt man wie früher:

$$a_1 = \frac{c^2}{a}, \quad b_1 = \frac{c^2}{b},$$

so gibt die Elimination von x und y als Gleichung der *Evolute der Hyperbel:*

$$(3) \qquad \left(\frac{x_1}{a_1}\right)^{\frac{2}{3}} - \left(\frac{y_1}{b_1}\right)^{\frac{2}{3}} = 1.$$

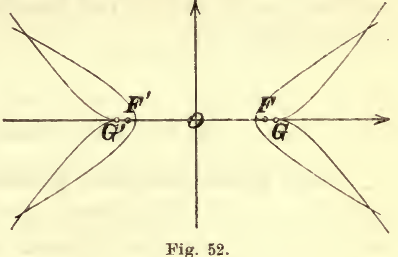


Fig. 52.

Man erkennt hieraus leicht, daß die Evolute, siehe Fig. 52, aus unendlichen Ästen besteht, die zu den beiden Achsen symmetrisch und gegenüber der Hauptachse konvex sind. Die Punkte G, G', in denen sie diese Achse trifft, sind Spitzen. (Vgl. die letzte Bemerkung in Nr. 218.) Sie liegen außerhalb der Brennpunktsstrecke FF', weil $a_1 > c$ ist.

230. Evolute der Parabel. Die Gleichung der Parabel

$$y^2 = 2px$$

ergibt:

$$y' = \frac{p}{y}, \quad y'' = -\frac{p^2}{y^3}, \quad 1 + y'^2 = 1 + \frac{p^2}{y^2} = \frac{2px + p^2}{y^2},$$

und hieraus folgen nach (6) in Nr. 197 für die Koordinaten x_1, y_1 des Krümmungsmittelpunktes die Werte:

$$x_1 = 3x + p, \quad y_1 = -\frac{y^3}{p^2}.$$

Es ist also:

$$x = \tfrac{1}{3}(x_1 - p), \quad y = -\sqrt[3]{y_1 p^2}.$$

Trägt man diese Werte in die Gleichung der Parabel ein, so erhält man die der Evolute:

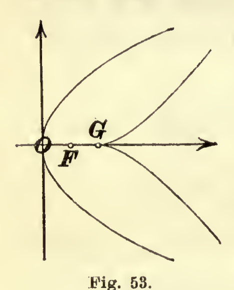


Fig. 53.

$$y_1^{\,2} = \frac{8}{27}\,\frac{(x_1 - p)^3}{p}.$$

Durch Differentiation folgt:

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \left(\frac{y_1}{p}\right)^{\frac{1}{3}}, \quad y_1 \frac{d^2 y_1}{dx_1^{\,2}} = \frac{1}{3}\left(\frac{y_1}{p}\right)^{\frac{2}{3}}.$$

Diese Gleichungen beweisen, daß die Evolute der Parabel aus zwei unendlichen Ästen besteht, die sich in einem Punkte G der Hauptachse vereinigen. Dieser Punkt mit der Abszisse p, ist eine Spitze, siehe Fig. 53. Vgl. die letzte Bemerkung in Nr. 218. Die Evolute kehrt der Parabelachse die konvexe Seite zu.

§ 3. Die gemeine Zykloide.

231. Definition der gemeinen Zykloide. Die gemeine *Zykloide* ist die Bahnkurve eines Punktes auf der Peripherie eines Kreises, der ohne Gleiten auf einer festen Geraden rollt.

Als x-Achse wählen wir die Gerade, längs deren der Kreis rollt, und als Anfangspunkt einen solchen Punkt A auf dieser Geraden, der zur Zykloide gehört. Da sich die Bewegung des rollenden Kreises unbegrenzt fortsetzt und der erzeugende Punkt dabei immer wieder auf die Gerade kommt, so besteht die Zykloide aus unendlich vielen kongruenten Teilen.

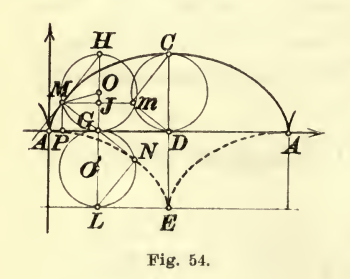


Fig. 54.

Die positive y-Achse liege auf derjenigen Seite der x-Achse, auf der auch der Kreis rollt. Wir fassen den ersten oberhalb der positiven x-Achse gelegenen Teil der Kurve ins Auge. Es sei G der Berührungspunkt des Kreises mit der x-Achse in einer be-

liebigen Lage, M der zugehörige Punkt der Zykloide und P der Fußpunkt seiner Ordinate, so daß $AP = x$, $PM = y$ ist. Siehe Fig. 54. Es sei ferner H der höchste Punkt des Kreises und O seine Mitte. Die Parallele zur x-Achse durch M treffe den Durchmesser GH in J. Dann ist:

$$x = AG - PG = AG - MJ, \quad y = GO - JO.$$

Bedeutet a den Radius des erzeugenden Kreises und φ den *Wälzungswinkel*, d. h. den Winkel, den der Radius OM mit dem Radius OG bildet, so ist

$$MJ = a \sin\varphi, \quad JO = a\cos\varphi.$$

Dabei ist φ positiv gemessen im Sinne der Drehung, die der Kreis beim Abrollen erfährt (also entgegen dem Sinne der Drehung von der positiven x-Achse zur positiven y-Achse).

Nun ist die Strecke AG gleich der Länge des Kreisbogens $GM = a\varphi$, weil der Kreis ohne Gleiten auf der Geraden rollt. Mithin wird:

$$(1) \qquad x = a(\varphi - \sin\varphi), \quad y = a(1 - \cos\varphi) = 2a\sin^2\tfrac{1}{2}\varphi,$$

und man erhält alle Punkte des einen sich periodisch wiederholenden Teiles der Kurve, wenn man der Größe φ alle Werte von 0 bis 2π gibt. Die zweite Gleichung (1) liefert:

$$(2) \qquad \cos\varphi = \frac{a-y}{a}, \quad \varphi = \operatorname{arc\,cos}\frac{a-y}{a},$$

daher:

$$(3) \qquad \sin\varphi = \frac{\sqrt{2ay - y^2}}{a}.$$

Einsetzen dieser Werte in die erste Gleichung (1) gibt:

$$(4) \qquad x = a \operatorname{arc\,cos}\frac{a-y}{a} - \sqrt{2ay - y^2}.$$

Beschränken wir uns auf Werte von φ zwischen 0 und 2π, so sind unter der Arkusfunktion die beiden Werte zwischen 0 und 2π zu verstehen; zu dem zwischen 0 und π gehört ein positiver, zu dem zwischen π und 2π ein negativer Wert der abzuziehenden Quadratwurzel.

Doch ist es nicht vorteilhaft, die Gleichung (4) an die Stelle der Gleichungen (1) zu setzen, und wir behalten daher die letzteren bei, durch die x und y als Funktionen einer

Hilfsveränderlichen φ gegeben werden. *Mit wachsendem* φ *wächst* x *ebenfalls.*

232. Tangente und Normale der gemeinen Zykloide. Durch Differentiation der Gleichungen (1) der vorigen Nummer folgt:

$$(1) \qquad dx = a(1 - \cos\varphi)\,d\varphi, \quad dy = a\sin\varphi\,d\varphi.$$

Nach Nr. 170 ist daher die Subnormale $y\,dy : dx$ gleich $a\sin\varphi$, also die Strecke PG, so daß die Normale des Punktes M der Zykloide durch G und mithin die Tangente durch H geht. Die Tangente eines Punktes M der Zykloide können wir, ohne den Kreis durch M zu ziehen, mit Hilfe irgend eines der Kreise vom Radius a leicht konstruieren, z. B. mit Hilfe des Kreises, der den höchsten Punkt C der Kurve enthält, wie nach Fig. 54 sofort einleuchtet, worin Mm der x-Achse parallel, also mC der gesuchten Tangente von M parallel ist.

Die beiden Differentiale (1) verschwinden für $\varphi = 0$ und $\varphi = 2\pi$; daher sind die Punkte, in denen die Zykloide die x-Achse trifft, nach Nr. 191 singulär und zwar augenscheinlich *Spitzen.*

Mittels der Gleichung (3) der vorigen Nummer kann man den Ausdruck für die Subnormale auf die Form

$$(2) \qquad PG = \sqrt{2ay - y^2}$$

bringen, und da $MG^2 = PG^2 + y^2$ ist, so wird:

$$(3) \qquad MG = -2a\sin\tfrac{1}{2}\varphi,$$

wo das Minuszeichen gesetzt werden mußte, weil die Normale nach Nr. 170 dasselbe Vorzeichen wie $-y$ hat.

Schreibt man in (2) für die Subnormale PG ihren Wert yy', so erhält man die *Differentialgleichung* der gemeinen Zykloide (vgl. Nr. 86):

$$(4) \qquad y' = \sqrt{\frac{2a - y}{y}}.$$

Diese Gleichung gilt nicht nur für die Zykloide, die wir hier betrachten, sondern für alle Zykloiden, die durch Abrollen eines Kreises vom Radius a längs der x-Achse und zwar auf der einen Seite dieser Achse hervorgehen, also für alle, die durch

$$x = a(\varphi - \sin\varphi) + \text{konst.}, \quad y = a(1 - \cos\varphi)$$

dargestellt werden, da hier y und y' von der willkürlichen Konstanten frei sind.

Es ist mitunter von Vorteil, den Anfangspunkt der Koordinaten in den *Scheitel* C der Zykloide (vgl. Satz 23 in Nr. 218 und Fig. 54, S. 382) zu verlegen und die positive Tangente von C als neue positive $\mathfrak{x}$-Achse und die Parallele zur positiven y-Achse durch C als neue positive $\mathfrak{y}$-Achse zu wählen. Es ist alsdann $x = \pi a + \mathfrak{x}$, $y = 2a + \mathfrak{y}$ zu setzen, so daß die Differentialgleichung (4) übergeht in:

$$\frac{d\mathfrak{y}}{d\mathfrak{x}} = \sqrt{\frac{\mathfrak{y}}{2a + \mathfrak{y}}}.$$

233. Fläche der gemeinen Zykloide. Bezeichnet man mit u die Fläche zwischen der Zykloide, der x-Achse und der Ordinate $PM = y$, vgl. Fig. 54, S. 382, so findet man nach Satz 11 in Nr. 192 für das Differential der Fläche:

$$du = y\,dx = a^2(1 - \cos\varphi)^2 d\varphi = a^2(1 - 2\cos\varphi + \cos^2\varphi)\,d\varphi.$$

Setzt man hierin für $\cos^2\varphi$ den Wert $\frac{1}{2}(1 + \cos 2\varphi)$ ein, so kommt:

$$du = a^2\left(\tfrac{3}{2} - 2\cos\varphi + \tfrac{1}{2}\cos 2\varphi\right)d\varphi.$$

Die rechte Seite ist das Differential der Funktion

$$a^2\left(\tfrac{3}{2}\varphi - 2\sin\varphi + \tfrac{1}{4}\sin 2\varphi\right),$$

die ebenso wie u für $\varphi = 0$ verschwindet. Folglich ist nach Satz 8 in Nr. 29:

$$u = a^2\left(\tfrac{3}{2}\varphi - 2\sin\varphi + \tfrac{1}{4}\sin 2\varphi\right).$$

Will man die ganze Fläche bestimmen, die von dem einen Bogen der Kurve und der Basis begrenzt ist, so hat man $\varphi = 2\pi$ zu setzen. Es ergibt sich dann $3\pi a^2$, d. h.: Die ganze Fläche eines Bogens der gemeinen Zykloide ist gleich dem Dreifachen der Fläche des erzeugenden Kreises.

234. Rektifikation der gemeinen Zykloide. Die Gleichungen (1) in Nr. 232 geben:

$$dx^2 + dy^2 = 2a^2(1 - \cos\varphi)\,d\varphi^2 = 4a^2\sin^2\tfrac{1}{2}\varphi\,d\varphi^2,$$

also nach (2) in Nr. 193 das Bogenelement:

$$ds = 2a\sin\tfrac{1}{2}\varphi\,d\varphi.$$

Die rechte Seite ist das Differential von $-4a\cos\frac{1}{2}\varphi$; daher hat die Bogenlänge s nach Satz 8 in Nr. 29 einen Wert von der Form:

$$s = -4a\cos\tfrac{1}{2}\varphi + \text{konst.}$$

Wird die Spitze A als Anfang des Bogens gewählt, so ist $s = 0$ für $\varphi = 0$, also $0 = -4a + \text{konst.}$, d. h. konst. $= 4a$ und daher:

$$s = 4a(1 - \cos\tfrac{1}{2}\varphi) = 8a\sin^2\tfrac{1}{4}\varphi.$$

Die ganze Länge eines der sich periodisch wiederholenden Bogen der Zykloide ergibt sich für $\varphi = 2\pi$ und ist mithin gleich $8a$, also gleich dem Vierfachen des Durchmessers des rollenden Kreises.

235. Krümmungsradius der gemeinen Zykloide. Der Tangentenwinkel τ der Zykloide ist gleich $\frac{1}{2}(\pi - \varphi)$, daher der Kontingenzwinkel $d\tau = -\frac{1}{2}d\varphi$, folglich der Krümmungsradius $R = -2ds : d\varphi$. Nach voriger Nummer wird aber $ds : d\varphi = 2a\sin\frac{1}{2}\varphi$. Somit kommt mit Rücksicht auf (3) in Nr. 232:

$$R = -4a\sin\tfrac{1}{2}\varphi = 2MG,$$

d. h. der Krümmungsmittelpunkt N geht hervor, wenn man die Normale MG, die ja negativ ist, über G hinaus bis N verdoppelt. Siehe Fig. 54, S. 382.

236. Evolute der gemeinen Zykloide. Wenn wir den Durchmesser HG des Kreises des Punktes M über G hinaus um die eigene Länge bis L verlängern, so sehen wir, daß der soeben gefundene Krümmungsmittelpunkt N auf dem Kreise liegt, der GL zum Durchmesser hat. Wir ziehen in L die Tangente LE dieses Kreises parallel zur x-Achse. Der Bogen LN des Kreises ist gleich GD oder LE, wenn E den Endpunkt der Strecke vorstellt, die durch Verdoppeln von CD über D hinaus entsteht.

Hieraus folgt, daß die Evolute der gemeinen Zykloide diejenige gemeine Zykloide ist, die der Punkt N des Kreises über GL beschreibt, wenn dieser Kreis auf der Geraden LE abrollt. Wenn für die ursprüngliche Zykloide der beschreibende Punkt auf der Rollbahn selbst liegt (z. B. in A), so liegt der zugehörige beschreibende Punkt der Evolute an einer höchsten

Stelle des unteren rollenden Kreises (nämlich auch in A). Beide Zykloiden sind kongruent, jedoch nicht in einander entsprechenden Teilen.

Daß die Evolute eine kongruente Zykloide sein muß, erkennt man auch, ohne zu wissen, daß N der Krümmungsmittelpunkt von M ist. Denn wenn der untere Kreis auf der Geraden LE rollt, beschreibt N eine Zykloide mit der Tangente MGN. Diese Tangente ist Normale der oberen Zykloide. Die untere muß also nach Satz 14 in Nr. 200 die Evolute der oberen Zykloide sein.

Endlich ergibt sich dasselbe auch leicht aus den Gleichungen für die Koordinaten x_1, y_1 des Krümmungsmittelpunktes. Die Differentiation der Gleichungen (1) in Nr. 232 liefert nämlich:

$$d^2x = a \sin\varphi \, d\varphi^2, \quad d^2y = a \cos\varphi \, d\varphi^2.$$

Aus (1) in Nr. 199 folgt also für die Evolute:

$$x_1 = a(\varphi + \sin\varphi), \quad y_1 = -a(1 - \cos\varphi).$$

Verschiebt man nun die Koordinatenachsen soweit parallel, bis der Punkt D, dessen Koordinaten πa und $-2a$ sind, der Anfangspunkt wird, so sind $\mathfrak{x}_1 = x_1 - \pi a$ und $\mathfrak{y}_1 = y_1 + 2a$ die neuen Koordinaten des Punktes (x_1, y_1). Wenn außerdem $\varphi_1 = \varphi - \pi$ gesetzt wird, so kommt:

$$\mathfrak{x}_1 = a(\varphi_1 - \sin\varphi_1), \quad \mathfrak{y}_1 = a(1 - \cos\varphi_1).$$

Die Evolute ist also nach (1) in Nr. 231 der ursprünglichen Zykloide kongruent.

Diese Eigenschaft der gemeinen Zykloide führt nun auch nach Satz 15 in Nr. 200 unmittelbar zu ihrer Rektifikation, die rechnerisch schon in Nr. 234 ausgeführt wurde. Denn der Bogen EN der Evolute ist gleich der Differenz

$$EC - NM = 4a - 4a \sin \tfrac{1}{2}\varphi$$

zwischen den Krümmungsradien der Punkte C und M. Andererseits sieht man, daß der Bogen $s = AM$ erhalten wird, wenn man in diesem Ausdrucke $\pi - \varphi$ statt φ setzt; also kommt:

$$s = 4a - 4a \cos \tfrac{1}{2}\varphi = 8a \sin^2 \tfrac{1}{4}\varphi.$$

§ 4. Epi- und Hypozykloide.

237. Definition der Epi- und Hypozykloide. Wenn ein Kreis ohne Gleiten auf einem festen Kreise abrollt, so heißt die Bahnkurve eines Punktes auf der Peripherie des rollenden Kreises eine Epizykloide oder Hypozykloide, und zwar heißt sie eine *Hypozykloide, wenn der rollende Kreis im Innern des festen liegt, sonst eine Epizykloide.* Wir behaupten, daß jede Epizykloide mittels zweier verschiedener Kreise erzeugt werden kann, die auf demselben festen Kreise rollen, ebenso jede Hypozykloide mittels zweier Kreise, die im Innern ein und desselben festen Kreises rollen.

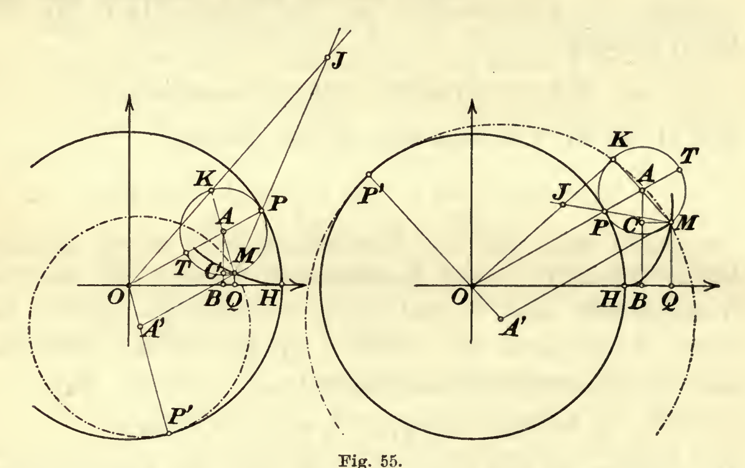


Fig. 55.

Zum Beweise nehmen wir an, daß die Hypo- oder Epizykloide erzeugt sei durch einen Punkt M eines solchen Kreises um A, der auf einem festen Kreise um O rollt, siehe Fig. 55 für beide Fälle. Es sei H einer derjenigen Punkte des festen Kreises, mit denen der erzeugende Punkt zusammenfallen kann, und P der Berührungspunkt der beiden Kreise. Wir ziehen AM, konstruieren über den Geraden AO, AM das Parallelogramm $OAMA'$ und beschreiben den Kreis um den Punkt A' als Mittelpunkt mit dem Radius $A'M$. Dieser Kreis wird den festen Kreis in einem Punkte P' berühren, der auf der Verlängerung der Linie OA' liegt. Denn wenn r den Radius des

festen Kreises, a und a' die Radien der Kreise um A und um A' bedeuten, so ist bei der Hypozykloide bzw. Epizykloide

$$r = a' + a \quad \text{bzw.} \quad r = a' - a,$$

wenn etwa $a' > a$ ist. Da nun die Winkel PAM, $MA'P'$, POP' absolut gemessen einander gleich sind, so wird

$$\frac{\operatorname{arc} PM}{a} = \frac{\operatorname{arc} P'M}{a'} = \frac{\operatorname{arc} PP'}{r},$$

also

$$\frac{\operatorname{arc} P'M \pm \operatorname{arc} PM}{a' \pm a} = \frac{\operatorname{arc} PP'}{r},$$

und weil $r = a' \pm a$ ist, so kommt:

$$\operatorname{arc} P'M \pm \operatorname{arc} PM = \operatorname{arc} PP'.$$

Das obere Zeichen gilt für die Hypozykloide, das untere für die Epizykloide. In beiden Fällen aber ist $\operatorname{arc} PM = \operatorname{arc} PH$ nach der Definition, folglich $\operatorname{arc} P'M = \operatorname{arc} P'H$, und demnach kann die Kurve auch erzeugt werden durch einen Punkt M des Kreises um A', der auf dem Kreise um O rollt.

Dabei ist noch folgendes zu bemerken: Wird eine Epizykloide erzeugt, indem ein Kreis vom Radius a auf dem festen Kreise rollt, so daß sich die beiden Kreise mit ihren konvexen Seiten berühren, so ist $a' = r + a$, und der zweite erzeugende Kreis berührt mit seiner konkaven Seite die konvexe des festen, enthält also den festen Kreis in sich.

Geht man dagegen von einem rollenden Kreise aus, der den festen umfaßt, so ist sein Radius $a > r$. Die erzeugte Epizykloide gestattet dann eine zweite Erzeugung durch Abrollen eines Kreises vom Radius $a' = a - r$, der den festen Kreis mit seiner konvexen Seite berührt.

Wird eine Hypozykloide erzeugt, indem ein Kreis vom Radius a auf dem festen Kreise rollt, so daß die konvexe Seite des beweglichen die konkave des festen berührt, so ist $a < r$ und $a' = r - a$; der zweite erzeugende Kreis liegt daher ebenfalls im Innern des festen.

238. Gleichungen der Epi- und Hypozykloide. Wir nehmen die Gerade OH als positive x-Achse an (siehe Fig. 55, S. 388) und wählen die y-Achse senkrecht dazu durch O und zwar positiv nach derjenigen Seite hin, auf der das Abrollen

des Kreises von H aus beginnt. Den *Wälzungswinkel* PAM bezeichnen wir mit φ, positiv gemessen von AP aus, so daß $a\varphi$ der jeweils schon abgerollte Bogen $PM = PH$ ist. Durchläuft φ alle Werte von 0 bis 2π, so wird ein Bogen der Zykloide vollendet, der sich periodisch beständig wiederholt. Wir können daher φ auf $0 \leqq \varphi \leqq 2\pi$ beschränken. Wegen $HP = a\varphi$ ist $\sphericalangle HOP = a\varphi : r$. Die Lote von A und M auf die x-Achse mögen die Fußpunkte B und Q haben. Schneidet die Parallele zur x-Achse durch M die Gerade AB in C, so ist für M:

$$x = OB + BQ = OB + CM, \quad y = QM = BA - CA.$$

Hieraus folgt:

$$x = (r \pm a) \cos \frac{a\varphi}{r} \mp a \cos \left(\frac{a\varphi}{r} \pm \varphi\right),$$

$$y = (r \pm a) \sin \frac{a\varphi}{r} \mp a \sin \left(\frac{a\varphi}{r} \pm \varphi\right).$$

Die oberen Zeichen gelten für die Epizykloide, die unteren für die Hypozykloide. Das Verhältnis $a : r$ werde gleich n gesetzt; dann hat man für die Epizykloide:

$$(1) \qquad \begin{cases} \dfrac{x}{a} = \dfrac{n+1}{n} \cos n\varphi - \cos(n+1)\varphi, \\ \dfrac{y}{a} = \dfrac{n+1}{n} \sin n\varphi - \sin(n+1)\varphi; \end{cases}$$

und diese Formeln gelten auch für die Hypozykloide, wenn man statt a, n, φ die Werte $-a, -n, -\varphi$ setzt.

Die Kurve ist algebraisch, wenn die positive oder negative Zahl n rational ist. Der Fall $n = -\frac{1}{2}$ liefert als Hypozykloide eine *gerade Linie.* Die zweite der Gleichungen (1) wird dann $y = 0$, und die Kurve reduziert sich auf einen Durchmesser des festen Kreises.

Für $n = -\frac{1}{4}$ geben die Gleichungen (1), wenn man a durch $-a$, φ durch $-\varphi$ ersetzt, die Hypozykloide:

$$\frac{x}{a} = 3 \cos \tfrac{1}{4}\varphi + \cos \tfrac{3}{4}\varphi = 4 \cos^3 \tfrac{1}{4}\varphi,$$

$$\frac{y}{a} = 3 \sin \tfrac{1}{4}\varphi - \sin \tfrac{3}{4}\varphi = 4 \sin^3 \tfrac{1}{4}\varphi,$$

also, wenn man φ eliminiert:

$$(2) \qquad x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = (4a)^{\frac{2}{3}}.$$

Diese Gleichung erinnert an die Gleichung (3) der Ellipsenevolute in Nr. 228, in der allerdings $a_1 \neq b_1$ war. Die Kurve (2) heißt ihrer sternförmigen Gestalt halber eine *Astroide.* Wir werden ihr später (in Nr. 249) noch einmal begegnen.

Im Falle $n = \frac{1}{2}$ ergibt sich eine Epizykloide, auf die wir ebenfalls gelegentlich (in Nr. 250) zurückkommen werden:

$$\frac{x}{a} = 3 \cos \tfrac{1}{2}\varphi - \cos \tfrac{3}{2}\varphi, \quad \frac{y}{a} = 3 \sin \tfrac{1}{2}\varphi - \sin \tfrac{3}{2}\varphi.$$

Im Falle $n = 1$ geht die Epizykloide hervor:

$$\frac{x}{a} = 2 \cos \varphi - \cos 2\varphi, \quad \frac{y}{a} = 2 \sin \varphi - \sin 2\varphi.$$

Hier ist:

$$\frac{x-a}{2a} = \cos \varphi (1 - \cos \varphi), \quad \frac{y}{2a} = \sin \varphi (1 - \cos \varphi).$$

Führt man Polarkoordinaten ϱ und ω ein, indem man setzt:

$$x - a = \varrho \cos \omega, \quad y = \varrho \sin \omega,$$

so folgt aus diesen Gleichungen:

$$\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} \omega \quad \text{oder} \quad \varphi = \omega$$

und:

$$\varrho = 2a(1 - \cos \omega) = 4a \sin^2 \tfrac{1}{2}\omega.$$

Diese Kurve heißt wegen ihrer herzförmigen Gestalt die *Kardioide.*

Jede nicht-algebraische Epizykloide oder Hypozykloide besteht aus unendlich vielen kongruenten Bogen, und die Punkte, in denen diese anf dem festen Kreise enden, sind Rückkehrpunkte.

239. Tangente und Normale der Epi- und Hypozykloide. Die Differentiation der Gleichungen (1) in voriger Nummer ergibt:

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{dx}{a} = (n+1)\,[\sin(n+1)\varphi - \sin n\varphi]\,d\varphi \\ \qquad = 2(n+1) \sin \tfrac{1}{2}\varphi \cos(n\varphi + \tfrac{1}{2}\varphi)\,d\varphi, \\ \dfrac{dy}{a} = (n+1)\,[\cos n\varphi - \cos(n+1)\varphi]\,d\varphi \\ \qquad = 2(n+1) \sin \tfrac{1}{2}\varphi \sin(n\varphi + \tfrac{1}{2}\varphi)\,d\varphi, \end{cases}$$

also:

$$(2)\quad \frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}(n + \tfrac{1}{2})\,\varphi.$$

Diese Gleichung zeigt, daß die Tangente im Punkte M der Kurve die Gerade MT ist, die den Punkt M mit dem Gegenpunkte T von P auf dem Kreise um A verbindet. Siehe Fig. 55, S. 388. Hieraus folgt, daß die Normale im Punkte M der Kurve die Gerade MP ist, die den Punkt M mit dem jeweiligen Berührungspunkte der beiden Kreise verbindet. Es ist dies eine entsprechende Eigenschaft wie die der gemeinen Zykloide (vgl. Nr. 232). In der Tat gehört ja auch die gemeine Zykloide sowohl zu den Epi- als auch zu den Hypozykloiden, nämlich zu $\lim r = \infty$ oder $\lim n = 0$.

240. Rektifikation der Epi- und Hypozykloide. Aus voriger Nummer folgt nach (2) in Nr. 193:

$$\frac{ds}{a} = 2(n+1)\sin\tfrac{1}{2}\varphi\, d\varphi,$$

wenn wir die Bogenlänge s positiv im Sinne des wachsenden Winkels φ rechnen. Dieser Ausdruck ist das Differential von $-4(n+1)\cos\frac{1}{2}\varphi$. Nach Satz 8 in Nr. 29 ist daher, wenn wir s von H an rechnen, also $s = 0$ für $\varphi = 0$ annehmen:

$$\frac{s}{a} = 4(n+1)(1-\cos\tfrac{1}{2}\varphi) = 8(n+1)\sin^2\tfrac{1}{4}\varphi.$$

Die Länge eines ganzen Bogens der Kurve ergibt sich für $\varphi = 2\pi$, nämlich gleich $8(n+1)a$.

241. Fläche der Epi- und Hypozykloide. Die Gleichungen (1) in Nr. 238 und 239 ergeben:

$$\frac{x\,dy - y\,dx}{a^2} = \frac{(n+1)(2n+1)}{n}(1-\cos\varphi)\,d\varphi$$

oder:

$$du = a^2\frac{(n+1)(2n+1)}{2n}(1-\cos\varphi)\,d\varphi,$$

wenn u die Fläche bezeichnet, die von der Kurve, dem Radiusvektor OM des Punktes M und der Abszissenachse eingeschlossen wird, nach (3) in Nr. 204. Es ist aber $d\varphi - \cos\varphi\, d\varphi$ das Differential von $\varphi - \sin\varphi$, und diese Funktion verschwindet ebenso wie u gleichzeitig mit φ. Demnach erhält man nach Satz 8 in Nr. 29:

$$u = a^2\frac{(n+1)(2n+1)}{2n}(\varphi - \sin\varphi).$$

Für die ganze Fläche U, die von einem Bogen der Kurve und seinen beiden äußersten Radienvektoren eingeschlossen ist, wird $\varphi = 2\pi$, also

$$U = a^2 \frac{(n+1)(2n+1)}{n} \pi.$$

Der Sektor des Kreises zwischen den nämlichen Radien ist gleich $\pi a^2 : n$, die zwischen dem festen Kreise und dem Kurvenbogen gelegene Fläche folglich gleich $U - \frac{\pi a^2}{n}$ oder $(2n+3)\pi a^2$.

Da wir für n auch negative Werte zulassen, so gelten die Formeln sowohl für die Epizykloide als auch für die Hypozykloide. Der Annahme $n = 0$ entspricht, wie schon in Nr. 239 bemerkt wurde, die *gemeine Zykloide*. In diesem Falle reduziert sich $(2n+3)\pi a^2$ auf $3\pi a^2$.

242. Krümmungsradius der Epi- und Hypozykloide. Die Gleichung (2) in Nr. 239 lehrt, daß der Kontingenzwinkel $d\tau$ gleich $(n + \frac{1}{2})\,d\varphi$ ist. Mithin hat der Krümmungsradius $R = ds : d\tau$ nach der ersten Formel in Nr. 240 den Wert:

$$R = \frac{4(n+1)}{2n+1} a \sin \tfrac{1}{2}\varphi, \tag{1}$$

und weil $2a \sin \frac{1}{2}\varphi$ nach Fig. 55, S. 388, die Länge von MP angibt, so folgt:

$$\frac{R}{MP} = \frac{2n+2}{2n+1} = \frac{2r \pm 2a}{r \pm 2a}. \tag{2}$$

Legt man durch den Punkt T die Sehne TK parallel zur Normale MP und schneidet man diese Normale mit OK in J, so ergibt sich:

$$\frac{PJ}{TK} = \frac{OP}{OT},$$

also, weil $TK = MP$ ist:

$$\frac{MJ}{MP} = \frac{OP + OT}{OT} = \frac{2r \pm 2a}{r \pm 2a}.$$

Die oberen Zeichen gelten hier wie in (2) für die Epizykloide, die unteren für die Hypozykloide. Aus dieser Gleichung und der Gleichung (2) folgt, daß J der zum Punkte M gehörige Krümmungsmittelpunkt ist. Der Krümmungsmittelpunkt J eines Punktes M der Epi- oder Hypozykloide ist

demnach der Schnittpunkt der Normalen MP des Zykloidenpunktes M mit derjenigen Geraden durch den Mittelpunkt O des festen Kreises, die durch den Gegenpunkt K des Punktes M auf dem rollenden Kreise geht.

243. Evolute der Epi- und Hypozykloide. Aus der Gleichung (2) in Nr. 239 folgt durch Differentiation:

$$\frac{y''}{1+y'^2} = \frac{2n+1}{2}\frac{d\varphi}{dx};$$

folglich sind die Koordinaten x_1, y_1 des Krümmungsmittelpunktes J nach (6) in Nr. 197:

$$x_1 = x - \frac{2}{2n+1}\frac{dy}{d\varphi}, \quad y_1 = y + \frac{2}{2n+1}\frac{dx}{d\varphi},$$

so daß nach den Gleichungen (1) in Nr. 238 und 239 folgt:

$$\frac{x_1}{a} = \frac{1}{2n+1}\left[\frac{n+1}{n}\cos n\varphi + \cos(n+1)\varphi\right],$$

$$\frac{y_1}{a} = \frac{1}{2n+1}\left[\frac{n+1}{n}\sin n\varphi + \sin(n+1)\varphi\right].$$

Drehen wir die Koordinatenachsen um den Winkel $n\pi$ und zwar in der Richtung von der positiven x-Achse zur positiven y-Achse und bezeichnen wir mit x_1' und y_1' die Koordinaten des Krümmungsmittelpunktes in bezug auf diese neuen Achsen, so wird:

$$x_1' = x_1 \cos n\pi + y_1 \sin n\pi, \quad y_1' = -x_1 \sin n\pi + y_1 \cos n\pi.$$

Setzen wir außerdem:

$$a_1 = \frac{a}{2n+1}, \quad \varphi_1 = \varphi - \pi,$$

so folgt:

$$\frac{x_1'}{a_1} = \frac{n+1}{n}\cos n\varphi_1 - \cos(n+1)\varphi_1,$$

$$\frac{y_1'}{a_1} = \frac{n+1}{n}\sin n\varphi_1 - \sin(n+1)\varphi_1.$$

Diese Formeln unterscheiden sich von den Gleichungen (1) in Nr. 238 nur durch das Ersetzen von a, φ durch a_1, φ_1. Dies bedeutet: *Die Evolute der Epizykloide bzw. Hypozykloide ist wiederum eine Epizykloide bzw. Hypozykloide, die der ursprünglichen ähnlich ist.* Sie wird erzeugt, indem der Kreis vom Radius $a:(2n+1)$ auf dem Kreise vom Radius $r:(2n+1)$

rollt; dieser feste Kreis ist mit dem ursprünglichen festen Kreise konzentrisch. Die Spitzen der Evolute liegen auf denjenigen Radienvektoren von O aus, die durch die Drehung um den Winkel $n\pi$ aus den Radienvektoren der Spitzen der ursprünglichen Kurve hervorgehen.

244. Kreisevolvente. Ersetzt man in den Gleichungen (1) der Nummer 238, die eine Epizykloide definieren, a durch seinen Wert nr und führt man an Stelle von φ den Winkel $\psi = n\varphi$ ein, den die Verbindungslinie der Mittelpunkte O und A der Kreise mit der x-Achse bildet, so lassen sich die Gleichungen der Epizykloide auf die Form bringen:

$$\frac{x}{r} = \cos\psi\left(1 + 2n\sin^2\frac{\psi}{2n}\right) + \psi\sin\psi\frac{\sin\frac{\psi}{n}}{\frac{\psi}{n}},$$

$$\frac{y}{r} = \sin\psi\left(1 + 2n\sin^2\frac{\psi}{2n}\right) - \psi\cos\psi\frac{\sin\frac{\psi}{n}}{\frac{\psi}{n}}.$$

Läßt man jetzt den Radius a des rollenden Kreises über jede Grenze wachsen, so gilt dasselbe von n, während das Verhältnis

$$\sin\frac{\psi}{n} : \frac{\psi}{n}$$

nach Nr. 26 den Grenzwert Eins annimmt, dagegen

$$2n\sin^2\frac{\psi}{2n} \quad \text{oder} \quad \frac{\psi^2}{2n}\left(\sin\frac{\psi}{2n} : \frac{\psi}{2n}\right)^2$$

den Grenzwert Null. Wenn also eine *Gerade* auf dem festen Kreise rollt, so lauten die Gleichungen der Epizykloide:

$$\frac{x}{r} = \cos\psi + \psi\sin\psi, \quad \frac{y}{r} = \sin\psi - \psi\cos\psi.$$

In jeder Lage ist die Gerade selbst die Normale der Kurve; da sie stets den festen Kreis berührt, so ist die Kurve nach Satz 14 in Nr. 200 eine *Evolvente des festen Kreises.*

Sie besteht aus zwei ins Unendliche gehenden Zweigen, deren Vereinigungspunkt eine Spitze ist, nämlich derjenige Punkt der Kurve, der auf dem festen Kreise liegt.

Die Eigenschaft der Epizykloide, ihrer Evolute ähnlich

zu sein, gilt im eigentlichen Sinne nicht mehr für diesen Grenzfall; indessen kann man doch auch den Kreis selbst als Epizykloide betrachten, da er auch dem Falle $\lim n = \infty$ zugehört. Denn wenn man einen Kreis vom Radius a auf einem beliebig kleinen Kreise rollen läßt, so beschreibt der Punkt, der am Anfange auf der Verbindungslinie der Mittelpunkte im Abstande $2a$ vom festen Zentrum liegt, eine Kurve, die um so weniger von einem Kreise mit dem Radius $2a$ verschieden ist, je kleiner der Radius des festen Kreises angenommen wird.

§ 5. Einige andere bemerkenswerte Kurven.

245. Die Spirale des Archimedes. Diese Spirale wird in Polarkoordinaten ω, ϱ definiert durch die Gleichung:

$$\varrho = a\omega,$$

wobei a eine gegebene Strecke bezeichnet. Beschreibt man um den Anfangspunkt einen Kreis mit dem Radius a, so sind die Bogen dieses Kreises, vom Schnittpunkte des Kreises mit dem Anfangsstrahle der Polarkoordinaten gerechnet, die Längen der Radienvektoren, die durch die Endpunkte dieser Bogen zu legen sind.

Für den Winkel μ zwischen der Tangente und dem Radiusvektor, für die Polarnormale MN, die Polarsubtangente OT und die Polarsubnormale ON kommt hier nach Nr. 206 und 207:

$$\operatorname{tg}\mu = \frac{\varrho\, d\omega}{d\varrho} = \frac{\varrho}{a} = \omega, \qquad MN = a\sqrt{1+\omega^2},$$

$$OT = \frac{-\varrho^2 d\omega}{d\varrho} = \frac{-\varrho^2}{a} = -a\omega^2, \quad ON = \frac{d\varrho}{d\omega} = a.$$

Mithin ist die Subnormale konstant, woraus eine einfache Konstruktion der Tangente hervorgeht, siehe Fig. 56. Für den Krümmungsradius ergibt sich nach Nr. 208, wenn wir die Konstante a positiv wählen:

$$R = \frac{a\sqrt{1+\omega^2}^3}{2+\omega^2} = \frac{MN^3}{MN^2 + a^2}.$$

Ist a' die Projektion der Polarsubnormale ON auf die Normale, so ist $a' = a^2 : MN$, also $R = MN^2 : (MN + a')$, woraus sich R leicht konstruieren läßt. Die archimedische Spirale geht durch O hindurch und schneidet sich selbst unendlich oft, da auch negative Werte von ω und ϱ zuzulassen sind. In der Figur sind nur die ersten Windungen um O herum angegeben.

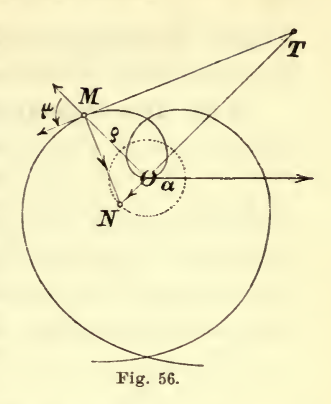


Fig. 56.

246. Die hyperbolische Spirale. Die hyperbolische Spirale wird in Polarkoordinaten definiert durch die Gleichung:

$$\varrho\,\omega = a,$$

wobei a eine gegebene Strecke bedeutet. Für $\omega = 0$ wird ϱ unendlich. Der Radius nimmt ab, wenn ω wächst, und wird gleich Null für $\lim \omega = \infty$. Die Kurve macht also um den Anfangspunkt O unendlich viele Windungen, ohne ihn jemals zu erreichen; der Punkt O heißt daher *asymptotisch.* Siehe Fig. 57. Ist ω negativ, also auch ϱ negativ, so sind die Bemerkungen in Nr. 203 zu beachten, aus denen folgt, daß die Kurve einen zweiten Zweig hat, der aus dem ersten durch Spiegelung an der Senkrechten zum Anfangsstrahle durch O hervorgeht. Die Ordinate $\varrho \sin \omega$ des Punktes M der Kurve hat den Wert:

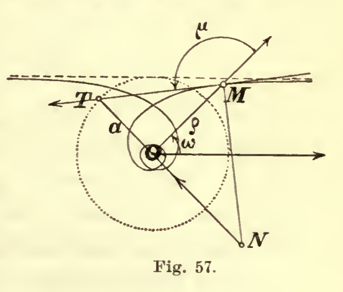


Fig. 57.

$$\varrho \sin \omega = a \frac{\sin \omega}{\omega}$$

und wird gleich a für $\omega = 0$. Deshalb hat die Kurve diejenige Gerade zur Asymptote hat, die im Abstande a von der x-Achse parallel zu dieser Achse verläuft (vgl. Nr. 171). Die Größen $\operatorname{tg} \mu$, OT und ON haben nach Nr. 206 und 207 die Werte:

$$\operatorname{tg} \mu = -\omega, \quad OT = a, \quad ON = -\frac{a}{\omega^2}\cdot$$

Die Polarsubtangente ist also konstant, und hieraus folgt eine

einfache Tangentenkonstruktion. Auch die Konstruktion des Krümmungsmittelpunktes ist leicht.

247. Die logarithmische Spirale. Die logarithmische Spirale wird in Polarkoordinaten ω, ϱ durch die Gleichung

$$\varrho = a e^{m\omega} \tag{1}$$

definiert, wobei a eine gegebene Strecke, m eine gegebene Zahl bezeichnet. Diese Gleichung gibt immer die nämliche Kurve, wie groß auch die gegebene Strecke a sein mag. Denn wenn man den Anfangsstrahl um einen Winkel α in eine neue Lage dreht, so sind $\bar{\omega} = \omega - \alpha$, $\bar{\varrho} = \varrho$ die neuen Polarkoordinaten, und in ihnen lautet die Kurvengleichung wieder:

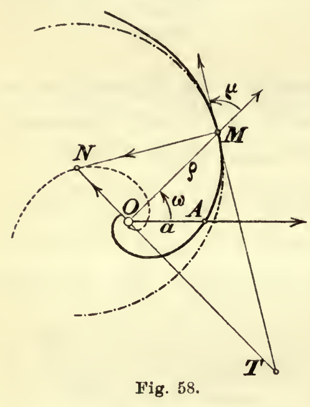


Fig. 58.

$$\bar{\varrho} = \bar{a} e^{m\bar{\omega}},$$

wenn man $a e^{m\alpha}$ mit $\bar{a}$ bezeichnet. Der absolute Betrag von a in (1) ist also unwesentlich. Demnach kann man $a = \pm 1$ annehmen; wir wollen indessen die Gleichung (1) beibehalten und $a > 0$ wählen.

Für $\omega = 0$ ist $\varrho = a = OA$, siehe Fig. 58. Wächst ω von Null bis $+\infty$, so wächst ϱ von a bis $+\infty$. Nimmt ω von Null bis $-\infty$ ab, so bleibt ϱ positiv und nimmt von a bis Null ab. Demnach hat die Kurve unendlich viele Windungen um den Pol, der daher ein *asymptotischer Punkt* heißt (vgl. Nr. 246).

Die Differentiation der Gleichung (1) ergibt:

$$\varrho' = m a e^{m\omega} = m\varrho \tag{2}$$

Folglich ist nach Nr. 206, 207:

$$\operatorname{tg}\mu = \frac{1}{m}, \quad OT = \frac{-\varrho}{m}, \quad ON = m\varrho. \tag{3}$$

Die erste Gleichung besagt:

Bei der logarithmischen Spirale ist der Winkel zwischen dem Radiusvektor und der Tangente konstant.

Das Differential der Fläche eines Sektors der Kurve ist nach (2) in Nr. 204:

$$du = \tfrac{1}{2}\varrho^2 d\omega = \frac{1}{2m}\varrho\, d\varrho.$$

Nun ist $\varrho d\varrho$ das Differential von $\frac{1}{2}\varrho^2$, folglich nach Satz 8 in Nr. 29:

$$u = \frac{\varrho^2}{4m} + \text{konst.}$$

Rechnen wir die Fläche vom Radiusvektor OA an, so wird $u = 0$ für $\omega = 0$ oder also für $\varrho = a$, und daher ist die Konstante gleich $-a^2 : 4m$, so daß kommt:

$$u = \frac{\varrho^2 - a^2}{4m}.$$

Das Bogendifferential ds der Kurve ist nach Nr. 205:

$$(4) \quad ds = \sqrt{m^2+1}\,\varrho\, d\omega = a\sqrt{m^2+1}\,e^{m\omega} d\omega = \frac{\sqrt{m^2+1}}{m}\,d\varrho,$$

mithin die Bogenlänge nach Satz 8 in Nr. 29:

$$s = \frac{\sqrt{m^2+1}}{m}\,\varrho + \text{konst.}$$

Messen wir den Bogen s vom Punkte A an, für den $\varrho = a$ ist, so kommt insbesondere:

$$s = \frac{\sqrt{m^2+1}}{m}(\varrho - a).$$

Der Kontingenzwinkel $d\tau$ wird hier gleich $d\omega$. Der Krümmungsradius R oder $ds : d\omega$ ist folglich nach (4):

$$(5) \qquad R = \sqrt{m^2+1}\,\varrho.$$

In allem Vorhergehenden muß man die Quadratwurzel von $m^2 + 1$ positiv annehmen, wenn die Kurve im Sinne wachsender Werte von ω durchlaufen wird.

Nach Nr. 207 hat die Polarnormale MN ebenfalls den Wert $ds : d\omega$. Mithin ist N der Krümmungsmittelpunkt. Hiernach kann man leicht die Gleichung der Evolute der logarithmischen Spirale bilden. Denn die Polarkoordinaten ω_1, ϱ_1 von N sind:

$$\omega_1 = \omega + \tfrac{1}{2}\pi, \quad \varrho_1 = ON = \varrho' = mae^{m\omega},$$

so daß sich durch Elimination von ω als Gleichung der Evolute ergibt:

$$(6) \qquad \varrho_1 = mae^{m\left(\omega_1 - \frac{\pi}{2}\right)}.$$

Die Evolute der logarithmischen Spirale ist also eine kongruente logarithmische Spirale mit dem nämlichen Pole. Aber einander entsprechende Stücke der Evolute und Evolvente sind nicht kongruent.

248. Logarithmische Spiralen, die ihre eigenen Evoluten sind. Nach der Bemerkung zu Anfang von Nr. 247 läßt sich die Gleichung der Evolute dadurch auf die Form der Gleichung der ursprünglichen Kurve bringen, daß man den Anfangsstrahl um den Pol um einen gewissen Winkel α dreht. Da es frei steht, ein ganzes positives oder negatives Vielfaches von 2π zu α zu addieren, so kann man $\alpha + 2k\pi$ statt α schreiben, wobei k eine ganze Zahl, α einen Winkel zwischen 0 und 2π bedeutet. Wir ersetzen also in der Gleichung der Evolute ω_1 durch $\omega + \alpha + 2k\pi$ und schreiben ϱ an Stelle von ϱ_1. Dann wird die Gleichung der Evolute:

$$\varrho = mae^{m\left(\alpha + 2k\pi - \frac{\pi}{2}\right) + m\omega}.$$

Diese Formel ist nun die Gleichung der ursprünglichen Kurve selbst, nämlich:

$$\varrho = ae^{m\omega},$$

sobald α der Bedingung genügt:

$$me^{m\left(\alpha + 2k\pi - \frac{\pi}{2}\right)} = 1 \quad \text{oder} \quad \alpha = \tfrac{1}{2}(1 - 4k)\pi - \frac{\ln m}{m}.$$

Ist die Zahl m insbesondere so beschaffen, daß

$$\frac{\ln m}{m} = \tfrac{1}{2}(1 - 4k)\pi \tag{1}$$

wird, wenn k irgend eine ganze Zahl bezeichnet, so wird $\alpha = 0$, d. h. dann ist die logarithmische Spirale ihre eigene Evolute. Die Funktion $\ln m : m$ von m, deren Ableitung nach m gleich $(1 - \ln m) : m^2$ ist, wächst von $-\infty$ bis $1 : e$, wenn m von 0 bis e wächst, und nimmt von $1 : e$ bis 0 ab, wenn m von e bis $+\infty$ wächst. Hieraus folgt, daß, wenn für k irgend eine ganze positive Zahl gewählt wird, auch jedesmal ein Wert m vorhanden ist, der die Gleichung (1) befriedigt. *Es gibt also unzählig viele logarithmische Spiralen, die mit ihren Evoluten zusammenfallen.*

249. Ein Beispiel zur Theorie der Einhüllenden. Wir wollen zum Schlusse dieses Kapitels zwei Beispiele für die in Nr. 210 entwickelte Methode zur Bestimmung der Einhüllenden einer Kurvenschar geben. Wir stellen uns zunächst die Aufgabe:

Zwei Veränderliche x_1 und y_1 seien miteinander durch die Bedingung verbunden:

$$\left(\frac{x_1}{a}\right)^m + \left(\frac{y_1}{b}\right)^m = 1, \tag{1}$$

in der m, a und b Konstanten sind. Es soll die Einhüllende der Kurvenschar bestimmt werden, die alsdann durch die Gleichung

$$\left(\frac{x}{x_1}\right)^n + \left(\frac{y}{y_1}\right)^n = 1 \tag{2}$$

definiert wird, wenn x und y die laufenden Koordinaten dieser Kurvenschar bedeuten. Dabei soll n eine Konstante sein.

Da x_1 und y_1 wegen (1) als Funktionen *einer* Hilfsveränderlichen α betrachtet werden können, so hat man die Gleichung (2) in Bezug auf diese Veränderliche α zu differenzieren. Es ist dabei gleichgültig, wie man sich z. B. x_1 als Funktion von α gewählt denkt. Die Differentiation liefert:

$$\left(\frac{x}{x_1}\right)^n \frac{x_1'}{x_1} + \left(\frac{y}{y_1}\right)^n \frac{y_1'}{y_1} = 0.$$

Die Akzente sollen dabei die Differentiation nach α andeuten. Da x_1 und y_1 durch die Gleichung (1) verbunden sind, so besteht zwischen x_1' und y_1' außerdem die Bedingung:

$$\left(\frac{x_1}{a}\right)^m \frac{x_1'}{x_1} + \left(\frac{y_1}{b}\right)^m \frac{y_1'}{y_1} = 0.$$

Elimination von $y_1' : x_1'$ aus den beiden letzten Gleichungen ergibt:

$$\frac{\left(\frac{x}{x_1}\right)^n}{\left(\frac{x_1}{a}\right)^m} = \frac{\left(\frac{y}{y_1}\right)^n}{\left(\frac{y_1}{b}\right)^m}. \tag{3}$$

Diese Gleichung (3) geht also durch die Differentiation der Gleichung (2) nach der Hilfsveränderlichen α hervor. Nach (1) und (2) ist die Summe der Nenner und ebenso die der Zähler in (3) gleich Eins. Folglich sind beide Seiten von (3)

gleich Eins. Die beiden Gleichungen (2) und (3) lassen sich also ersetzen durch diese:

$$\left(\frac{x}{x_1}\right)^n = \left(\frac{x_1}{a}\right)^m, \quad \left(\frac{y}{y_1}\right)^n = \left(\frac{y_1}{b}\right)^m$$

oder:

$$(4) \qquad \left(\frac{x_1}{a}\right)^{m+n} = \left(\frac{x}{a}\right)^n, \quad \left(\frac{y_1}{b}\right)^{m+n} = \left(\frac{y}{b}\right)^n.$$

Hieraus ist die Hilfsveränderliche α nach Nr. 210 zu eliminieren. Nun sind x_1 und y_1 solche Funktionen von α, die (1) genügen. Wir müssen also x_1 und y_1 aus (1) und (4) eliminieren. So ergibt sich als Gleichung der gesuchten Einhüllenden:

$$(5) \qquad \left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{mn}{m+n}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{mn}{m+n}} = 1.$$

Der Fall $a = b$, $m = 2$, $n = 1$ verdient besondere Erwähnung. Hier nämlich besteht die Kurvenschar aus lauter solchen *Geraden* in den laufenden Koordinaten x, y:

$$\frac{x}{x_1} + \frac{y}{y_1} = 1,$$

die auf den Achsen Abschnitte x_1 und y_1 bestimmen, für die

$$x_1^2 + y_1^2 = a^2$$

ist, d. h. aus allen Geraden, von denen die beiden Achsen Strecken von der konstanten Länge a abschneiden. Ihre Einhüllende hat nach (5) die Gleichung:

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}},$$

und sie ist folglich nach Nr. 238 eine *Hypozykloide* von besonderer Art, nämlich eine *Astroide*; der feste Kreis hat den Radius a, der rollende den Radius $\frac{1}{4}a$.

250. Noch ein Beispiel zur Theorie der Einhüllenden. Wir entnehmen dies Beispiel der Optik, indem wir uns die Aufgabe stellen: *Auf die Peripherie eines Kreises treffen parallele Strahlen auf, die von dort reflektiert werden, wobei der reflektierte Strahl mit der Normale jedesmal denselben Winkel bildet wie der auffallende. Es soll die Einhüllende der reflektierten Strahlen bestimmt werden.*

Die gesuchte Einhüllende wird die *Katakaustika* genannt. Als Koordinatenachsen wählen wir zwei rechtwinklige Durch-

messer, von denen der eine, die x-Achse, den auffallenden Strahlen parallel sei. Sind $a \cos \alpha$ und $a \sin \alpha$ die Koordinaten eines Punktes der Peripherie, den ein Strahl trifft, so bildet der reflektierte Strahl mit der x-Achse den Winkel 2α. Die Gleichung dieses Strahles ist:

$$y - a \sin \alpha = \operatorname{tg} 2\alpha (x - a \cos \alpha)$$

oder:

$$y \cos 2\alpha - x \sin 2\alpha + a \sin \alpha = 0.$$

Nach Nr. 210 muß α mithin aus dieser Gleichung und der durch Differentiation nach α aus ihr hervorgehenden Gleichung:

$$y \sin 2\alpha + x \cos 2\alpha - \tfrac{1}{2} a \cos \alpha = 0$$

eliminiert werden. Man kann auch beide Gleichungen nach x und y auflösen. Dann kommt:

$$x = \tfrac{1}{4} a (3 \cos \alpha - \cos 3\alpha), \quad y = \tfrac{1}{4} a (3 \sin \alpha - \sin 3\alpha).$$

Nach Nr. 238 ist diese Katakaustika eine *Epizykloide*, die von einem Kreise vom Radius $\frac{1}{4}a$ erzeugt wird, der auf einem Kreise vom Radius $\frac{1}{2}a$ rollt. Der feste Kreis hat denselben Mittelpunkt wie der gegebene Kreis vom Radius a.

Neuntes Kapitel.

Theorie der Raumkurven und Flächen.

---

§ 1. Tangenten und Normalen.

251. Analytische Darstellung von Raumkurven und Flächen. Ein Punkt mit den rechtwinkligen Koordinaten x, y, z ist an eine *Raumkurve* gebunden, d. h. sein geometrischer Ort ist eine Kurve im Raume, wenn seine Koordinaten x, y, z als Funktionen *einer* Hilfsveränderlichen t gegeben sind:

$$x = \varphi(t), \quad y = \chi(t), \quad z = \psi(t). \tag{1}$$

Setzt man die aus der ersten Gleichung folgende Funktion t von x in die beiden andern ein, so stellen sich y und z als Funktionen von x dar:

$$y = f(x), \quad z = g(x). \tag{2}$$

Umgekehrt: Liegen zwei solche Gleichungen vor und wird x mit t bezeichnet, so sind sie ersetzbar durch $x = t$, $y = f(t)$ und $z = g(t)$, d. h. es liegt ein Fall vor, der sich der Darstellung (1) einer Kurve unterordnet, indem sich $\varphi(t)$ auf t reduziert. Es kann sein, daß nicht gerade die erste Gleichung (1), sondern die zweite oder dritte t als Funktion einer der drei Koordinaten definiert. Allgemein lasse sich t auf irgend eine Weise aus den drei Gleichungen (1) eliminieren. Alsdann gehen zwei Gleichungen

$$F(x, y, z) = 0, \quad G(x, y, z) = 0 \tag{3}$$

hervor, so daß wir uns also eine Kurve auch durch zwei solche Gleichungen definiert denken können.

Wir betrachten jetzt eine *Fläche.* Fällen wir von einem beliebigen Punkte (x, y, z) der Fläche das Lot auf die xy-Ebene, so ergibt sich ein Fußpunkt (x, y) in dieser Ebene. Umgekehrt wird zu jedem Punkte (x, y) der Ebene — wenigstens innerhalb eines gewissen Variabilitätsbereiches von x und y — ein Punkt (x, y, z) der Fläche gehören, dessen Höhe z über jenem Fußpunkte eine Funktion von x und y sein wird. Daher stellt eine Gleichung von der Form

$$z = f(x, y) \tag{4}$$

eine Fläche dar. Diese Gleichung ist nach z aufgelöst. Bleibt es noch dahingestellt, ob sie nach einer der drei Koordinaten auflösbar ist, so wird die Fläche durch eine unaufgelöste Gleichung

$$F(x, y, z) = 0 \tag{5}$$

gegeben. Wir schließen hieraus: In der Form (3) wird eine Raumkurve als *Schnittlinie von zwei Flächen* $F = 0$ und $G = 0$ definiert.

Es gibt eine noch allgemeinere Art, eine Fläche analytisch zu definieren. Während in (1) die Koordinaten eines Punktes (x, y, z) einer Kurve als Funktionen *einer* Hilfsveränderlichen t gegeben sind, können wir auch x, y, z als Funktionen von *zwei* Hilfsveränderlichen u und v definieren:

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \chi(u, v), \quad z = \psi(u, v). \tag{6}$$

Alle Punkte (x, y, z), deren Koordinaten hierdurch bestimmt werden, gehören im allgemeinen einer Fläche an, nämlich wenn die Funktionen φ, χ, ψ nicht alle drei voneinander abhängig sind. In der Tat, sind z. B. φ und χ voneinander unabhängig, so setzen wir die durch die beiden ersten Gleichungen definierten Funktionen u und v von x und y in die letzte Gleichung ein, wodurch eine Darstellung von der Form (4) hervorgeht.

Ein einfaches Beispiel hierzu gibt uns die Darstellung einer Kugel mit dem Radius r, deren Mittelpunkt der Anfangspunkt ist, wenn wir uns der räumlichen Polarkoordinaten r, θ, ψ bedienen; vgl. Nr. 97. Denn vermöge:

$$x = r \sin\theta \cos\psi, \quad y = r \sin\theta \sin\psi, \quad z = r \cos\theta$$

werden die Koordinaten x, y, z der Punkte der Kugel mittels

der beiden Hilfsveränderlichen θ und ψ ausgedrückt, die eine bekannte geometrische Bedeutung haben.

Die allgemeine Darstellungsform (6) einer Fläche werden wir jedoch nur ganz gelegentlich anwenden.

252. Tangente und Normalebene einer Kurve. Eine Raumkurve sei durch die Gleichungen:

$$(1) \qquad x = \varphi(t), \quad y = \chi(t), \quad z = \psi(t)$$

definiert. Wir setzen voraus, *daß die Funktionen* φ, χ, ψ *für einen gewissen Variabilitätsbereich von* t *nebst allen ihren Ableitungen, soweit sie gebraucht werden, stetig seien.* Zu einem bestimmten Werte t gehöre der Kurvenpunkt M oder (x, y, z), zu einem anderen Werte $t + \varDelta t$ der Kurvenpunkt M' oder $(x + \varDelta x, y + \varDelta y, z + \varDelta z)$, so daß $x + \varDelta x$ gleich $\varphi(t + \varDelta t)$ usw. ist. Die *Sekante* MM' der Kurve hat in den laufenden Koordinaten $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ die Gleichungen:

$$\frac{\mathfrak{x} - x}{\varDelta x : \varDelta t} = \frac{\mathfrak{y} - y}{\varDelta y : \varDelta t} = \frac{\mathfrak{z} - z}{\varDelta z : \varDelta t}.$$

Die Grenzlage der Sekante für $\lim \varDelta t = 0$ heißt die *Tangente* der Kurve an der Stelle M. Da $\varDelta x : \varDelta t$ den Grenzwert $\varphi'(t)$ oder x' hat, usw., so sind:

$$(2) \qquad \frac{\mathfrak{x} - x}{x'} = \frac{\mathfrak{y} - y}{y'} = \frac{\mathfrak{z} - z}{z'}.$$

die *Gleichungen der Tangente.* Hier wie im folgenden sollen die Akzente die Differentiation nach der unabhängigen Veränderlichen t andeuten.

Die Gleichungen (2) werden unbestimmt, wenn für den betrachteten Wert t alle drei Ableitungen x', y', z' oder φ', χ', ψ' gleich Null sind. *Daher schließen wir solche Punkte der Kurve, für die* $\varphi'(t)$, $\chi'(t)$, $\psi'(t)$ *alle drei gleich Null sind, als singulär ein für allemal von unseren Untersuchungen aus,* vgl. das Entsprechende bei ebenen Kurven in Nr. 191. Wir haben nicht die Absicht, die Singularitäten von Raumkurven zu besprechen.

Die Kurve (1) denken wir uns stets in demjenigen Sinne durchlaufen, der *wachsenden* Werten der unabhängigen Veränderlichen t entspricht. Dann folgt der Punkt M' auf den Punkt M, wenn der Zuwachs $\varDelta t$ positiv ist. Der Sekante

MM' geben wir also bei der Annahme $\Delta t > 0$ als positiven Sinn den von M nach M', demnach auch ihrer Grenzlage, der Tangente. Ziehen wir vom Anfangspunkte O aus einen Strahl $O\mathsf{M}$ parallel der *positiven* Tangente von M, so bildet er mit den positiven Achsen drei Winkel, deren Kosinus die *Richtungskosinus* der Tangente des Punktes M heißen. Geben wir insbesondere dem Strahle $O\mathsf{M}$ die Länge Eins, so sind die rechtwinkligen Koordinaten des Punktes M die Richtungskosinus, woraus folgt, *daß die Summe der Quadrate der Richtungskosinus einer Geraden stets gleich Eins ist.* Da im Raume nicht, wie in der Ebene, von einem bestimmten Drehsinne gesprochen werden kann, so bildet $O\mathsf{M}$ z. B. mit der positiven x-Achse unzählig viele Winkel, die alle in der Form $\pm\,\omega + 2k\pi$ dargestellt werden können, wenn ω einer von ihnen und k eine beliebige ganze Zahl ist. Die goniometrischen Funktionen dieser Winkel ändern sich sämtlich, wenn ω das Vorzeichen wechselt, mit Ausnahme des Kosinus. Während also im Raume die Winkel zwischen einer mit positivem Sinne versehenen Geraden und den drei positiven Achsen nicht eindeutig sind, auch wenn man von dem selbstverständlichen Summanden $2k\pi$ absieht, haben sie dennoch ganz bestimmte Kosinus. Umgekehrt gehört zu drei bestimmt gewählten Richtungskosinus, wenn nur die Summe ihrer Quadrate gleich Eins ist, stets eine auch dem Sinne nach bestimmte Richtung im Raume. Dies ist der Grund, weshalb man in der Geometrie des Raumes nicht die Winkel selbst, sondern nur ihre Kosinus benutzt. *Wir werden daher nicht die Winkel der positiven Tangente mit den positiven Achsen, sondern die Kosinus dieser Winkel mit Buchstaben α, β, γ bezeichnen.*

Nach (2) sind α, β, γ proportional zu x', y', z'; außerdem haben sie dieselben Vorzeichen wie x', y', z'. Da $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$ gleich Eins ist, ergibt sich also, *daß die positive Tangente des Kurvenpunktes M die Richtungskosinus hat:*

$$(3)\quad \alpha = \frac{x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}},\quad \beta = \frac{y'}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}},\quad \gamma = \frac{z'}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}},$$

wobei die Quadratwurzel positiv ist.

Es ist aus der analytischen Geometrie bekannt und übrigens leicht einzusehen, daß der Kosinus des Winkels, den zwei

solche Richtungen einschließen, deren Richtungskosinus gleich $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ und $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ sind, den Wert

$$\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2$$

hat, woraus folgt, daß beide Richtungen dann und nur dann zueinander senkrecht sind, wenn diese Summe gleich Null ist.

Normalebene des Kurvenpunktes M oder (x, y, z) heißt die Ebene aller *Normalen* des Punktes M, d. h. aller derjenigen Geraden, die in M auf der Tangente senkrecht stehen. Ist $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z})$ ein beliebiger Punkt $\mathfrak{M}$ der Normalebene, so sind $\mathfrak{x} - x$, $\mathfrak{y} - y$, $\mathfrak{z} - z$ proportional den Richtungskosinus der Normale $M\mathfrak{M}$. Da andererseits x', y', z' den Richtungskosinus der Tangente proportional sind, so drückt die Gleichung

$$(4) \qquad x'(\mathfrak{x} - x) + y'(\mathfrak{y} - y) + z'(\mathfrak{z} - z) = 0$$

aus, daß der Punkt $\mathfrak{M}$ oder $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z})$ in der Normalebene von M liegt. Dies ist also die *Gleichung der Normalebene des Kurvenpunktes M* in den laufenden Koordinaten $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$.

Aus (1) geht die besondere Darstellung

$$(5) \qquad y = f(x), \quad z = g(x)$$

der Kurve hervor, wenn wir $t = x$ annehmen und dementsprechend $\varphi(t) = x$, dagegen $\chi(t)$ und $\psi(t)$ gleich $f(x)$ und $g(x)$ setzen. *Als positiver Sinn auf der Kurve gilt dann derjenige, in dem die unabhängige Veränderliche x zunimmt.* Jetzt ist $x' = 1$, $y' = f'(x)$, $z' = g'(x)$, so daß nach (2):

$$(6) \qquad \mathfrak{y} - y = f'(x) \cdot (\mathfrak{x} - x), \quad \mathfrak{z} - z = g'(x) \cdot (\mathfrak{x} - x)$$

die Gleichungen der Tangente und nach (3):

$$(7) \quad \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + f'^2 + g'^2}}, \quad \beta = \frac{f'}{\sqrt{1 + f'^2 + g'^2}}, \quad \gamma = \frac{g'}{\sqrt{1 + f'^2 + g'^2}}$$

die Richtungskosinus der Tangente sind. Die Quadratwurzel ist dabei *positiv*. Nach (4) wird ferner in diesem Falle die Gleichung der Normalebene:

$$(8) \qquad (\mathfrak{x} - x) + f'(x) \cdot (\mathfrak{y} - y) + g'(x) \cdot (\mathfrak{z} - z) = 0$$

in den laufenden Koordinaten $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$.

253. Tangentenebene und Normale einer Fläche. Nach Nr. 251 sei eine *Fläche* durch eine Gleichung:

$$(1) \qquad F(x, y, z) = 0$$

definiert. Wir setzen voraus, *daß die Funktion F für einen gewissen Variabilitätsbereich von x, y, z nebst allen ihren Ableitungen, soweit sie in der Folge vorkommen werden, stetig sei, und daß auch die Gleichung $F = 0$ innerhalb dieses Variabilitätsbereiches z als eine solche Funktion von x und y definiere, die nebst allen ihren Ableitungen, soweit sie in der Folge vorkommen, stetig ist.* Alsdann ergeben sich z. B. die Ableitungen von z nach x und y aus den Formeln:

$$(2) \qquad F_x + F_z \frac{\partial z}{\partial x} = 0, \quad F_y + F_z \frac{\partial z}{\partial y} = 0,$$

die illusorisch werden, wenn F_x, F_y, F_z alle drei gleich Null sind. Die gemachten Voraussetzungen werden also gewiß nicht erfüllt für solche Wertetripel x, y, z, für die F_x, F_y, F_z alle drei verschwinden. Wir schließen daher durch unsere Annahmen derartige *singuläre* Punkte (x, y, z) aus, die wir nicht genauer zu untersuchen beabsichtigen.

Wenn nun:

$$(3) \qquad z = f(x, y)$$

die durch (1) definierte Funktion z von x und y bedeutet, so liegt hier eine spezielle Darstellung einer Fläche vor (vgl. Nr. 251), und wir wollen zunächst von dieser Darstellung ausgehen. Es sei ein bestimmtes Wertepaar der beiden unabhängigen Veränderlichen x, y gewählt und z aus (3) bestimmt worden, wodurch ein Punkt M oder (x, y, z) der Fläche gewonnen wird. Es gibt unzählig viele *Kurven auf der Fläche*, die durch diesen Punkt gehen. Es sei nämlich y durch irgend eine solche Funktion von x ersetzt, die für den betrachteten Wert von x gerade den angenommenen Wert hat. Nach (3) wird dann auch z eine Funktion von x, die für den betrachteten Wert von x gerade den vorhin bestimmten Wert hat. Nun sind y und z Funktionen von x, und sie definieren eine durch M gehende Kurve auf der Fläche. Nach (6) in voriger Nummer sind:

$$\mathfrak{y} - y = \frac{dy}{dx} \cdot (\mathfrak{x} - x), \quad \mathfrak{z} - z = \frac{dz}{dx} \cdot (\mathfrak{x} - x)$$

die Gleichungen der Tangente des Punktes M dieser Kurve in den laufenden Koordinaten $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$. Dabei ist nach (3), weil y als Funktion von x aufgefaßt wurde:

$$\frac{dz}{dx} = f_x + f_y \frac{dy}{dx}.$$

Folglich sind auch:

$$(4) \quad \mathfrak{y} - y = \frac{dy}{dx} \cdot (\mathfrak{x} - x), \quad \mathfrak{z} - z = \left(f_x + f_y \frac{dy}{dx}\right) \cdot (\mathfrak{x} - x)$$

die Gleichungen der Tangente einer durch den Flächenpunkt M gehenden Kurve der Fläche. Zu verschiedenen durch M gehenden Flächenkurven gehören verschiedene Werte von $dy:dx$. Daher genügen die Punkte $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z})$ *aller* Tangenten, die man in M an *alle* durch M gehenden Flächenkurven legen kann, derjenigen Gleichung, die aus (4) durch Elimination von $dy:dx$ hervorgeht. Sie lautet:

$$(5) \quad \mathfrak{z} - z - f_x \cdot (\mathfrak{x} - x) - f_y \cdot (\mathfrak{y} - y) = 0,$$

und da sie in den laufenden Koordinaten $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ linear ist, folgt:

Satz 1: Ist $f(x, y)$ innerhalb eines Variabilitätsbereiches eine stetige und differenzierbare Funktion von x und y, so daß die Gleichung

$$z = f(x, y)$$

eine Fläche darstellt, so liegen alle durch einen Punkt (x, y, z) der Fläche gehenden Tangenten an alle durch diesen selben Punkt laufenden Flächenkurven in einer Ebene.

Diese Ebene (5) heißt die *Tangentenebene* der Fläche an der Stelle M oder (x, y, z) und der Punkt M ihr *Berührungspunkt.* Die Gerade, die in M auf der Tangentenebene senkrecht steht, heißt die *Normale* der Fläche im Punkte M.

Wenn nun die Funktion $z = f(x, y)$ diejenige ist, die durch die ursprünglich vorgelegte Gleichung (1) definiert wird, so bedeuten die in (5) auftretenden Größen f_x und f_y die partiellen Ableitungen von z nach x und y, die sich nach (2) berechnen lassen. Setzen wir sie aus (2) in (5) ein, so folgt, daß der Punkt M oder (x, y, z) der Fläche $F(x, y, z) = 0$ die *Tangentenebene* hat:

$$(6) \qquad F_x \cdot (\mathfrak{x} - x) + F_y \cdot (\mathfrak{y} - y) + F_z \cdot (\mathfrak{z} - z) = 0,$$

wenn $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ wie immer die laufenden Koordinaten bedeuten. Da

$$dF = F_x dx + F_y dy + F_z dz$$

ist, so stellt das gleich Null gesetzte vollständige Differential dF von F die Tangentenebene dar, sobald die Differentiale dx, dy, dz als die Differenzen $\mathfrak{x} - x$, $\mathfrak{y} - y$, $\mathfrak{z} - z$ aufgefaßt werden. Die *Normale* des Flächenpunktes M hat, weil sie auf der Ebene (6) senkrecht steht, in den laufenden Koordinaten $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ die Gleichungen:

$$(7) \qquad \frac{\mathfrak{x} - x}{F_x} = \frac{\mathfrak{y} - y}{F_y} = \frac{\mathfrak{z} - z}{F_z}.$$

Ihre Richtungskosinus sind somit proportional F_x, F_y, F_z. Wir wollen sie mit X, Y, Z bezeichnen. Es ist dann:

$$(8) \qquad \begin{cases} X = \dfrac{F_x}{\sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}}, \quad Y = \dfrac{F_y}{\sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}}, \\[2ex] \qquad Z = \dfrac{F_z}{\sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}}. \end{cases}$$

Wenn wir hierin der Quadratwurzel das Pluszeichen vorschreiben, so haben wir *der Normale einen positiven Sinn beigelegt.* Wir wollen untersuchen, welche geometrische Bedeutung diese Festsetzung hat. Es sei $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z})$ derjenige Punkt der Normale, der hervorgeht, wenn ein Punkt vom Flächenpunkte M oder (x, y, z) aus um die Strecke s in *positivem* Sinne auf der Normale fortschreitet. Alsdann ist $\mathfrak{x} - x = Xs$ usw., also $\mathfrak{x} = x + Xs$ usw. Bilden wir die Funktion F für das Wertsystem $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ statt für x, y, z, so kommt also:

$$F(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}) = F(x + Xs,\ y + Ys,\ z + Zs).$$

Dieser Wert ist natürlich nicht gleich Null, da der Punkt $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z})$ nicht auf der Fläche liegt. Nach Satz 24 in Nr. 116 kommt, da rechts eine Funktion von s steht:

$$F(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}) = F(x, y, z) + (F_x X + F_y Y + F_z Z)\, s + R,$$

wobei s nach Satz 22 in Nr. 115 so klein gewählt werden kann, daß der Rest R ohne Einfluß auf das Vorzeichen der rechten Seite ist. Wegen (8) folgt hieraus:

$$F(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}) - F(x, y, z) = s\sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2} + R.$$

Also ist diese Differenz bei hinreichend kleinem s positiv, wenn die Quadratwurzel nach Vorschrift positiv gewählt wird.

Die Festsetzung, die wir oben über den positiven Sinn der Normale machten, hat also folgende geometrische Bedeutung: Sind x, y, z die Koordinaten eines Punktes der Fläche, so ist $F(x, y, z) = 0$; liegt der Punkt jedoch außerhalb der Fläche auf der einen oder andern Seite und zwar hinreichend nahe bei der Fläche, so ist F entweder positiv oder negativ. *Nennen wir diejenige Seite, auf der $F > 0$ ist, die Außenseite der Fläche, so haben wir alsdann die Normale positiv nach der Außenseite hin angenommen.*

Von der allgemeinen Darstellung $F = 0$ kehren wir zur Darstellung

$$z = f(x, y) \tag{9}$$

der Fläche zurück, indem wir einfach $F = 0$ durch $z - f = 0$, d. h. F durch $z - f$ ersetzen. Außenseite ist alsdann diejenige, auf der $z > f$ ist. Jetzt wird $F_x = -f_x$, $F_y = -f_y$ und $F_z = 1$, und wie in Nr. 85 wollen wir $\partial z : \partial x = f_x$ und $\partial z : \partial y = f_y$ mit p und q bezeichnen. Nach (8) sind alsdann die Richtungskosinus der positiven Normale der Fläche (9):

$$X = \frac{-p}{\sqrt{p^2+q^2+1}}, \quad Y = \frac{-q}{\sqrt{p^2+q^2+1}}, \quad Z = \frac{1}{\sqrt{p^2+q^2+1}}, \tag{10}$$

wobei die Quadratwurzel positiv ist. Ferner hat nach (5) die Tangentenebene der Fläche (9) in den laufenden Koordinaten $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ die Gleichung:

$$(\mathfrak{z} - z) - p(\mathfrak{x} - x) - q(\mathfrak{y} - y) = 0, \tag{11}$$

während die Normale nach (7) die Gleichungen hat:

$$\frac{\mathfrak{x} - x}{-p} = \frac{\mathfrak{y} - y}{-q} = \mathfrak{z} - z. \tag{12}$$

254. Nochmals die Tangente und Normalebene einer Kurve. In Nr. 252 haben wir den Fall, in dem eine Kurve in der Form

$$F(x, y, z) = 0, \quad G(x, y, z) = 0, \tag{1}$$

also nach Nr. 251 als *Schnittlinie der beiden Flächen* $F = 0$ und $G = 0$ dargestellt wird, vorläufig beiseite gelassen. Die

Tangente eines Kurvenpunktes (x, y, z), der ja beiden Flächen angehört, ist die Schnittgerade derjenigen beiden Tangentenebenen, die bei der einen und andern Fläche zum Punkte (x, y, z) gehören, d. h. nach (6) in voriger Nummer sind:

$$(2)\qquad \begin{cases} F_x(\mathfrak{x}-x)+F_y(\mathfrak{y}-y)+F_z(\mathfrak{z}-z)=0, \\ G_x(\mathfrak{x}-x)+G_y(\mathfrak{y}-y)+G_z(\mathfrak{z}-z)=0 \end{cases}$$

in den laufenden Koordinaten $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ die *Gleichungen der Tangente der Kurve* (1). Sie lassen sich so schreiben:

$$(3)\qquad \frac{\mathfrak{x}-x}{F_yG_z-G_yF_z}=\frac{\mathfrak{y}-y}{F_zG_x-G_zF_x}=\frac{\mathfrak{z}-z}{F_xG_y-G_xF_y}.$$

Die *Normalebene der Kurve* (1) hat mithin in den laufenden Koordinaten $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ die Gleichung:

$$(4)\qquad \begin{vmatrix} \mathfrak{x}-x & F_x & G_x \\ \mathfrak{y}-y & F_y & G_y \\ \mathfrak{z}-z & F_z & G_z \end{vmatrix}=0.$$

Die Richtungskosinus der Tangente sind den Nennern in (3) proportional. Die Summe ihrer Quadrate muß ferner gleich Eins sein. Nun ist die Summe der Quadrate der Nenner von (3) nach der in der analytischen Geometrie des Raumes oft nützlichen Identität:

$$(5)\qquad \begin{cases} (a_2b_3-a_3b_2)^2+(a_3b_1-a_1b_3)^2+(a_1b_2-a_2b_1)^2 \\ \qquad =(a_1^2+a_2^2+a_3^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2)-(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2 \end{cases}$$

diese:

$$(6)\qquad T^2=(F_x^2+F_y^2+F_z^2)(G_x^2+G_y^2+G_z^2)-(F_xG_x+F_yG_y+F_zG_z)^2.$$

Verstehen wir unter T die *positive* Quadratwurzel hieraus, so sind also

$$(7)\qquad \alpha=\frac{F_yG_z-G_yF_z}{T},\quad \beta=\frac{F_zG_x-G_zF_x}{T},\quad \gamma=\frac{F_xG_y-G_xF_y}{T}$$

die Richtungskosinus der Tangente. Indem wir für T die positive Wurzel gewählt haben, ist der Tangente ein bestimmter positiver Sinn beigelegt worden. Wir machen aber darauf aufmerksam, daß sich der entgegengesetzte Sinn ergeben würde, wenn wir die Gleichungen (1) in umgekehrter Reihenfolge $G=0$, $F=0$ schrieben. Wir haben es also hier mit einer rein analytischen Festsetzung des Sinnes zu tun.

255. Tangentialkegel. Gegeben sei außer der Fläche $F(x, y, z) = 0$ irgend ein Punkt M_0 oder (x_0, y_0, z_0) im Raume. Wir betrachten diejenigen Tangentenebenen der Fläche, die durch M_0 gehen. Ist (x, y, z) oder M der Berührungspunkt einer solchen Ebene, so bestehen nach (6) in Nr. 253 für x, y, z die beiden Gleichungen:

$$(1)\quad F(x, y, z) = 0, \quad F_x(x_0 - x) + F_y(y_0 - y) + F_z(z_0 - z) = 0.$$

Diese beiden Gleichungen in x, y, z definieren aber eine Kurve k und zwar eine Kurve von Punkten M auf der Fläche, nämlich den Ort aller derjenigen Punkte M der Fläche, deren Tangentenebenen durch M_0 gehen. Die Gerade von irgend einem Punkte M der Kurve k nach M_0 ist eine Tangente der Fläche; die Gesamtheit aller dieser Geraden heißt der *Tangentialkegel*, der von der Spitze M_0 aus an die Fläche gelegt werden kann. Ist $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z})$ irgend ein Punkt auf einer der Geraden MM_0, so ist

$$(2)\qquad \frac{\mathfrak{x} - x_0}{x - x_0} = \frac{\mathfrak{y} - y_0}{y - y_0} = \frac{\mathfrak{z} - z_0}{z - z_0}.$$

Die Gleichung des Tangentialkegels in den laufenden Koordinaten $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ geht mithin durch Elimination von x, y, z aus den *vier* Gleichungen (1) und (2) hervor. Da die Tangentenebene eines Punktes M der Kurve k auf der Fläche außer der Mantellinie MM_0 des Kegels die Tangente der Kurve k enthält, ist sie zugleich diejenige Tangentenebene des Kegels, die den Kegel in allen Punkten der Mantellinie MM_0 berührt. Man sagt daher, daß der Tangentialkegel von M_0 der Fläche längs der Kurve k *umschrieben* sei.

Stellen wir uns vor, der Punkt M_0 rücke auf irgend einer Geraden durch den Anfangspunkt O ins Unendlichferne, indem beständig x_0, y_0, z_0 drei Konstanten a, b, c proportional bleiben, so gelangen wir zum Begriffe des *Tangentialzylinders,* dessen Mantellinien Richtungskosinus proportional a, b, c haben.

256. Homogene Koordinaten im Raume. Wie wir in Nr. 175 homogene Koordinaten in der Ebene einführten, so können wir auch im Raume statt der drei rechtwinkligen Koordinaten x, y, z eines Punktes M *vier homogene Koordinaten* x_1, x_2, x_3, x_4 benutzen, indem wir

$$(1) \qquad x = \frac{x_1}{x_4}, \quad y = \frac{x_2}{x_4}, \quad z = \frac{x_3}{x_4}$$

setzen. Bei den homogenen Koordinaten kommen nur ihre Verhältnisse in Betracht. Im Falle $x_4 = 0$ liegt ein unendlich ferner Punkt vor, nämlich ein unendlich ferner Punkt einer Geraden, deren Richtungskosinus proportional x_1, x_2, x_3 sind.

Ist $F(x, y, z) = 0$ die Gleichung einer Fläche, so stellt sie sich in den homogenen Koordinaten so dar:

$$F\left(\frac{x_1}{x_4}, \frac{x_2}{x_4}, \frac{x_3}{x_4}\right) = 0.$$

Links steht eine homogene Funktion nullten Grades von x_1, x_2, x_3, x_4, nach Nr. 91. Multiplizieren wir die Gleichung mit irgend einer Potenz von x_4, so können wir ihre linke Seite in eine homogene Funktion von beliebigem Grade umwandeln. *Umgekehrt:* Ist U eine homogene Funktion n^{ten} Grades von x_1, x_2, x_3, x_4, so ist $U : x_4^n$ homogen vom nullten Grade. Eine homogene Funktion nullten Grades aber bleibt ungeändert, wenn alle Veränderlichen mit derselben Größe multipliziert werden. Wenn wir also x_1, x_2, x_3, x_4 mit $1 : x_4$ multiplizieren, so wird $U : x_4^n$ nach (1) eine Funktion von x, y, z:

$$(2) \qquad \frac{1}{x_4^n} U(x_1, x_2, x_3, x_4) = F(x, y, z).$$

Demnach stellt jede gleich Null gesetzte homogene Funktion n^{ten} Grades

$$(3) \qquad U(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$$

eine Fläche $F(x, y, z) = 0$ dar.

Die Differentiation von (2) nach x, y, z ergibt, da nach (1) $x_1 = x x_4$, $x_2 = y x_4$ und $x_3 = z x_4$ ist:

$$F_x = \frac{U_{x_1}}{x_4^{n-1}}, \quad F_y = \frac{U_{x_2}}{x_4^{n-1}}, \quad F_z = \frac{U_{x_3}}{x_4^{n-1}}.$$

Die Gleichung (6) der *Tangentenebene* in Nr. 253 wird mithin:

$$U_{x_1}(\mathfrak{x} - x) + U_{x_2}(\mathfrak{y} - y) + U_{x_3}(\mathfrak{z} - z) = 0.$$

Führen wir hierin nicht nur für den Berührungspunkt (x, y, z), sondern auch für den laufenden Punkt $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z})$ analog (1) vermöge:

$$\mathfrak{x} = \frac{\mathfrak{x}_1}{\mathfrak{x}_4}, \quad \mathfrak{y} = \frac{\mathfrak{x}_2}{\mathfrak{x}_4}, \quad \mathfrak{z} = \frac{\mathfrak{x}_3}{\mathfrak{x}_4}$$

homogene Koordinaten $\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \mathfrak{x}_3, \mathfrak{x}_4$ ein, so kommt, wenn wir noch mit $\mathfrak{x}_4$ multiplizieren:

$$U_{x_1}\mathfrak{x}_1 + U_{x_2}\mathfrak{x}_2 + U_{x_3}\mathfrak{x}_3 - \frac{\mathfrak{x}_4}{x_4}(U_{x_1}x_1 + U_{x_2}x_2 + U_{x_3}x_3) = 0.$$

Da U homogen vom n^{ten} Grade ist, so wird der Inhalt der Klammer nach Satz 9 in Nr. 91 gleich $nU - U_{x_4}x_4$, also wegen (3) gleich $-U_{x_4}x_4$. *Mithin ist:*

$$(4) \qquad U_{x_1}\mathfrak{x}_1 + U_{x_2}\mathfrak{x}_2 + U_{x_3}\mathfrak{x}_3 + U_{x_4}\mathfrak{x}_4 = 0$$

in den laufenden homogenen Koordinaten $\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \mathfrak{x}_3, \mathfrak{x}_4$ *die Gleichung derjenigen Tangentenebene der Fläche* (3), *deren Berührungspunkt die homogenen Koordinaten* x_1, x_2, x_3, x_4 *hat.*

Ist eine *Kurve* als Schnittlinie zweier Flächen:

$$(5) \qquad U(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0, \quad V(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$$

gegeben, so wird die *Tangente* eines Punktes der Kurve durch die Gleichung (4) und die Gleichung:

$$V_{x_1}\mathfrak{x}_1 + V_{x_2}\mathfrak{x}_2 + V_{x_3}\mathfrak{x}_3 + V_{x_4}\mathfrak{x}_4 = 0$$

in den laufenden homogenen Koordinaten $\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \mathfrak{x}_3, \mathfrak{x}_4$ gegeben.

Eine Fläche heißt *algebraisch* von der n^{ten} Ordnung, wenn sie in homogenen Koordinaten durch eine Gleichung $U = 0$ dargestellt werden kann, deren linke Seite U eine homogene *ganze rationale* Funktion n^{ten} Grades ist. In der Gleichung (4) der Tangentenebene steht dann links eine homogene ganze rationale Funktion $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades von x_1, x_2, x_3, x_4.

Legen wir von einem *bestimmten* Punkte des Raumes mit den homogenen Koordinaten $\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \mathfrak{x}_3, \mathfrak{x}_4$ den *Tangentialkegel* an die algebraische Fläche (vgl. Nr. 255), so ist die Berührungskurve k durch die beiden Gleichungen (3) und (4) in den laufenden homogenen Koordinaten x_1, x_2, x_3, x_4 gegeben. Da man nun die Schnittkurve zweier algebraischer Flächen von n^{ter} und m^{ter} Ordnung eine *algebraische Kurve* von der nm^{ten} Ordnung nennt, so ist also k eine algebraische Kurve von der $n(n-1)^{\text{ten}}$ Ordnung.

Die soeben gegebene Definition der algebraischen Kurven kommt im Falle, wo die eine Fläche eine Ebene ist, auf die Definition der ebenen algebraischen Kurven in Nr. 177 zurück, wenn man nämlich eine algebraische Fläche n^{ter} Ordnung $U = 0$ und die Ebene (d. h. algebraische Fläche erster Ordnung) $x_3 = 0$ oder $z = 0$ miteinander schneidet.

§ 2. Differential der Bogenlänge einer Raumkurve.

257. Differentialquotient der Bogenlänge. Es seien

$$(1) \qquad x = \varphi(t), \quad y = \chi(t), \quad z = \psi(t)$$

die Gleichungen einer Kurve. Wie in Nr. 193 bei einer ebenen Kurve können wir auch bei der Raumkurve (1) die Bogenlänge schon jetzt besprechen, indem wir uns ihre exakte Definition für den zweiten Band vorbehalten. Ist C ein bestimmter Punkt der Kurve, so durchlaufen wir sie von C an im Sinne wachsender Werte der Hilfsveränderlichen t bis zu einer beliebigen Stelle M, die zu einem allgemeinen Werte t gehört. Zu diesem Kurvenstücke CM gehört eine Bogenlänge s, die eine Funktion von t sein wird. Wir suchen ihren Differentialquotienten $ds : dt$. Zu diesem Zwecke lassen wir t zunächst um einen beliebigen Wert Δt wachsen. Der Punkt M oder (x, y, z) gehe dabei in einen Punkt M' oder $(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$ der Kurve über. Die *Sehne* MM' hat dann die Länge:

$$(2) \quad MM' = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2} = \Delta t \sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta z}{\Delta t}\right)^2}.$$

Wir werden im zweiten Bande beweisen, daß der Grenzwert des Verhältnisses der Sehne MM' zum Bogen MM' gleich Eins ist, wenn M' nach M rückt, d. h. für $\lim \Delta t = 0$, sobald $\varphi(t)$, $\chi(t)$, $\psi(t)$ in dem Intervalle von t bis $t + \Delta t$ nebst ihren ersten Ableitungen stetig sind. Wenn wir die Bogenlänge im Sinne wachsender Werte von t positiv rechnen, müssen wir die letzte Quadratwurzel in (2) *positiv* annehmen, weil dann MM' mit Δt positiv ist. Es ergibt sich nun aus (2):

$$\frac{\text{Bogen } MM'}{\Delta t} \cdot \frac{\text{Sehne } MM'}{\text{Bogen } MM'} = \sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta z}{\Delta t}\right)^2}.$$

Für $\lim \Delta t = 0$ geht, wie gesagt, der zweite Bruch links in Eins über, dagegen der erste in die Ableitung $ds : dt$ des Bogens s nach t. Also kommt:

$$(3) \qquad \frac{ds}{dt} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2},$$

wo die Wurzel *positiv* ist. Hiernach hat das Differential der Bogenlänge, das man auch das *Bogenelement* nennt, den Wert:

$$(4) \qquad ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2},$$

wobei die Wurzel positiv oder negativ ist, je nachdem das Differential dt der unabhängigen Veränderlichen positiv oder negativ gewählt worden ist.

Wird die Kurve insbesondere in der Form:

$$y = f(x), \quad z = g(x)$$

gegeben, so tritt x an die Stelle von t und es kommt:

$$(5) \qquad \frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + f'(x)^2 + g'(x)^2},$$

wobei die Wurzel *positiv* ist.

258. Das Bogenelement in Polarkoordinaten. Statt der rechtwinkligen Koordinaten x, y, z kann man auch die Polarkoordinaten r, θ, ψ einführen, indem man wie in Nr. 97

$$(1) \qquad x = r \sin\theta \cos\psi, \quad y = r \sin\theta \sin\psi, \quad z = r \cos\theta$$

setzt. Eine Kurve im Raume wird alsdann durch *zwei* Gleichungen in r, θ, ψ gegeben, z. B. so:

$$\psi = \Psi(\theta), \quad r = R(\theta).$$

In diesem Falle ist θ die unabhängige Veränderliche, der positive Sinn der Kurve also der Sinn wachsender Werte von θ. Aus (1) folgt:

$$\begin{aligned} dx &= \sin\theta \cos\psi\, dr + r \cos\theta \cos\psi\, d\theta - r \sin\theta \sin\psi\, d\psi, \\ dy &= \sin\theta \sin\psi\, dr + r \cos\theta \sin\psi\, d\theta + r \sin\theta \cos\psi\, d\psi, \\ dz &= \qquad \cos\theta\, dr - \qquad r \sin\theta\, d\theta. \end{aligned}$$

Also kommt:

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta\, d\psi^2.$$

Nach (4) in voriger Nummer ist demnach das Bogendifferential:

$$(2) \qquad ds = \sqrt{dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta\, d\psi^2},$$

wobei die Wurzel das Pluszeichen hat, sobald das Differential der unabhängigen Veränderlichen positiv ist.

Der Ausdruck (2) läßt sich auch aus der geometrischen Anschauung ableiten: Der Punkt M mit den Polarkoordinaten r, θ, ψ liegt nämlich erstens auf der *Kugel* um den Anfangspunkt O mit dem Radius r, zweitens auf dem *Kegel*, der

durch Rotation des einen Schenkels des Winkels θ um die z-Achse hervorgeht, und drittens auf derjenigen *Ebene* durch die z-Achse, die mit der x-Achse den Winkel ψ bildet. Entsprechend liegt der Punkt M' oder $(r+\varDelta r, \theta+\varDelta\theta, \psi+\varDelta\psi)$ auf einer Kugel, einem Kegel und einer Ebene. Diese sechs Flächen schließen zusammen einen Pyramidenstumpf ein, dessen Kanten nach O laufen und der von zwei Kugeln ausgeschnitten wird. Die auf der Kugel vom Radius r gelegene Grundfläche des Stumpfes ist ein krummlinig begrenztes Rechteck, und zwar sind zwei der Grenzen Bogen von größten Kreisen einer Kugel vom Radius r und Zentriwinkel $\varDelta\theta$, so daß ihre Länge $r\varDelta\theta$ ist. Die beiden anderen Grenzen sind Bogen von Kreisen mit den Radien $r\sin\theta$ und $r\sin(\theta+\varDelta\theta)$, die zum Zentriwinkel $\varDelta\psi$ gehören, haben also die Längen $r\sin\theta\varDelta\psi$ und $r\sin(\theta+\varDelta\theta)\varDelta\psi$. Die beiden Bogen $r\varDelta\theta$ und $r\sin\theta\varDelta\psi$ bilden mit den zugehörigen Sehnen Verhältnisse, deren Grenzwerte für $\lim\varDelta\theta=0$ und $\lim\varDelta\psi=0$ gleich Eins sind, und die beiden Sehnen bilden miteinander einen Winkel, dessen Grenzwert ein rechter Winkel ist. Ebenso bildet die Kante $\varDelta r$ des Pyramidenstumpfes mit jenen beiden Sehnen Winkel, deren Grenzwerte rechte Winkel sind. Ferner wird das Verhältnis des Bogens $\varDelta s$ oder MM' zur Sehne MM' beim Grenzübergange zu $\lim\varDelta r=0$, $\lim\varDelta\theta=0$, $\lim\varDelta\psi=0$ ebenfalls gleich Eins. Beim Grenzübergange wird also $\varDelta s$ Diagonale eines Rechtflachs mit den Seitenlängen $\varDelta r$, $r\varDelta\theta$ und $r\sin\theta\varDelta\psi$, so daß sich die Formel (2) ergibt.

259. Die Richtungskosinus der Kurventangente ausgedrückt mittels des Bogendifferentials. Sind α, β, γ wie in Nr. 252 die Richtungskosinus der Kurventangente, so ist nach den dort gewonnenen Formeln (3), worin die Akzente die Differentiation nach der Hilfsveränderlichen t anzeigen:

$$\alpha=\frac{dx}{\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}} \quad \text{usw.}$$

Die Wurzel hat das Pluszeichen, wenn die Differentiale dx, dy, dz zu einem positiven Differentiale dt gehören. Nach (4) in Nr. 257 ergibt sich daher:

$$(1) \qquad \alpha=\frac{dx}{ds}, \quad \beta=\frac{dy}{ds}, \quad \gamma=\frac{dz}{ds}.$$

Wird die Bogenlänge s selbst als unabhängige Veränderliche gewählt, so ist die Kurve positiv im Sinne wachsender Werte von s; *die Richtungskosinus der Tangente sind alsdann die Ableitungen der Koordinaten x, y, z nach der Bogenlänge s.*

§ 3. Krümmung einer Raumkurve.

260. Das Krümmungsmaß. Den Anfangspunkt O wählen wir als Mittelpunkt einer Kugel mit dem Radius Eins, siehe Fig. 59, und alsdann ziehen wir parallel zu jeder Tangente einer vorgelegten Raumkurve den Radius und zwar entsprechend dem positiven Sinne der Tangente. So gehört zum Kurvenpunkte M ein Radius $O\mathsf{M}$, zum Kurvenpunkte M' ein Radius $O\mathsf{M}'$. Dem Kurvenbogen MM' entspricht also ein *sphärischer* Kurvenbogen MM'; er ist ein Stück der sogenannten *sphärischen Indikatrix der Tangenten der Raumkurve.* Diese Indikatrix wird im entsprechenden Sinne positiv gerechnet, d. h. wenn die Raumkurve von M nach M' im festgesetzten positiven Sinne durchlaufen wird, so soll der Fortschreitungssinn auf der Indikatrix von M nach M' positiv angenommen werden. Das Verhältnis des Bogens MM' der Indikatrix zum Bogen MM' der Raumkurve heißt *die mittlere oder durchschnittliche Krümmung des Kurvenbogens MM'*, und sie ist nach unseren Festsetzungen *stets positiv.* Es seien Δs und $\Delta\sigma$ die Längen der Bogenstücke MM' und MM'. Alsdann ist $\Delta\sigma : \Delta s$ die mittlere Krümmung.

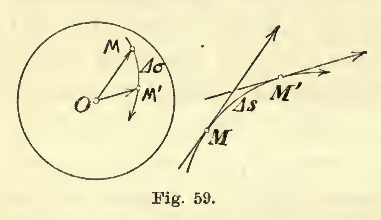


Fig. 59.

Wenn M' immer näher an M heranrückt, kommt auch M' immer näher an M heran. Wir werden sogleich zeigen, daß das Verhältnis $\Delta\sigma : \Delta s$ für $\lim \Delta s = 0$ einen bestimmten endlichen Grenzwert hat. Er heißt das *Krümmungsmaß oder die Krümmung der Raumkurve an der Stelle M.* Das Bogendifferential $d\sigma$ der Indikatrix wird der *Kontingenzwinkel* der Raumkurve genannt.

Für den Fall, daß die Kurve eben ist und in der xy-Ebene liegt, kommen diese Definitionen auf die in Nr. 195 zurück,

aber ein *wesentlicher Unterschied* ist vorhanden: Nach dem Vorhergehenden ist der Grenzwert $d\sigma : ds$ von $\Delta\sigma : \Delta s$, also die Krümmung der Raumkurve, stets *positiv*. Bei einer ebenen Kurve in der xy-Ebene dagegen war die Krümmung positiv oder negativ. Dies liegt daran, daß wir jene ebenen Kurven stets von einerlei Seite der xy-Ebene her betrachtet haben. *Eine ebene Kurve hat dagegen, als Raumkurve aufgefaßt, überall eine positive Krümmung wie jede andere Raumkurve.*

Zum Beweise der Existenz des Grenzwertes $d\sigma : ds$ von $\Delta\sigma : \Delta s$ sei die Raumkurve durch die Gleichungen:

$$(1) \qquad x = \varphi(t), \quad y = \chi(t), \quad z = \psi(t)$$

gegeben; zu den Werten t und $t + \Delta t$ sollen die Punkte M und M' gehören. Da $O\mathsf{M}$ zur positiven Tangente von M parallel ist und die Länge Eins hat, sind die Koordinaten von M die Richtungskosinus α, β, γ dieser Tangente. (Vgl. Nr. 252.) Sie mögen, wenn M nach M' wandert, um $\Delta\alpha, \Delta\beta, \Delta\gamma$ wachsen, so daß M' die Koordinaten $\alpha + \Delta\alpha, \beta + \Delta\beta, \gamma + \Delta\gamma$ hat. Es ist nun:

$$\frac{\Delta\sigma}{\Delta s} = \frac{\Delta\sigma}{\text{Sehne } \mathsf{MM}'} \cdot \frac{\text{Sehne } \mathsf{MM}'}{\text{Sehne } MM'} : \frac{\Delta s}{\text{Sehne } MM'}.$$

Der letzte Bruch rechts hat, wie aus dem in Nr. 257 erwähnten, im zweiten Bande zu beweisenden Satze folgt, den Grenzwert Eins, falls x, y, z im Intervalle von t bis $t + \Delta t$ stetige Funktionen mit stetigen ersten Ableitungen sind. Da M die Koordinaten α, β, γ hat, so ist der Grenzwert des ersten Bruches rechts aus demselben Grunde gleich Eins, falls α, β, γ dieselben Bedingungen erfüllen.

Unter diesen Voraussetzungen ergibt sich mithin:

$$\lim_{\Delta s = 0} \frac{\Delta\sigma}{\Delta s} = \frac{d\sigma}{ds} = \lim_{MM' = 0} \frac{\text{Sehne } \mathsf{MM}'}{\text{Sehne } MM'}.$$

Die beiden Sehnen MM' und MM' haben die Längen:

$$\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2} \quad \text{und} \quad \sqrt{\Delta\alpha^2 + \Delta\beta^2 + \Delta\gamma^2}.$$

Dividieren wir mit Δt^2 unter den Wurzeln, so erhalten wir:

$$(2) \qquad \frac{d\sigma}{ds} = \sqrt{\frac{\alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2}{x'^2 + y'^2 + z'^2}},$$

wobei die Wurzel *positiv* ist und die Akzente die Differentiation nach t andeuten. Nach (3) in Nr. 252 kommt nun:

$$(3) \qquad \alpha' = \frac{x''}{\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}} - \frac{x'(x'x''+y'y''+z'z'')}{\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}^3},$$

und entsprechende Werte gehen für β' und γ' hervor. Aus ihnen folgt:

$$(4) \quad \alpha'^2+\beta'^2+\gamma'^2 = \frac{(x''^2+y''^2+z''^2)(x'^2+y'^2+z'^2)-(x'x''+y'y''+z'z'')^2}{(x'^2+y'^2+z'^2)^2}.$$

Bezeichnen wir das Krümmungsmaß mit k, so gibt die Substitution von (4) in (2):

$$(5) \quad k = \frac{d\sigma}{ds} = \frac{\sqrt{(x''^2+y''^2+z''^2)(x'^2+y'^2+z'^2)-(x'x''+y'y''+z'z'')^2}}{\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}^3},$$

wo die Wurzeln *positiv* sind. Der Radikand im Zähler läßt sich nach der in Nr. 254 unter (5) angegebenen Identität umformen, so daß sich ergibt:

$$(6) \quad k = \frac{d\sigma}{ds} = \frac{\sqrt{(y'z''-z'y'')^2+(z'x''-x'z'')^2+(x'y''-y'x'')^2}}{\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}^3},$$

wo die Wurzeln *positiv* sind.

Es war vorausgesetzt worden, daß x, y, z und α, β, γ stetige Funktionen mit stetigen ersten Ableitungen seien. Nach (3) ist dies der Fall, *wenn x, y, z nebst ihren ersten und zweiten Ableitungen stetige Funktionen von t in der Umgebung der betrachteten Stelle sind, aber ihre ersten Ableitungen nicht alle drei zugleich verschwinden können* (vgl. hierzu Nr. 252).

Der reziproke Wert der Krümmung k, also die *stets positive* Größe $R = 1 : k$, heißt der *Krümmungsradius* der Kurve an der betrachteten Stelle. Wir werden nämlich später sehen, daß es wie bei den ebenen Kurven (vgl. Nr. 197) einen Krümmungskreis gibt, dessen Radius den Wert R hat. Es kommt:

$$(7) \qquad R = \frac{\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}^3}{\sqrt{(y'z''-z'y'')^2+(z'x''-x'z'')^2+(x'y''-y'x'')^2}}.$$

Der Krümmungsradius R ist endlich, wenn an der betrachteten Stelle nicht alle drei Größen:

$$(8) \qquad y'z''-z'y'', \quad z'x''-x'z'', \quad x'y''-y'x''$$

gleich Null sind.

Ist insbesondere *die Bogenlänge s die unabhängige Veränderliche*, so sind α, β, γ nach (1) in Nr. 259 gleich x', y', z', daher α', β', γ' gleich x'', y'', z'', so daß sich der Wert (4) auf $x''^2 + y''^2 + z''^2$ reduziert. Alsdann ergibt sich mithin:

$$(9) \qquad k = \frac{d\sigma}{ds} = \sqrt{x''^2 + y''^2 + z''^2}, \quad R = \frac{1}{\sqrt{x''^2 + y''^2 + z''^2}},$$

wobei die Quadratwurzel *positiv* ist.

261. Hauptnormale einer Kurve. Die sphärische Indikatrix der Tangenten, siehe Fig. 59 auf S. 420, hat in dem zum Kurvenpunkte M gehörigen Punkte M eine Tangente, deren positiver Sinn dem Fortschreitungssinne der Indikatrix entsprechend anzunehmen ist. Der Strahl, den wir vom Kurvenpunkte M aus parallel zu dieser positiven Tangente der Indikatrix ziehen können und der augenscheinlich zu den Normalen des Punktes M gehört, heißt die *positive Hauptnormale* von M. Ihre Richtungskosinus wollen wir mit l, m, n bezeichnen. Sie sind zugleich die Richtungskosinus der positiven Tangente des Punktes M der Indikatrix. Da σ die Bogenlänge der Indikatrix ist und α, β, γ die Koordinaten von M sind, so werden l, m, n analog den Formeln (1) in Nr. 259 gegeben durch:

$$(1) \qquad l = \frac{d\alpha}{d\sigma}, \quad m = \frac{d\beta}{d\sigma}, \quad n = \frac{d\gamma}{d\sigma}.$$

Weil der Krümmungsradius $R = ds : d\sigma$ ist, folgt hieraus:

$$(2) \qquad l = R\frac{d\alpha}{ds}, \quad m = R\frac{d\beta}{ds}, \quad n = R\frac{d\gamma}{ds}.$$

Nach (1) in Nr. 259 ist mithin auch:

$$(3) \qquad l = R\frac{d^2x}{ds^2}, \quad m = R\frac{d^2y}{ds^2}, \quad n = R\frac{d^2z}{ds^2}.$$

Wir erwähnen noch die hieraus folgenden Formeln:

$$(4) \qquad \frac{d^2x}{ds^2} = \frac{l}{R}, \quad \frac{d^2y}{ds^2} = \frac{m}{R}, \quad \frac{d^2z}{ds^2} = \frac{n}{R}.$$

Um l, m, n auch in einer beliebigen unabhängigen Veränderlichen t auszudrücken, schreiben wir statt (2):

$$(5) \qquad l = R\frac{d\alpha}{dt} : \frac{ds}{dt} \quad \text{usw.}$$

und setzen darin für R und $d\alpha : dt$ oder α' die Werte (7) und (3)

aus voriger Nummer und für $ds:dt$ den Wert (3) aus Nr. 257 ein. Dann kommt:

$$(6)\quad l = \frac{z'(z'x''-x'z'')-y'(x'y''-y'x'')}{\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}\sqrt{(y'z''-z'y'')^2+(z'x''-x'z'')^2+(x'y''-y'x'')^2}},$$

und die Werte von m und n gehen hieraus durch zyklische Vertauschung von x, y, z hervor. Die Wurzeln sind dabei *positiv*. Der gemeinsame Nenner von l, m und n wird nur dann gleich Null, wenn entweder die drei Größen x', y', z' oder die drei Größen

$$(7)\qquad y'z''-z'y'',\quad z'x''-x'z'',\quad x'y''-y'x''$$

gleich Null sind. In beiden Fällen werden auch die Zähler von l, m und n gleich Null. In Nr. 252 wurden ausdrücklich solche singuläre Stellen ausgeschlossen, an denen x', y', z' alle drei gleich Null sind. Wir erkennen jetzt, *daß auch solche Stellen, an denen alle drei Größen* (7) *gleich Null sind, als singulär zu bezeichnen und bei der allgemeinen Betrachtung auszuschließen sind,* da sich für sie der Begriff der Hauptnormale verflüchtigt. Vgl. (8) in Nr. 260.

Wir wollen noch die Formeln (5) in dieser Weise wiedergeben:

$$(8)\quad l = \frac{R\alpha'}{\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}},\quad m = \frac{R\beta'}{\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}},\quad n = \frac{R\gamma'}{\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}},$$

wo die Wurzel *positiv* ist.

262. Das begleitende Dreikant einer Kurve. Die Ebene durch die Tangente und Hauptnormale eines Kurvenpunktes M heißt die *Schmiegungsebene*, das Lot, das in M auf dieser Ebene errichtet werden kann, die *Binormale* von M; es gehört zu den Normalen der Kurve. Die durch M gehenden Geraden: Tangente, Haupt- und Binormale bilden eine dreifach rechtwinklige Ecke. Da zu jeder regulären Kurvenstelle M eine solche Ecke gehört, so nennen wir sie das *begleitende Dreikant der Kurve.*

Auch der Binormale wird ein bestimmter positiver Sinn beigelegt, nämlich in der Weise, *daß die positive Tangente, Haupt- und Binormale gerade so gegeneinander orientiert sind wie die positive x-, y- und z-Achse.*

263. Krümmungskreis und Krümmungsachse. Auf der positiven Hauptnormale des Kurvenpunktes M werde der zugehörige und nach Nr. 260 stets positive Krümmungsradius R vom Punkte M aus als Strecke abgetragen. Der Endpunkt C heißt der *Krümmungsmittelpunkt* von M, und der Kreis mit der Mitte C und dem Radius R, der in der Schmiegungsebene liegt und folglich die Kurve in M berührt, heißt der *Krümmungskreis* von M. Der wahre Grund für diese Bezeichnung kann erst später (in Nr. 300) gegeben werden. Die Krümmung des Krümmungskreises ist gerade so groß wie diejenige, die der Kurve in M zukommt. Das Lot, das in C auf der Schmiegungsebene zu errichten und mithin der Binormale von M parallel ist, heißt die *Krümmungsachse* von M. Es gilt für diese Gerade der

Satz 2: Sind bei einer Kurve $x=\varphi(t)$, $y=\chi(t)$, $z=\psi(t)$ diese drei Funktionen x, y, z von t in der Umgebung einer Stelle t nebst ihren Ableitungen bis zur dritten Ordnung bestimmt und endlich und sind ferner für die betrachtete Stelle t weder alle drei Größen x', y', z' noch alle drei Größen $y'z''-z'y''$, $z'x''-x'z''$, $x'y''-y'x''$ gleich Null, so ist die Krümmungsachse des zu dem betrachteten Werte t gehörigen Kurvenpunktes die Grenzlage der Schnittgeraden der Normalebene dieses Kurvenpunktes mit einer benachbarten Normalebene.

Denn wenn wie immer α, β, γ die Richtungskosinus der Tangente des Kurvenpunktes M bedeuten, so hat die Normalebene von M in den laufenden Koordinaten $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ nach (4) in Nr. 252 die Gleichung:

$$(1) \qquad \alpha(\mathfrak{x}-x)+\beta(\mathfrak{y}-y)+\gamma(\mathfrak{z}-z)=0,$$

die wir mit $V=0$ bezeichnen wollen. Wächst t um Δt, so geht die Gleichung $V+\Delta V=0$ einer anderen Normalebene hervor. Daher ist für die Schnittlinie beider Normalebenen:

$$V=0, \quad \frac{\Delta V}{\Delta t}=0.$$

Beim Grenzübergange für $\lim \Delta t=0$ kommt:

$$V=0, \quad V'=0,$$

wobei der Akzent die Differentiation nach t andeutet. Die erste Gleichung ist die Gleichung (1), die zweite diese:

(2) $\alpha'(\mathfrak{x}-x)+\beta'(\mathfrak{y}-y)+\gamma'(\mathfrak{z}-z)-(\alpha x'+\beta y'+\gamma z')=0.$

Nach (3) in Nr. 252 ist der Inhalt der letzten Klammer gleich der positiven Quadratwurzel aus $x'^2+y'^2+z'^2$, und aus (8) in Nr. 261 entnehmen wir die in die ersten Glieder von (2) einzusetzenden Werte von α', β', γ'. Dann geht (2) über in:

(3) $l(\mathfrak{x}-x)+m(\mathfrak{y}-y)+n(\mathfrak{z}-z)=R.$

Da diese Gleichung linear in $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ ist, stellt sie eine Ebene dar und zwar, weil die Koeffizienten l, m, n die Richtungskosinus der Hauptnormale sind, eine zur Hauptnormale senkrechte Ebene, die also die Normalebene (1) in einer Parallelen zur Binormale schneidet. Um den Satz zu beweisen, brauchen wir daher nur noch zu zeigen, daß die Ebene (3) den Punkt C enthält. Die Gleichung (3) wird in der Tat befriedigt, wenn darin für $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ die Werte:

(4) $x_1=x+lR,\quad y_1=y+mR,\quad z_1=z+nR$

eingesetzt werden, weil $l^2+m^2+n^2=1$ ist; und diese Werte (4) sind augenscheinlich die *Koordinaten des Krümmungsmittelpunktes* C, da er auf der positiven Hauptnormale in der Entfernung R vom Punkte M liegt.[1])

Wir merken noch an, daß sich x_1, y_1, z_1 nach (4) in Nr. 261 auch so darstellen lassen:

(5) $x_1=x+R^2\frac{d^2x}{ds^2},\quad y_1=y+R^2\frac{d^2y}{ds^2},\quad z_1=z+R^2\frac{d^2z}{ds^2}.$

264. Gleichungen zwischen den Richtungskosinus des begleitenden Dreikants. Für die Richtungskosinus der positiven Binormale wollen wir die Bezeichnungen λ, μ, ν einführen. Die drei positiven Koordinatenachsen bilden alsdann mit den drei positiven Kanten des begleitenden Dreikants Winkel, deren Kosinus die folgende Tabelle angibt:

	x	y	z
Tangente	α	β	γ
Hauptnormale.	l	m	n
Binormale	λ	μ	ν

1) Ist x die unabhängige Veränderliche, so sind (1) und (2) durch
$\mathfrak{x}-x+y'(\mathfrak{y}-y)+z'(\mathfrak{z}-z)=0,\quad y''(\mathfrak{y}-y)+z''(\mathfrak{z}-z)-(1+y'^2+z'^2)=0$
zu ersetzen, woraus die auf S. 249, Anm., gemachte Behauptung folgt.

Hieraus folgt eine Reihe von Beziehungen zwischen den Kosinus. Zunächst ist:

$$(1)\quad \alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1,\quad l^2+m^2+n^2=1,\quad \lambda^2+\mu^2+\nu^2=1.$$

Da ferner die Kanten des Dreikants paarweis aufeinander senkrecht stehen, folgt nach Nr. 252:

$$(2)\quad l\lambda+m\mu+n\nu=0,\quad \lambda\alpha+\mu\beta+\nu\gamma=0,\quad \alpha l+\beta m+\gamma n=0.$$

Das begleitende Dreikant können wir nun aber auch als ein neues Kreuz von Koordinatenachsen auffassen. In ihm haben die *alten* Achsen die in der Tabelle in den *Reihen* angegebenen Richtungskosinus. Also ist zunächst:

$$(3)\quad \alpha^2+l^2+\lambda^2=1,\quad \beta^2+m^2+\mu^2=1,\quad \gamma^2+n^2+\nu^2=1,$$

und da die alten Achsen paarweis zueinander senkrecht sind, folgt auch:

$$(4)\quad \beta\gamma+mn+\mu\nu=0,\quad \gamma\alpha+nl+\nu\lambda=0,\quad \alpha\beta+lm+\lambda\mu=0.$$

Ziehen wir durch den Anfangspunkt O die Parallelen OM, OM_1 und OM_2 zur positiven Tangente, Haupt- und Binormale und geben wir den Parallelen die Länge Eins, so entsteht ein Tetraeder OMM_1M_2, dessen Volumen gleich $1/6$ ist. Nach einem bekannten Satze der analytischen Geometrie ist das Volumen andererseits gleich einem Sechstel der Determinante der Koordinaten von M, M_1, M_2. Diese Koordinaten aber sind die in der Tabelle angegebenen Richtungskosinus. Daher ist, weil OM, OM_1 und OM_2 nach Nr. 262 gerade so wie die drei positiven Koordinatenachsen gegeneinander orientiert sind:

$$(5)\quad \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ l & m & n \\ \lambda & \mu & \nu \end{vmatrix} = +1.$$

Die zweite Gleichung (2), die erste Gleichung (2) und die dritte Gleichung (1) können wir als drei in λ, μ, ν lineare Gleichungen auffassen, deren Koeffizienten gerade diese Determinante bilden. Ihre Auflösung nach λ, μ, ν ergibt folglich:

$$(6)\quad \lambda=\beta n-\gamma m,\quad \mu=\gamma l-\alpha n,\quad \nu=\alpha m-\beta l.$$

[**264**

Durch zyklische Vertauschung der drei Zeilen unserer Tabelle finden wir hieraus noch die Gleichungen:

$$(7)\qquad \alpha = m\nu - n\mu, \quad \beta = n\lambda - l\nu, \quad \gamma = l\mu - m\lambda;$$

$$(8)\qquad l = \mu\gamma - \nu\beta, \quad m = \nu\alpha - \lambda\gamma, \quad n = \lambda\beta - \mu\alpha.$$

Vermöge (6) *sind wir imstande, auch die Richtungskosinus* λ, μ, ν *der Binormale zu berechnen.* Setzen wir nämlich darin die Werte von α, β, γ aus (3) in Nr. 252 und die von l, m, n aus (6) in Nr. 261 ein, so kommt:

$$(9)\qquad \lambda = \frac{y'z'' - z'y''}{\sqrt{(y'z'' - z'y'')^2 + (z'x'' - x'z'')^2 + (x'y'' - y'x'')^2}},$$

und analoge Formeln gehen für μ und ν durch zyklische Vertauschung von x, y, z hervor. Dabei kann die unabhängige Veränderliche irgend eine Hilfsgröße t sein; die Quadratwurzel ist positiv.[1])

Wenn insbesondere die Bogenlänge s *die unabhängige Veränderliche ist,* so folgt aus (6) nach (1) in Nr. 259 und nach (3) in Nr. 261:

$$(10)\qquad \lambda = R\left(\frac{dy}{ds}\frac{d^2z}{ds^2} - \frac{dz}{ds}\frac{d^2y}{ds^2}\right),$$

und zyklische Vertauschung von x, y, z gibt die Werte von μ und ν.

265. Differenz zwischen Kurvenbogen und Sehne. Einen bemerkenswerten Ausdruck für die Differenz zwischen einem Kurvenbogen und seiner Sehne erhält man, wenn man die Krümmungsradien in den Endpunkten des Bogens einführt. Zunächst stellen wir einige Formeln auf für den Fall, daß die Bogenlänge s als unabhängige Veränderliche gewählt worden ist, nach der differenziert wird. Nach (4) in Nr. 257 und nach (9) in Nr. 260 kommt nämlich dann:

$$(1)\qquad x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1, \quad x''^2 + y''^2 + z''^2 = \frac{1}{R^2}.$$

Differentiation dieser Gleichungen gibt:

$$(2)\qquad x'x'' + y'y'' + z'z'' = 0, \quad x''x''' + y''y''' + z''z''' = \frac{1}{2}\frac{d\frac{1}{R^2}}{ds}.$$

---

1) Ist x die unabhängige Veränderliche, so verhalten sich λ, μ, ν zueinander wie $y'z'' - z'y''$, $-z''$ und y'', woraus die in der dritten Anmerkung zu S. 248 aufgestellte Behauptung folgt.

Differenzieren wir die erste Gleichung (2) noch einmal, so erhalten wir mit Rücksicht auf die zweite Gleichung (1):

$$x'x''' + y'y''' + z'z''' = -\frac{1}{R^2}, \tag{3}$$

und abermalige Differentiation dieser Gleichung gibt wegen der zweiten Gleichung (2):

$$x'x^{\mathrm{IV}} + y'y^{\mathrm{IV}} + z'z^{\mathrm{IV}} = -\frac{3}{2}\frac{d\frac{1}{R^2}}{ds}. \tag{4}$$

Sind nun $\varDelta x$, $\varDelta y$, $\varDelta z$ diejenigen Zunahmen von x, y, z, die zur Zunahme $\varDelta s$ von s gehören, und haben x, y, z in dem Intervalle von s bis $s + \varDelta s$ nebst ihren Ableitungen nach s bis zur fünften Ordnung bestimmte endliche Werte, so ist nach Satz 19 in Nr. 112:

$$\frac{\varDelta x}{\varDelta s} = x' + \tfrac{1}{2}x''\varDelta s + \tfrac{1}{6}x'''\varDelta s^2 + \tfrac{1}{24}x^{\mathrm{IV}}\varDelta s^3 + \xi,$$

$$\frac{\varDelta y}{\varDelta s} = y' + \tfrac{1}{2}y''\varDelta s + \tfrac{1}{6}y'''\varDelta s^2 + \tfrac{1}{24}y^{\mathrm{IV}}\varDelta s^3 + \eta,$$

$$\frac{\varDelta z}{\varDelta s} = z' + \tfrac{1}{2}z''\varDelta s + \tfrac{1}{6}z'''\varDelta s^2 + \tfrac{1}{24}z^{\mathrm{IV}}\varDelta s^3 + \zeta,$$

wobei ξ, η, ζ mit $\varDelta s$ in der vierten Ordnung gleich Null werden. Quadrieren und Addieren gibt mit Rücksicht auf (1), (2), (3) und (4):

$$\frac{\varDelta x^2 + \varDelta y^2 + \varDelta z^2}{\varDelta s^2} = 1 - \tfrac{1}{12}\cdot\frac{1}{R^2}\varDelta s^2 - \tfrac{1}{24}\cdot\frac{d\frac{1}{R^2}}{ds}\varDelta s^3 + \varepsilon,$$

wobei ε mit $\varDelta s$ in der vierten Ordnung gleich Null wird. Da das Quadrat von

$$1 - \tfrac{1}{24}\cdot\frac{1}{R^2}\varDelta s^2 - \tfrac{1}{48}\cdot\frac{d\frac{1}{R^2}}{ds}\varDelta s^3$$

bis zur dritten Potenz von $\varDelta s$ dieselbe Form wie die rechte Seite hat, so kommt:

$$\frac{\sqrt{\varDelta x^2 + \varDelta y^2 + \varDelta z^2}}{\varDelta s} = 1 - \tfrac{1}{24}\cdot\frac{1}{R^2}\varDelta s^2 - \tfrac{1}{48}\cdot\frac{d\frac{1}{R^2}}{ds}\varDelta s^3 + \eta,$$

wobei die Wurzel positiv ist und η mit $\varDelta s$ in der vierten Ordnung gleich Null wird. Die Wurzel stellt den absoluten Betrag $\mathfrak{s}$ der zum Bogen $\varDelta s$ gehörigen *Sehne* dar, so daß sich ergibt:

(5) $$\Delta s - \mathfrak{s} = \tfrac{1}{24} \cdot \frac{1}{R^2} \Delta s^3 + \tfrac{1}{48} \cdot \frac{d \frac{1}{R^2}}{ds} \Delta s^4 + \vartheta,$$

wobei ϑ mit Δs in der fünften Ordnung gleich Null wird. Nun zeigt (9) in Nr. 260, daß $1 : R^2$ unter den gemachten Voraussetzungen nach Satz 19 in Nr. 112 entwickelt werden kann. Ist R_1 der Krümmungsradius an der zu $s + \Delta s$ gehörigen Kurvenstelle, so gibt diese Entwicklung:

$$\frac{1}{R_1{}^2} = \frac{1}{R^2} + \frac{d \frac{1}{R^2}}{ds} \Delta s + \theta,$$

wobei θ mit Δs in der zweiten Ordnung gleich Null wird, also auch:

$$\frac{d \frac{1}{R^2}}{ds} = \frac{\frac{1}{R_1{}^2} - \frac{1}{R^2}}{\Delta s} - \frac{\theta}{\Delta s},$$

so daß die Substitution dieses Wertes in (5) liefert:

(6) $$\Delta s - \mathfrak{s} = \tfrac{1}{48} \left(\frac{1}{R^2} + \frac{1}{R_1{}^2} \right) \Delta s^3 + \varkappa,$$

wobei $\varkappa$ mit Δs in mindestens *fünfter* Ordnung gleich Null wird. Die linke Seite dieser Gleichung ist die *Differenz zwischen der Bogenlänge und der zugehörigen Sehne;* insbesondere ergibt sich:

(7) $$\lim_{\Delta s = 0} \frac{\Delta s - \mathfrak{s}}{\Delta s^3} = \frac{1}{24 R^2}.$$

266. Berührung zwischen Kurve und Fläche. Eine Fläche möge mit einer Kurve den Punkt M gemein haben. Wir sagen, daß die Kurve die Fläche in M berührt, wenn die Tangente der Kurve in M zugleich eine Tangente der Fläche in M ist, die Kurventangente also in der Tangentenebene des Flächenpunktes M liegt. Wir wählen nun, falls wirklich die Kurve die Fläche in M berührt, einen Punkt M' auf der Kurve in der Umgebung von M und fällen von ihm das Lot $M'Q$ auf die Tangentenebene. Siehe Fig. 60. Dieses Lot treffe die Fläche in dem ebenfalls in der Umgebung von M gelegenen Punkte M_1' und habe auf der Tangenten-

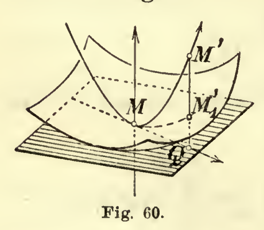


Fig. 60.

ebene den Fußpunkt Q. Wir sagen, *daß die Kurve die Fläche in M insbesondere in der r^{ten} Ordnung berühre, wenn*

$$(1) \qquad \lim_{MQ=0} \frac{M_1'M'}{MQ^{r+1}}$$

endlich und von Null verschieden ist.

Um diese Definition analytisch zu formulieren, wollen wir annehmen, die Fläche sei durch eine Gleichung:

$$(2) \qquad F(x, y, z) = 0$$

gegeben. Die Richtungskosinus der Normale des Flächenpunktes M oder (x, y, z) bezeichnen wir wie in Nr. 253 mit X, Y, Z, so daß:

$$(3) \qquad X(\mathfrak{x} - x) + Y(\mathfrak{y} - y) + Z(\mathfrak{z} - z) = 0$$

in den laufenden Koordinaten $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ die Tangentenebene des Punktes darstellt. Die Kurve sei mittels einer Hilfsveränderlichen t gegeben:

$$(4) \qquad x = \varphi(t), \quad y = \chi(t), \quad z = \psi(t).$$

Für einen gewissen Wert t sollen diese Gleichungen die Koordinaten jenes Punktes M angeben. Zum Werte $t + \Delta t$ gehöre der Punkt M' oder $(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$ der Kurve. Der Fußpunkt Q des Lotes von ihm auf die Tangentenebene von M habe die Koordinaten ξ, η, ζ. Alsdann ist nach (3):

$$X(\xi - x) + Y(\eta - y) + Z(\zeta - z) = 0,$$

während $\xi - (x + \Delta x)$, $\eta - (y + \Delta y)$, $\zeta - (z + \Delta z)$ den Richtungskosinus X, Y, Z proportional sind, so daß wir schreiben können:

$$\xi = x + \Delta x + uX, \quad \eta = y + \Delta y + uY, \quad \zeta = z + \Delta z + uZ\cdot$$

Setzen wir diese Werte in die letzte Gleichung ein, so ergibt sich für die Bestimmung der Hilfsgröße u, da $X^2 + Y^2 + Z^2 = 1$ ist:

$$X\Delta x + X\Delta y + Z\Delta z + u = 0, \text{ d.h. } u = -(X\Delta x + Y\Delta y + Z\Delta z).$$

Das Quadrat der Strecke MQ ist gleich der Summe der Quadrate von $\xi - x$, $\eta - y$ und $\zeta - z$, d. h.:

$$MQ^2 = (\Delta x + uX)^2 + (\Delta y + uY)^2 + (\Delta z + uZ)^2$$
$$= \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 + 2u(X\Delta x + Y\Delta y + Z\Delta z) + u^2$$

oder, wenn der gefundene Wert von u eingesetzt wird:

$$(5) \quad MQ^2 = (Y\Delta z - Z\Delta y)^2 + (Z\Delta x - X\Delta z)^2 + (X\Delta y - Y\Delta x)^2.$$

Das Lot $M'Q$ trifft die Fläche (2) in einem Punkte M_1', dessen Koordinaten $x + \Delta_1 x$, $y + \Delta_1 y$, $z + \Delta_1 z$ seien. Einerseits muß:

$$(6) \qquad F(x + \Delta_1 x,\ y + \Delta_1 y,\ z + \Delta_1 z) = 0$$

sein, weil der Punkt M_1' auf der Fläche liegen soll, und andererseits muß $M_1'M'$ der Normale von M parallel sein, d. h. es müssen die Koordinatendifferenzen von M_1' und M', nämlich $\Delta_1 x - \Delta x$, $\Delta_1 y - \Delta y$, $\Delta_1 z - \Delta z$, proportional X, Y, Z sein. Wir setzen deshalb:

$$\Delta_1 x - \Delta x = vX, \quad \Delta_1 y - \Delta y = vY, \quad \Delta_1 z - \Delta z = vZ$$

und erhalten alsdann aus (6):

$$(7) \quad F(x + \Delta x + vX,\ y + \Delta y + vY,\ z + \Delta z + vZ) = 0$$

als Bedingung für die Hilfsgröße v. Das Quadrat der Strecke $M_1'M'$ ist:

$$(8) \quad \begin{aligned} M_1'M'^2 &= (\Delta_1 x - \Delta x)^2 + (\Delta_1 y - \Delta y)^2 + (\Delta_1 z - \Delta z)^2 \\ &= v^2 (X^2 + Y^2 + Z^2) = v^2. \end{aligned}$$

Wenn nun die Funktion φ mit ihrer ersten Ableitung in der Umgebung des zu M gehörigen Wertes t bestimmte endliche Werte hat, so ist nach dem Mittelwertsatze 3 in Nr. 28

$$\Delta x = \varphi(t + \Delta t) - \varphi(t) = \Delta t \cdot \varphi'(t + \theta_1 \Delta t),$$

wo θ_1 einen positiven echten Bruch bedeutet. Analog wird:

$$\Delta y = \Delta t \cdot \chi'(t + \theta_2 \Delta t), \quad \Delta z = \Delta t \cdot \psi'(t + \theta_3 \Delta t),$$

falls für χ und ψ dieselben Voraussetzungen gemacht werden, also:

$$Y\Delta z - Z\Delta y = \Delta t [Y\psi'(t + \theta_3 \Delta t) - Z\chi'(t + \theta_2 \Delta t)],$$

und analoge Werte gehen für $Z\Delta x - X\Delta z$ und $X\Delta y - Y\Delta x$ hervor. Wenn $\varphi'(t)$, $\chi'(t)$ und $\psi'(t)$ an der Stelle t überdies stetig sind, so folgt hieraus, daß wenigstens eine der drei Differenzen $Y\Delta z - Z\Delta y$, $Z\Delta x - X\Delta z$ und $X\Delta y - Y\Delta x$ mit Δt in gerade erster Ordnung verschwindet, wenn nicht alle drei Differenzen $Y\psi' - Z\chi'$, $Z\varphi' - X\psi'$ und $X\chi' - Y\varphi'$ an der Stelle t gleich Null sind. Sie könnten jedoch nur dann alle drei gleich Null sein, wenn entweder φ', χ', ψ' alle

drei gleich Null wären, d. h. M ein singulärer Punkt der Kurve wäre (was wir ausschließen), oder wenn φ', χ', ψ' proportional X, Y, Z wären, was aber nicht eintritt, weil φ', χ', ψ' proportional den Richtungskosinus der Kurventangente sind, die zur Flächennormale senkrecht ist. Also folgt aus (5), daß MQ mit Δt in der ersten und nicht in höherer Ordnung verschwindet. *Nach* (1) *tritt demnach eine Berührung in gerade* r^{ter} *Ordnung ein, wenn* $M_1'M'$ *mit* Δt *gerade in der* $(r+1)^{ten}$ *Ordnung verschwindet.*

Wir haben hiernach den Ausdruck für $M_1'M'$ zu betrachten, der nach (8) gleich v ist. Dabei wird v durch die Bedingung (7) bestimmt. Wir wollen darin vorläufig $x+\Delta x$, $y+\Delta y$, $z+\Delta z$, d. h. die Koordinaten des Kurvenpunktes M', mit $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ bezeichnen, so daß wir statt (7) haben:

$$F(\mathfrak{x}+vX,\ \mathfrak{y}+vY,\ \mathfrak{z}+vZ)=0.$$

Nehmen wir nun an, daß die Funktion $F(x, y, z)$ in der Umgebung des Wertsystems x, y, z nebst ihren ersten partiellen Ableitungen stetig sei, so läßt sich, wenn $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z})$ und $(\mathfrak{x}+vX$, $\mathfrak{y}+vY$, $\mathfrak{z}+vZ)$ in dieser Umgebung liegen, die letzte Gleichung nach Satz 28 in Nr. 137 so schreiben:

$$0=F(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z})+v\,[XF_{\mathfrak{x}}+YF_{\mathfrak{y}}+ZF_{\mathfrak{z}}]_{\mathfrak{x}+\theta vX,\ \mathfrak{y}+\theta vY,\ \mathfrak{z}+\theta vZ}.$$

Dabei bedeuten $F_{\mathfrak{x}}, F_{\mathfrak{y}}, F_{\mathfrak{z}}$ in der Klammer die partiellen Ableitungen von $F(\mathfrak{x}, \mathfrak{z}, \mathfrak{y})$ für den Fall, daß $\mathfrak{x}$ durch $\mathfrak{x}+\theta vX$ usw. ersetzt wird. Ferner ist θ ein positiver echter Bruch. Beim Grenzübergange für $\lim v=0$ ergibt sich hieraus, daß $F(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z})$ gerade in erster Ordnung mit v verschwindet, falls $XF_{\mathfrak{x}}+YF_{\mathfrak{y}}+ZF_{\mathfrak{z}}$ endlich und von Null verschieden ist. Daß diese Summe in der Tat nicht verschwindet und endlich ist, folgt aber so: Beim Grenzübergange für $\lim \Delta t=0$ gehen $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ oder $x+\Delta x$ usw. in x, y, z über, so daß jene Summe dann gleich $XF_x+YF_y+ZF_z$ oder nach (8) in Nr. 253 gleich der Quadratwurzel aus $F_x^2+F_y^2+F_z^2$ wird, die nicht verschwindet, weil der Punkt M oder (x, y, z) der Fläche, wie wir voraussetzen, nicht singulär ist, also F_x, F_y und F_z nicht alle drei gleich Null sind. Wir haben also erkannt, daß

$$F(x+\Delta x,\ y+\Delta y,\ z+\Delta z)$$

mit v gerade in erster Ordnung gleich Null wird. Da v die Strecke $M_1'M'$ bedeutet, folgt also:

Satz 3: Wird die Fläche $F(x, y, z) = 0$ in ihrem Punkte M oder (x, y, z) von der Kurve:

$$x = \varphi(t), \quad y = \chi(t), \quad z = \psi(t)$$

berührt und gehört zu diesem Berührungspunkte der Wert t der unabhängigen Veränderlichen, so ist die Berührung von gerade r^{ter} Ordnung, wenn der Ausdruck

$$F(x + \Delta x,\ y + \Delta y,\ z + \Delta z),$$

worin:

$$x + \Delta x = \varphi(t + \Delta t), \quad y + \Delta y = \chi(t + \Delta t), \quad z + \Delta z = \psi(t + \Delta t)$$

ist, mit Δt gerade in der $(r + 1)^{\text{ten}}$ Ordnung verschwindet. Dabei wird vorausgesetzt, daß der Punkt M weder für die Fläche noch für die Kurve singulär sei, daß ferner die Funktionen φ, χ, ψ nebst ihren ersten Ableitungen in der Umgebung des betrachteten Wertes t stetig seien und außerdem auch die Funktiou F nebst ihren ersten partiellen Ableitungen in der Umgebung des zu M gehörigen Wertsystems x, y, z stetig sei.

Will man den Satz anwenden, so muß man für $F(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$ die Taylorsche Entwicklung benutzen, d. h. voraussetzen, daß F nebst den Ableitungen bis zur $(r + 1)^{\text{ten}}$ Ordnung in der Umgebung der Stelle M stetig sei. Alsdann ergibt sich nach Satz 28 in Nr. 137, da F an der Stelle M verschwindet:

$$(10)\quad \left\{\begin{aligned} F(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) &= \frac{1}{1!}(F_x \Delta x + F_y \Delta y + F_z \Delta z) \\ &+ \frac{1}{2!}\{F_x \Delta x + F_y \Delta y + F_z \Delta z\}^2 + \cdots \\ &+ \frac{1}{r!}\{F_x \Delta x + F_y \Delta y + F_z \Delta z\}^r \\ &+ \frac{1}{(r+1)!}\{F_x \Delta x + F_y \Delta y + F_z \Delta z\}^{r+1}_{x+\theta\Delta x,\ y+\theta\Delta y,\ z+\theta\Delta z}, \end{aligned}\right.$$

wobei die geschweiften Klammern *symbolisch* zu verstehen sind, wie es in Nr. 137 auseinandergesetzt wurde. Ferner werde vorausgesetzt, daß φ, χ, ψ in der Umgebung von t nebst ihren Ableitungen bis zur $(r + 1)^{\text{ten}}$ Ordnung bestimmte endliche Werte haben, so daß nach Satz 19 in Nr. 112:

$$\Delta x = \varphi'(t)\frac{\Delta t}{1} + \varphi''(t)\frac{\Delta t^2}{1\cdot 2} + \cdots + \varphi^{(r)}(t)\frac{\Delta t^r}{r!} + \varphi^{(r+1)}(t+\theta_1 \Delta t)\frac{\Delta t^{r+1}}{(r+1)!}$$

wird und analoge Formeln für Δy und Δz bestehen. Diese Werte von Δx, Δy, Δz sind in (10) einzusetzen, wodurch sich rechts in (10) eine Entwicklung nach Potenzen von Δt bis zur $(r+1)^{\text{ten}}$ ergibt. *Die Bedingungen der Berührung in mindestens r^{ter} Ordnung sind dann diejenigen Gleichungen, die durch Nullsetzen der Koeffizienten von Δt, $\Delta t^2, \ldots \Delta t^r$ hervorgehen*

Insbesondere ergibt sich für eine Berührung von mindestens *erster* Ordnung die Bedingung:

$$F_x\varphi' + F_y\chi' + F_z\psi' = 0, \tag{11}$$

die schon erfüllt ist, weil wir voraussetzen, daß die Tangente des Kurvenpunktes M in der Tangentenebene des Flächenpunktes M liege. Soll die Berührung von mindestens *zweiter* Ordnung sein, so muß außerdem:

$$\tag{12} \begin{cases} F_x\varphi'' + F_y\chi'' + F_z\psi'' + F_{xx}\varphi'^2 + F_{yy}\chi'^2 + F_{zz}\psi'^2 + \\ \qquad + 2(F_{yz}\chi'\psi' + F_{zx}\psi'\varphi' + F_{xy}\varphi'\chi') = 0 \end{cases}$$

sein. Soll die Berührung von mindestens *dritter* Ordnung sein, so tritt noch die Bedingung hinzu:

$$\tag{13} \begin{cases} F_x\varphi''' + F_y\chi''' + F_z\psi''' + 3(F_{xx}\varphi'\varphi'' + F_{yy}\chi'\chi'' + F_{zz}\psi'\psi'') + \\ \quad + 3[F_{yz}(\chi'\psi'' + \psi'\chi'') + F_{zx}(\psi'\varphi'' + \varphi'\psi'') + F_{xy}(\varphi'\chi'' + \chi'\varphi'')] \\ \quad + F_{xxx}\varphi'^3 + F_{yyy}\chi'^3 + F_{zzz}\psi'^3 + 6F_{xyz}\varphi'\chi'\psi' + \\ \quad + 3[F_{yyz}\chi'^2\psi' + F_{yzz}\chi'\psi'^2 + F_{zzx}\psi'^2\varphi' + F_{zxx}\psi'\varphi'^2 + \\ \qquad\qquad + F_{xxy}\varphi'^2\chi' + F_{xyy}\varphi'\chi'^2] = 0. \end{cases}$$

267. Oskulierende Flächen bei einer Raumkurve. Ist außer der Kurve:

$$x = \varphi(t), \quad y = \chi(t), \quad z = \psi(t)$$

nicht nur *eine* Fläche, sondern eine *Flächenschar* durch eine Gleichung

$$F(x, y, z, a_1, a_2, \ldots a_n) = 0 \tag{1}$$

gegeben, die n willkürliche Konstanten $a_1, a_2, \ldots a_n$ enthält, so können wir einen zu einem bestimmten Werte t gehörigen

nicht singulären Punkt M der Kurve ins Auge fassen und uns die Konstanten $a_1, a_2, \ldots a_n$ so gewählt denken, daß die Koordinaten x, y, z dieses Punktes die Gleichung (1) erfüllen. Da dann (1) nur *eine* Bedingung für die n Konstanten ist, so werden $n-1$ Konstanten willkürlich bleiben. Verlangen wir, daß die Kurve in dem Punkte M von Flächen der Schar in erster Ordnung berührt werden soll, so tritt die Bedingung (11) der vorigen Nummer hinzu; fordern wir Berührung in zweiter Ordnung, so tritt noch die Bedingung (12) der vorigen Nummer hinzu, usw. Verlangen wir allgemein eine Berührung in r^{ter} Ordnung, so treten zu (1) noch r Bedingungen hinzu. Kann man r so groß wählen, daß durch alle $r+1$ Bedingungen gerade alle n Konstanten $a_1, a_2, \ldots a_n$ bestimmt werden, so gibt es gerade eine Fläche der Schar, die mit der Kurve an der Stelle M eine Berührung von der höchsten möglichen Ordnung eingeht. Diese Fläche heißt die *oskulierende Fläche.* Man darf *im allgemeinen* erwarten, daß $r+1=n$, also die höchste Ordnung der Berührung die $(n-1)^{\text{te}}$ sein wird.

268. Die Schmiegungsebene als Oskulationsebene. Wir wenden diese Theorie auf den Fall an, daß die Flächenschar aus allen *Ebenen* besteht, fragen also nach derjenigen Ebene, die durch den Punkt M oder (x, y, z) der Kurve:

$$x = \varphi(t), \quad y = \chi(t), \quad z = \psi(t) \tag{1}$$

geht und dort mit der Kurve eine Berührung von möglichst hoher Ordnung hat. Da eine Ebene von drei wesentlichen Bestimmungsstücken abhängt, so darf man erwarten, daß diese Ordnung die *zweite* sein wird. Dies bestätigt die Rechnung:

Wenn wir *alle* Ebenen ins Auge fassen wollen, auch die durch den Anfangspunkt gehenden, so müssen wir die Ebenengleichung mit *vier* willkürlichen Konstanten a_1, a_2, a_3, a_4 versehen:

$$a_1\mathfrak{x} + a_2\mathfrak{y} + a_3\mathfrak{z} + a_4 = 0. \tag{2}$$

Allerdings kommen für die Bestimmung der Ebene nur die *drei* Verhältnisse der Konstanten in Betracht. Wir werden zunächst verlangen, daß der Punkt (x, y, z) auf der Ebene liege:

$$a_1x + a_2y + a_3z + a_4 = 0. \tag{3}$$

Wenn wir $a_1 x + a_2 y + a_3 z + a_4$ für F in die Gleichungen (11) und (12) von Nr. 266 einsetzen und φ, χ, ψ wie in (1) mit x, y, z bezeichnen, so ergeben sich die übrigen Bedingungen für eine Berührung in mindestens zweiter Ordnung:

$$(4) \qquad a_1 x' + a_2 y' + a_3 z' = 0, \quad a_1 x'' + a_2 y'' + a_3 z'' = 0.$$

Sie bestimmen die Verhältnisse der drei Konstanten a_1, a_2, a_3, sobald nicht alle drei Größen

$$(5) \qquad y'z'' - z'y'', \quad z'x'' - x'z'', \quad x'y'' - y'x''$$

gleich Null sind, und (3) gibt alsdann noch die Verhältnisse von a_4 zu a_1, a_2, a_3. Elimination von a_1, a_2, a_3, a_4 aus (2), (3), (4) liefert die Gleichung der oskulierenden Ebene in den laufenden Koordinaten $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ in der Form:

$$(6) \qquad \begin{vmatrix} \mathfrak{x} - x & \mathfrak{y} - y & \mathfrak{z} - z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix} = 0.$$

Nach (9) in Nr. 264 ist die Normale dieser Ebene zur Binormale der Kurve parallel und die Ebene folglich die *Schmiegungsebene.*

Im allgemeinen wird sie die Kurve nicht in noch höherer als zweiter Ordnung berühren, denn es müßte sonst noch mindestens die Bedingung (13) in Nr. 266 erfüllt sein, die hier so lauten würde:

$$(7) \qquad a_1 x''' + a_2 y''' + a_3 z''' = 0.$$

Es gibt nur dann endliche und nicht sämtlich verschwindende Werte von a_1, a_2, a_3, die den drei Gleichungen (4) und (7) genügen, wenn ihre Determinante gleich Null ist. Indem wir noch daran erinnern, daß die Werte (5) für einen regulären Kurvenpunkt nach Nr. 261 nicht sämtlich gleich Null sind, kommen wir zu dem Ergebnisse:

Satz 4: Ist der zu einem bestimmten Werte t gehörige Punkt der Kurve:

$$x = \varphi(t), \quad y = \chi(t), \quad z = \psi(t)$$

nicht singulär, so geht von allen Ebenen, die diesen Punkt enthalten, die Schmiegungsebene dort eine Berührung von höchster

Ordnung mit der Kurve ein. Die Ordnung ist im allgemeinen gleich zwei; sie ist nur dann größer als zwei, wenn die Determinante

$$\begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix}$$

an der betrachteten Stelle verschwindet.

269. Die Schmiegungsebene als Grenzlage. Es gilt der

Satz 5: Wenn der zu t gehörige Punkt M der Kurve:

$$x = \varphi(t), \quad y = \chi(t), \quad z = \psi(t)$$

nicht singulär ist und φ, χ, ψ in der Umgebung von t nebst ihren Ableitungen bis zur dritten Ordnung einschließlich bestimmt und endlich sind, so ist die Schmiegungsebene von M die Grenzlage der Ebene durch die Tangente von M und einen Kurvenpunkt M_1 in der Umgebung von M für den Fall, daß M_1 auf der Kurve nach M rückt.

Zum Beweise nehmen wir an, der Punkt M_1 habe Koordinaten x_1, y_1, z_1, die zu dem Werte $t + h$ gehören. Eine Ebene durch M:

$$a_1(\mathfrak{x} - x) + a_2(\mathfrak{y} - y) + a_3(\mathfrak{z} - z) = 0$$

enthält die Tangente von M, wenn:

$$a_1 x' + a_2 y' + a_3 z' = 0$$

ist, und geht durch M_1, wenn:

$$a_1(x_1 - x) + a_2(y_1 - y) + a_3(z_1 - z) = 0$$

ist, so daß ihre Gleichung durch Determinantenbildung in der Form:

$$\begin{vmatrix} \mathfrak{x} - x & \mathfrak{y} - y & \mathfrak{z} - z \\ x' & y' & z' \\ x_1 - x & y_1 - y & z_1 - z \end{vmatrix} = 0$$

hervorgeht. Hierbei ist nach Satz 19 in Nr. 112:

$$x_1 - x = \varphi(t + h) - \varphi(t) = h\varphi'(t) + \tfrac{1}{2}h^2\varphi''(t + \theta_1 h),$$

worin θ_1 einen positiven echten Bruch bedeutet. Entsprechende Werte gehen für $y_1 - y$ und $z_1 - z$ hervor. Subtrahieren wir

von der letzten Zeile der Determinante das h-fache der vorhergehenden und multiplizieren wir sie dann mit $2:h^2$, so wird $\varphi''(t+\theta_1 h)$ ihr erstes Glied. Nach Satz 1 in Nr. 27 ist aber φ'' stetig, so daß dies Glied beim Grenzübergange für $\lim h = 0$ gleich $\varphi''(t)$ oder x'' wird. Ebenso wird y'' und z'' das zweite bzw. dritte Glied. Wir gelangen folglich in der Tat zu der in Nr. 268 gefundenen Gleichung (6) der Schmiegungsebene.

§ 4. Torsion einer Raumkurve.

270. Die drei sphärischen Indikatrizen. Wie in Nr. 260 benutzen wir, siehe Fig. 61, die Kugel mit dem Radius Eins, deren Mitte der Anfangspunkt O ist, und ziehen von ihrer Mitte O aus diejenigen drei Radien OM, OM_1 und OM_2, die der positiven Tangente, Haupt- und Binormale des Punktes M der Raumkurve gleichsinnig parallel sind. Durchläuft M einen Bogen MM' der Raumkurve, so durchlaufen M, M_1 und M_2 drei Bogen MM', M_1M_1' und M_2M_2' von Kurven auf der Kugel, von denen die erste nach Nr. 260 die *sphärische Indikatrix der Tangenten* heißt. Die beiden andern werden die *sphärischen Indikatrizen der Haupt- und Binormalen* genannt. Die drei zusammengehörigen Punkte M, M_1 und M_2 sind stets die Ecken eines gleichseitigen rechtwinkligen sphärischen Dreiecks. Wir wollen uns insbesondere mit der sphärischen Indikatrix der Binormalen beschäftigen. Wenn wir mit λ, μ, ν wie in Nr. 264 die Richtungskosinus der positiven Binormale bezeichnen, so sind λ, μ, ν zugleich die Koordinaten des Punktes M_2 der Indikatrix der Binormalen. Wird bei der Raumkurve die Bogenlänge s als unabhängige Veränderliche gewählt, so wird auch diese Indikatrix mittels der Hilfsveränderlichen s dargestellt, so daß die Ableitungen λ', μ', ν' nach s den Richtungskosinus der *Tangente* dieser Indikatrix proportional sind.

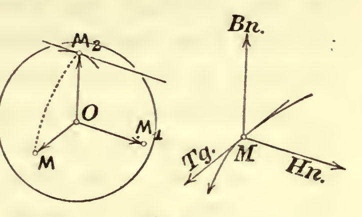


Fig. 61.

Nun gelten nach Nr. 264 die Gleichungen:

$$l\lambda + m\mu + n\nu = 0, \quad \alpha\lambda + \beta\mu + \gamma\nu = 0, \quad \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 1,$$

von denen die erste, da l, m, n nach (3) in Nr. 261 und (1) in Nr. 259 zu α', β', γ' proportional sind, durch:

$$\alpha'\lambda + \beta'\mu + \gamma'\nu = 0$$

ersetzt werden kann, so daß die zweite und dritte nach s differenziert mit Rücksicht hierauf ergeben:

$$\alpha\lambda' + \beta\mu' + \gamma\nu' = 0, \quad \lambda\lambda' + \mu\mu' + \nu\nu' = 0,$$

woraus nach (8) in Nr. 264 folgt:

$$(1) \qquad \lambda' : \mu' : \nu' = l : m : n.$$

Die Tangente der Indikatrix der Binormalen ist somit zur Hauptnormale von M oder also zu OM_1 parallel.

Wir haben der Indikatrix der Tangenten in Nr. 260 denjenigen positiven Sinn beigelegt, in dem sie durchwandert wird, wenn M die Raumkurve im positiven Sinne durchläuft. Bei der Indikatrix der Binormalen dagegen werden wir den positiven Sinn davon abhängig machen, wie die Tangente der Indikatrix in M_2 zum zugehörigen Punkte M der Indikatrix der Tangenten liegt. Ein von O aus auf die Kugel blickender Beobachter sieht den Punkt M_2, wenn M auf der Raumkurve weiter wandert, eine Richtung senkrecht zum Bogen MM_2 eines größten Kugelkreises einschlagen. Ist der Sinn dieser Bewegung von M_2 um M herum derselbe, wie der positive Drehsinn der xy-Ebene, von der positiven z-Achse aus betrachtet, so soll die Forschreitung auf der Indikatrix der Binormalen positiv angenommen werden, sonst negativ. Diese Vorschrift werden wir später in den Formeln zum Ausdrucke bringen.

271. Torsion. Die Raumkurve werde von M nach M' im positiven Sinne durchlaufen, so daß ein positiver Bogen Δs zurückgelegt wird und die Koordinaten x, y, z von M um Δx, Δy, Δz wachsen. Der Bogen M_2M_2', den dabei der zugehörige Punkt der Indikatrix der Binormalen beschreibt, sei gleich $\Delta\tau$, gemessen mit demjenigen Vorzeichen, das der soeben gegebenen Vorschrift entspricht. Der Bruch $\Delta\tau : \Delta s$ heißt alsdann die *mittlere Torsion des Bogens MM' der Raumkurve.*

Er hat, wie wir sehen werden, für $\lim \Delta s = 0$ einen Grenzwert $d\tau : ds$, den wir die *Torsion der Raumkurve an der Stelle M* nennen.

Zum Nachweise dieses Grenzwertes verfahren wir wie in Nr. 260. Es ist:

$$\frac{\Delta\tau}{\Delta s} = \frac{\Delta\tau}{\text{Sehne } \mathsf{M}_2\mathsf{M}_2'} \cdot \frac{\text{Sehne } \mathsf{M}_2\mathsf{M}_2'}{\text{Sehne } MM'} : \frac{\Delta s}{\text{Sehne } MM'}.$$

An die Stelle von $\sigma, \alpha, \beta, \gamma$ in Nr. 260 treten hier τ, λ, μ, ν, während sonst alles beim Alten bleibt, so daß sich analog (2) in Nr. 260 für die Torsion der Wert ergibt:

$$\frac{d\tau}{ds} = \frac{\sqrt{\lambda'^2 + \mu'^2 + \nu'^2}}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}}, \tag{1}$$

sobald x, y, z nebst ihren ersten Ableitungen x', y', z' nach der Hilfsveränderlichen t und überdies λ, μ, ν nebst ihren ersten Ableitungen λ', μ', ν' nach t für den Punkt M stetig sind. Dies ist nach (9) in Nr. 264 der Fall, wenn M nicht singulär ist und x, y, z nebst ihren ersten, zweiten und dritten Ableitungen nach t an der betrachteten Stelle stetig sind. Die Quadratwurzel im Nenner von (1) ist positiv, dagegen die im Zähler positiv oder negativ, je nachdem die positive Richtung der Indikatrix der Binormalen in M_2 mit der Fortschreitungsrichtung von M_2 nach M_2' übereinstimmt oder nicht. Wie man dies Vorzeichen analytisch bestimmt, soll erst in Nr. 273 erörtert werden.

Der reziproke Wert der Torsion heißt der *Torsionsradius*; wir wollen ihn mit T bezeichnen. Ist die unabhängige Veränderliche insbesondere die Bogenlänge s der Raumkurve, so wird $x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1$ nach (4) in Nr. 257, so daß sich für die Torsion ergibt:

$$\frac{1}{T} = \frac{d\tau}{ds} = \sqrt{\left(\frac{d\lambda}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\mu}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\nu}{ds}\right)^2}. \tag{2}$$

Sie wird hier als eine Ableitung nach s dargestellt. Das Differential $d\tau$ heißt der *Torsionswinkel*; er ist zugleich das *Bogenelement der sphärischen Indikatrix der Binormalen.*

Wenn wir die Differentiation nach der Bogenlänge s durch Akzente bezeichnen, so wird der Kosinus λ nach (10) in Nr. 264 gleich $R(y'z'' - z'y'')$, also:

$$\lambda' = R'(y'z'' - z'y'') + R(y'z''' - z'y''').$$

Nach (1) in Nr. 270 sind λ', μ', ν' zu l, m, n proportional, so daß es eine Funktion ω von s derart gibt, daß nach (3) in Nr. 261:

$$(3) \qquad \lambda' = \omega x'', \quad \mu' = \omega y'', \quad \nu' = \omega z''$$

ist, woraus folgt:

$$\omega x'' = R'(y'z'' - z'y'') + R(y'z''' - z'y''').$$

Zyklische Vertauschung von x, y, z gibt zwei analoge Gleichungen. Multiplizieren wir die drei Gleichungen mit x'' bzw. y'' bzw. z'' und addieren sie dann, so geht wegen (4) in Nr. 261 und wegen $l^2 + m^2 + n^2 = 1$ hervor:

$$(4) \qquad \omega = -R^3 \begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix}.$$

Weil $\lambda'^2 + \mu'^2 + \nu'^2$ nach (3) gleich $\omega^2(x''^2 + y''^2 + z''^2)$, d. h. nach (4) in Nr. 261 gleich $\omega^2 : R^2$ ist, erhalten wir nach (2) für die Torsion den Wert:

$$(5) \qquad \frac{1}{T} = \frac{d\tau}{ds} = -\frac{1}{x''^2 + y''^2 + z''^2} \begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix}$$

oder:

$$(6) \qquad \frac{1}{T} = -R^2 \begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix}.$$

Hier ist das Minuszeichen gewählt worden; wir werden in der Tat in Nr. 273 zeigen, daß es nach den in Nr. 270 getroffenen Festsetzungen gewählt werden muß.

272. Die Frenetschen Formeln. Man nennt so diejenigen Formeln, die nach *Frenet* zeigen, wie sich die Ableitungen der Richtungskosinus der Tangente, Haupt- und Binormale nach der Bogenlänge s durch die Richtungskosinus selbst ausdrücken. Nach (1) in Nr. 259 ist $d\alpha : ds$ gleich $d^2x : ds^2$, d. h. nach (4) in Nr. 261 gleich $l : R$. So kommt überhaupt:

$$(1) \qquad \frac{d\alpha}{ds} = \frac{l}{R}, \quad \frac{d\beta}{ds} = \frac{m}{R}, \quad \frac{d\gamma}{ds} = \frac{n}{R}.$$

Die in voriger Nummer ω genannte Größe ist nach den dort gegebenen Gleichungen (4) und (6) gleich $R : T$, so daß die Gleichungen (3) von Nr. 271 geben:

$$(2) \qquad \frac{d\lambda}{ds} = \frac{l}{T}, \quad \frac{d\mu}{ds} = \frac{m}{T}, \quad \frac{d\nu}{ds} = \frac{n}{T}.$$

Aus (8) in Nr. 264 folgen nach (1) und (2) sofort durch Differentiation die Werte der Ableitungen von l, m, n nach s, ausgedrückt durch $\alpha, \beta, \gamma, \lambda, \mu, \nu, R$ und T. Wegen (6) und (7) in Nr. 264 ergeben sie:

$$(3) \quad \frac{dl}{ds} = -\frac{\alpha}{R} - \frac{\lambda}{T}, \quad \frac{dm}{ds} = -\frac{\beta}{R} - \frac{\mu}{T}, \quad \frac{dn}{ds} = -\frac{\gamma}{R} - \frac{\nu}{T}.$$

Da nach Nr. 260 der *Kontingenzwinkel* $d\sigma = ds : R$ und nach Nr. 271 der *Torsionswinkel* $d\tau = ds : T$ ist, lassen sich diese Frenetschen Formeln (1), (2) und (3) auch so schreiben:

$$(4) \qquad \frac{d\alpha}{d\sigma} = l, \quad \frac{d\beta}{d\sigma} = m, \quad \frac{d\gamma}{d\sigma} = n;$$

$$(5) \qquad \frac{d\lambda}{d\tau} = l, \quad \frac{d\mu}{d\tau} = m, \quad \frac{d\nu}{d\tau} = n;$$

$$(6) \quad dl = -\alpha d\sigma - \lambda d\tau, \quad dm = -\beta d\sigma - \mu d\tau, \quad dn = -\gamma d\sigma - \nu d\tau.$$

273. Vorzeichen der Torsion. Um nun zu beweisen, daß das in Formel (5) von Nr. 271 gewählte Vorzeichen der Torsion richtig ist, und zu erkennen, wie es die Kurve charakterisiert, wählen wir einen Kurvenpunkt M_0 als Anfangspunkt und sein begleitendes Dreikant als das Achsenkreuz, so daß für den Punkt M_0 insbesondere $\alpha_0 = 1$, $m_0 = 1$, $\nu_0 = 1$ wird und alle anderen Richtungskosinus gleich Null sind. Nach (1) in Nr. 259 und nach (4) in Nr. 261 gilt dann, wenn der Akzent die Differentiation nach der Bogenlänge bedeutet, für M_0:

$$x_0' = 1, \quad y_0' = 0, \quad z_0' = 0, \quad x_0'' = 0, \quad y_0'' = \frac{1}{R_0}, \quad z_0'' = 0.$$

Nach der Formel (6) in Nr. 271 ist ferner für M_0:

$$\frac{1}{T_0} = -R_0 z_0''', \quad \text{d. h.} \quad z_0''' = -\frac{1}{R_0 T_0}.$$

Sind nun x, y, z für die Kurvenpunkte in der Umgebung von M_0 nebst ihren Ableitungen bis zur dritten Ordnung stetige Funktionen der Bogenlänge s, so können wir x, y, z für eine

hinreichend kleine positive oder negative Zunahme Δs der Bogenlänge von M_0 an nach Satz 19, Nr. 112, entwickeln. Es kommt:

$$(1)\quad x = \Delta s + \cdots, \quad y = \frac{1}{2R_0}\Delta s^2 + \cdots, \quad z = -\frac{1}{6R_0T_0}\Delta s^3 + \cdots,$$

wobei die angegebenen ersten Glieder für hinreichend kleine Werte von $|\Delta s|$ nach Satz 22 in Nr. 115 für die Vorzeichen der rechten Seiten ausschlaggebend sind. R_0 ist nach Nr. 260 positiv. Die zweite Formel (1) lehrt daher, daß die Kurve in der Nähe von M_0 auf derjenigen Seite der Ebene durch die Tangente und Binormale verläuft, auf der die positive Hauptnormale liegt. Ist die *Torsion* $1:T_0$ von M_0 insbesondere *negativ*, so sind x und z für negatives Δs beide negativ, für positives Δs dagegen positiv. In M_0 durchsetzt also die Kurve die Schmiegungsebene von der negativen Seite her, sich aber doch ihr anschmiegend. Siehe Fig. 62, worin die Kurve mit c bezeichnet ist, während c' ihre Projektion in der Schmiegungsebene und c'' ihre Projektion in der Ebene der Tangente und Binormale ist.[1]

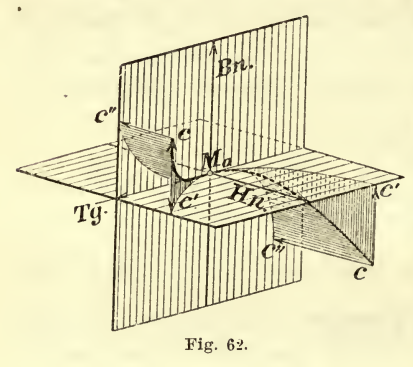


Fig. 62.

Die Kurve c'' hat in M_0 einen Wendepunkt. Ein in M_0 auf der Schmiegungsebene stehender und nach der positiven Hauptnormale blickender Beobachter sieht also die Kurve von der negativen Seite der Schmiegungsebene nach der positiven Seite ansteigen. Die Kurve ist daher in M_0 *rechts gewunden* (wie eine gewöhnliche Schraube), vorausgesetzt, daß die Drehung von der positiven Tangente zur positiven Hauptnormale hin,

---

1) Es dürfte nützlich sein, hier darauf hinzuweisen, daß wir uns die positive x-, y- und z-Achse besser nicht in der sonst in den deutschen und französischen Lehrbüchern gebräuchlichen Art orientiert denken, sondern so, wie in der obigen Figur die positive Tangente, Haupt- und Binormale. Nämlich nur bei dieser Orientierung liegt für jemanden, der die xy-Ebene von der positiven z-Achse her betrachtet, die positive y-Achse gegenüber der positiven x-Achse so, wie man es in der analytischen Geometrie der *Ebene* fast stets anzunehmen gewöhnt ist.

von der positiven Binormale aus betrachtet, dem Sinne der Uhrzeigerdrehung entgegengesetzt ist.

Wir konstruieren nun die zu M_0 gehörigen Punkte M und M_2 der sphärischen Indikatrizen der Tangenten und Binormalen. M liegt, weil M_0 Anfangspunkt ist, auf der positiven Tangente und M_2 auf der positiven Binormale. Nach (2) in Nr. 272 haben $d\lambda : ds$, $d\mu : ds$ und $d\nu : ds$ für M_0 die Werte 0, $1 : T_0$, 0. Da diese drei Ableitungen den Richtungskosinus der positiven Tangente der Indikatrix in M_2 proportional sind und in den Vorzeichen mit ihnen übereinstimmen, und da wir $1 : T_0$ negativ angenommen haben, so besteht wirklich die in Nr. 270 getroffene Festsetzung.

Wir heben zum Schlusse nochmals hervor: *Rechtsgewundene Kurven haben negative Torsion.*

274. Allgemeiner Ausdruck der Torsion. Ist die Raumkurve mittels einer beliebigen Hilfsveränderlichen t analytisch dargestellt, so ist, wenn die Akzente die Differentiation nach t andeuten:

$$(1)\qquad \begin{cases} \dfrac{dx}{ds} = \dfrac{x'}{s'}, \qquad \dfrac{d^2x}{ds^2} = \dfrac{1}{s'^2}x'' - \dfrac{s''}{s'^3}x', \\[2ex] \dfrac{d^3x}{ds^3} = \dfrac{1}{s'^3}x''' - \dfrac{3s''}{s'^4}x'' + \dfrac{3s''^2 - s's'''}{s'^5}x'. \end{cases}$$

Analoge Formeln gelten für die Ableitungen von y und z nach s. Die in (6), Nr. 271, auftretende Determinante, in der ja x', x'', x''' usw. die Ableitungen nach s bedeuteten, hat also den Wert:

$$\frac{1}{s'^6}\begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix},$$

worin jetzt die Ableitungen nach t auftreten. Da ferner R den in Nr. 260 unter (7) angegebenen Wert hat, in dem s'^3 im Zähler steht, so ergibt sich aus (6) in Nr. 271 als allgemeiner Ausdruck der Torsion:

$$(2)\qquad \frac{1}{T} = -\begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix} : [(y'z''-z'y'')^2 + (z'x''-x'z'')^2 + (x'y''-y'x'')^2].$$

275. Kurven von der Torsion Null. Wählen wir x selbst als unabhängige Veränderliche, so ist $x' = 1$, $x'' = 0$, $x''' = 0$. Die letzte Formel zeigt also, daß *die Torsion längs der ganzen Kurve gleich Null ist*, wenn bei dieser Annahme die Differenz $y''z''' - z''y'''$, folglich auch die Ableitung von $z'' : y''$ nach x gleich Null, daher $z'' : y''$ konstant, etwa gleich B, mithin $z'' - By''$ gleich Null ist. Dann aber ist $z' - By'$ konstant, etwa gleich A, also auch $z' - By' - A$ gleich Null, d. h. $z - By - Ax$ ebenfalls konstant, mithin schließlich:

$$z = Ax + By + C,$$

wo auch C eine Konstante bedeutet. Hier aber liegt die Gleichung einer Ebene vor, die Kurve ist demnach *eben*. Diese Schlußfolgerung wird unmöglich, wenn x selbst für die ganze Kurve konstant ist; dann aber liegt die Kurve ebenfalls in einer Ebene, nämlich in einer Ebene $x =$ konst.

Umgekehrt: Ist eine Raumkurve eben und liegt sie in der Ebene:

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

so gibt die Differentiation nach der Hilfsveränderlichen t:

$$Ax' + By' + Cz' = 0, \quad Ax'' + By'' + Cz'' = 0, \quad Ax''' + By''' + Cz''' = 0,$$

d. h. $1 : T = 0$ nach der Formel (2) der letzten Nummer. Also:

Satz 6: Diejenigen Kurven, die überall die Torsion Null haben, sind die ebenen Kurven.

Es sind dies die einzigen Kurven, bei denen alle Schmiegungsebenen dieselbe Stellung haben und also in eine Ebene, die der Kurve, zusammenfallen. Die nicht-ebenen Kurven heißen auch *Kurven doppelter Krümmung*, indem man ihre Torsion als ihre *zweite Krümmung* bezeichnet.

Aus unseren Betrachtungen folgt noch ein rein analytisches Ergebnis: Die in der Formel (2) der vorigen Nummer auftretende Determinante ist hiernach dann und nur dann gleich Null, wenn zwischen x, y, z eine lineare Gleichung mit konstanten Koeffizienten besteht. Also allgemein:

Satz 7: Sind x, y, z drei Funktionen von einer Veränderlichen, so ist die Determinante aus den ersten Ableitungen x', y', z', den zweiten Ableitungen x'', y'', z'' und den dritten Ableitungen

x''', y''', z''' dann und nur dann gleich Null, wenn eine lineare Gleichung:

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

mit konstanten Koeffizienten A, B, C, D besteht.

276. Die Schmiegungskugel. Unter allen Kugeln, die durch den Punkt M oder (x, y, z) einer Kurve gehen, wird es eine geben, die mit der Kurve in M eine Berührung von höchster Ordnung eingeht. Da die allgemeine Gleichung einer Kugel *vier* willkürliche Konstanten enthält, so ist nach Nr. 267 zu erwarten, daß die höchste Ordnung der Berührung die *dritte* sein wird. Dies ist, wie wir sogleich sehen werden, in der Tat der Fall. Die *oskulierende* Kugel heißt die *Schmiegungskugel* des Punktes M der Raumkurve, ihr Radius der *Schmiegungsradius*. Es seien $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ die Koordinaten der Kugelmitte, und es sei $\mathfrak{R}$ der Kugelradius. Die Kugel hat dann in den laufenden Koordinaten $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ die Gleichung:

$$(\mathfrak{x} - \bar{x})^2 + (\mathfrak{y} - \bar{y})^2 + (\mathfrak{z} - \bar{z})^2 = \mathfrak{R}^2.$$

Nach der in Nr. 266 gegebenen Methode setzen wir als erste Bedingung an:

$$(1) \qquad F = (x - \bar{x})^2 + (y - \bar{y})^2 + (z - \bar{z})^2 - \mathfrak{R}^2 = 0.$$

Die Gleichungen (11), (12) und (13) jener Nummer geben die drei übrigen Bedingungen für eine Berührung von mindestens dritter Ordnung:

$$(2) \qquad \begin{aligned} &(x-\bar{x})x' + (y-\bar{y})y' + (z-\bar{z})z' = 0, \\ &(x-\bar{x})x'' + (y-\bar{y})y'' + (z-\bar{z})z'' + x'^2 + y'^2 + z'^2 = 0, \\ &(x-\bar{x})x''' + (y-\bar{y})y''' + (z-\bar{z})z''' + 3(x'x'' + y'y'' + z'z'') = 0. \end{aligned}$$

Benutzen wir die Bogenlänge s der Kurve als unabhängige Veränderliche, so ist $x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1$, also $x'x'' + y'y'' + z'z'' = 0$, so daß die beiden letzten Gleichungen die Form annehmen:

$$(3) \qquad \begin{cases} (x - \bar{x})x'' + (y - \bar{y})y'' + (z - \bar{z})z'' = -1, \\ (x - \bar{x})x''' + (y - \bar{y})y''' + (z - \bar{z})z''' = 0. \end{cases}$$

Sobald für den betrachteten Kurvenpunkt M die Torsion $1 : T$ *nicht verschwindet*, ist nach (6) in Nr. 271 die Determinante der drei in $x-\bar{x}$, $y-\bar{y}$, $z-\bar{z}$ linearen Gleichungen (2) und (3) nicht gleich Null, vielmehr gleich $-1 : TR^2$, so daß sich durch Auflösen dieser Gleichungen ergibt:

(4) $$x - \bar{x} = - TR^2(y'z''' - z'y''') \quad \text{usw.}$$

Nach (4) in Nr. 261 ist aber $x'' = l : R$, daher $x''' = l' : R - lR' : R^2$, also nach (3) in Nr. 272:

$$x''' = -\frac{\alpha}{R^2} - \frac{\lambda}{RT} - \frac{lR'}{R^2}.$$

Entsprechende Werte gehen für y''', z''' hervor, so daß sich aus (4) mit Rücksicht auf (1) in Nr. 259, (8) und (6) in Nr. 264 für die Koordinaten des Mittelpunktes der Schmiegungskugel die Werte ergeben:

(5) $$\bar{x} = x + lR - \lambda R'T, \quad \bar{y} = y + mR - \mu R'T, \quad \bar{z} = z + nR - \nu R'T.$$

R' ist dabei die Ableitung von R nach der Bogenlänge. Nach (1) kommt ferner:

$$\Re^2 = (lR - \lambda R'T)^2 + (mR - \mu R'T)^2 + (nR - \nu R'T)^2,$$

woraus wegen der bekannten Beziehungen zwischen den Kosinus sofort folgt:

(6) $$\Re^2 = R^2 + R'^2 T^2.$$

Nach Nr. 263 geht die *Krümmungsachse* des Kurvenpunktes M durch den Krümmungsmittelpunkt, dessen Koordinaten $x + lR$, $y + mR$, $z + nR$ sind. Außerdem ist sie zur Binormale parallel, deren Richtungskosinus λ, μ, ν sind. Nach (5) *liegt daher der Mittelpunkt der Schmiegungskugel auf der Krümmungsachse und zwar in der Entfernung* $-R'T$ *vom Krümmungsmittelpunkte*, wobei diese Entfernung positiv gerechnet wird, sobald die Richtung vom Krümmungsmittelpunkte zum Kugelmittelpunkte mit der positiven Richtung der Binormale übereinstimmt. Da der Krümmungsmittelpunkt vom Kurvenpunkte die Entfernung R hat, so lehrt (6):

Satz 8: Der Krümmungskreis eines Kurvenpunktes ist der Kreis, in dem die Schmiegungsebene die Schmiegungskugel schneidet.

Wenn — was wir oben ausschlossen — die Torsion des Kurvenpunktes M gleich Null ist, so versagen die Gleichungen (2) und (3) für die Berechnung von $x - \bar{x}$, $y - \bar{y}$, $z - \bar{z}$. In der Tat ist dann leicht zu zeigen, daß keine Kugel, sondern eine *Ebene*, nämlich die Schmiegungsebene, die Kurve in M in dritter Ordnung berührt, und diese Ebene darf als eine Kugel mit unendlich fernem Mittelpunkte betrachtet werden.

§ 5. Einhüllende Flächen.

277. Ein Hilfsatz. Bei den folgenden Untersuchungen bedürfen wir eines auch sonst nützlichen einfachen Hilfsatzes, den wir hier ausdrücklich ableiten wollen, obgleich er sich leicht aus früheren Betrachtungen ergibt:

Es sei F eine Funktion von α und mehreren anderen Veränderlichen $x, y, z, \ldots$. Geben wir der Veränderlichen α außer dem einen Werte α noch zwei andere Werte $\alpha + h$ und $\alpha + k$, so wollen wir die Wertsysteme $x, y, z, \ldots$ betrachten, die allen drei Gleichungen:

$$(1) \quad F(\alpha,x,y,z,\ldots)=0, \quad F(\alpha+h,x,y,z,\ldots)=0, \quad F(\alpha+k,x,y,z,\ldots)=0$$

genügen. Die Frage ist, *was aus diesen Gleichungen wird, falls h und k nach Null streben.* Es ist nicht richtig, diese Frage einfach dadurch zu beantworten, daß man direkt $h = 0$ und $k = 0$ setzt, wobei dann nur die eine Gleichung $F(\alpha, x, y, z, \ldots) = 0$ übrig bliebe. Vielmehr soll ein *Grenzübergang* gemacht, d. h. unter h und k sollen Werte verstanden werden, die, wie nahe sie auch an Null heranrücken mögen, *immer noch von Null und voneinander verschieden bleiben* (vgl. § 3 des 1. Kapitels).

Wir nehmen an, daß $\alpha + h$ und $\alpha + k$ in einer solchen Umgebung von α liegen, innerhalb deren $F(\alpha, x, y, z, \ldots)$ nebst den partiellen Ableitungen nach α bis zur *dritten* Ordnung bestimmte endliche Werte hat. Nach Satz 19 in Nr. 112 läßt sich dann die zweite und dritte Gleichung (1) mit Rücksicht auf die erste so schreiben:

$$F'(\alpha) + \tfrac{1}{2}F''(\alpha + \theta h)h = 0, \quad F'(\alpha) + \tfrac{1}{2}F''(\alpha + \vartheta k)k = 0,$$

wo θ und ϑ positive echte Brüche sind. Zur Vereinfachung der Schreibweise haben wir die Veränderlichen $x, y, z, \ldots$ nicht ausdrücklich angegeben. Die Akzente deuten die partielle Differentiation nach α an. Hieraus folgt, daß die drei Gleichungen (1) durch folgende ersetzbar sind:

$$F(\alpha) = 0, \quad F'(\alpha) + \tfrac{1}{2}F''(\alpha + \theta h)h = 0,$$
$$F''(\alpha + \theta h)h - F''(\alpha + \vartheta k)k = 0.$$

Weil nach Voraussetzung die zweite Ableitung von F in der Umgebung von α stetig ist, so ergibt sich beim Grenzübergange

für $\lim h = 0$ aus der zweiten Gleichung einfach $F'(\alpha) = 0$, während die dritte beim Grenzübergange für $\lim h = 0$ und $\lim k = 0$ nur dann keine Identität, sondern $F''(\alpha) = 0$ gibt, wenn h *beständig von* k *verschieden* bleibt. Also:

Satz 9: Ist $F(\alpha, x, y, z, \ldots)$ eine Funktion, die nebst ihren partiellen Ableitungen nach α bis zur dritten Ordnung für die zu betrachtenden Wertsysteme $x, y, z, \ldots$ in der Umgebung des Wertes α bestimmte endliche Werte hat, so gehen die drei Gleichungen:

$$F(\alpha, x, y, z, \ldots) = 0, \quad F(\alpha + h, x, y, z, \ldots) = 0,$$
$$F(\alpha + k, x, y, z, \ldots) = 0$$

beim Grenzübergange für $\lim h = 0$ *und* $\lim k = 0$ *in die drei Gleichungen:*

$$F(\alpha, x, y, z, \ldots) = 0, \quad \frac{\partial F(\alpha, x, y, z, \ldots)}{\partial \alpha} = 0, \quad \frac{\partial^2 F(\alpha, x, y, z, \ldots)}{\partial \alpha^2} = 0$$

über, wenn dabei $h : k$ beständig von Eins verschieden bleibt.

Wenn wir künftig drei verschiedene Werte α, $\alpha + h$, $\alpha + k$ in der Grenze zu α übergehen lassen, so ist dabei stets stillschweigend vorausgesetzt, daß alle drei beständig voneinander verschieden bleiben.

278. Einhüllende einer Flächenschar. Es liege nun eine Gleichung zwischen x, y, z und einer *willkürlichen Konstanten* α vor:

$$F(x, y, z, \alpha) = 0, \tag{1}$$

die für jeden Wert von α innerhalb eines gewissen Variabilitätsbereiches eine *Fläche* definiere, so daß also durch (1) eine *Flächenschar* gegeben wird. Die zu einem bestimmten Werte α und einem bestimmten andern Werte $\alpha + h$ gehörigen Flächen der Schar haben eine Schnittkurve, die der Gleichung (1) und der Gleichung:

$$F(x, y, z, \alpha + h) = 0$$

genügt. Ziehen wir von dieser Gleichung die Gleichung (1) ab und dividieren wir mit h, so ergibt sich beim Grenzübergange für $\lim h = 0$: Die Grenzlage der Schnittkurve einer bestimmten Fläche (α) der Schar (1) mit einer benachbarten Fläche der Schar genügt außer der Gleichung (1) noch der Gleichung:

(2) $$\frac{\partial F(x, y, z, \alpha)}{\partial \alpha} = 0.$$

Diese Grenzlage wird nach *Monge* die *Charakteristik* der Fläche (α) der Schar (1) genannt. Vorausgesetzt ist, daß F und $\partial F : \partial \alpha$ in der Umgebung des angenommenen Wertes α stetige Funktionen von α seien.

Auf jeder Fläche (α) der Schar (1) liegt eine Charakteristik. Die Gesamtheit aller Charakteristiken wird eine *Fläche* erfüllen, die aus einem sogleich einleuchtenden Grunde die *Einhüllende der Flächenschar* (1) *heißt.* Die Gleichung der einhüllenden Fläche geht durch Elimination der willkürlichen Konstanten α aus (1) und (2) hervor. Vgl. die entsprechenden Überlegungen für eine Kurvenschar in der Ebene in Nr. 210. Dem damaligen Satze 17 in Nr. 212 entspricht hier der

Satz 10: Die Einhüllende einer Flächenschar

$$F(x, y, z, \alpha) = 0$$

berührt jede einzelne Fläche der Schar in allen Punkten der zugehörigen Charakteristik.

In der Tat, bedeutet M einen Punkt (x, y, z) der zu einem bestimmten Werte von α gehörigen Fläche (1), so ist:

(3) $$F_x(\mathfrak{x} - x) + F_y(\mathfrak{y} - y) + F_z(\mathfrak{z} - z) = 0$$

die Gleichung seiner Tangentenebene in den laufenden Koordinaten $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$. Nun bedeutet (1) auch die Gleichung der Einhüllenden, falls wir darin unter α die durch (2) definierte Funktion von x, y, z verstehen. Daher hat die Einhüllende, sobald M auch auf ihr liegt, in M die Tangentenebene:

$$(F_x + F_\alpha \alpha_x)(\mathfrak{x} - x) + (F_y + F_\alpha \alpha_y)(\mathfrak{y} - y) + (F_z + F_\alpha \alpha_z)(\mathfrak{z} - z) = 0.$$

Da aber für die Funktion α von x, y, z die Gleichung (2) gilt, so ist $F_\alpha = 0$, so daß die letzte Gleichung in der Tat mit (3) übereinstimmt.

279. Gratlinie der Einhüllenden. Wir betrachten jetzt die zu *drei verschiedenen* Werten α, $\alpha + h$ und $\alpha + k$ gehörigen Flächen der Schar:

(1) $$F(x, y, z, \alpha) = 0.$$

Ist (x, y, z) ein gemeinsamer Punkt von allen dreien, so genügen seine Koordinaten nach Satz 9 in Nr. 277 für den Fall, daß h und k zur Grenze Null streben, den drei Gleichungen:

$$(2) \quad F(x, y, z, \alpha) = 0, \quad \frac{\partial F(x, y, z, \alpha)}{\partial \alpha} = 0, \quad \frac{\partial^2 F(x, y, z, \alpha)}{\partial \alpha^2} = 0,$$

falls die Funktion F von α nebst ihren ersten drei Ableitungen nach α bestimmte endliche Werte hat. Wir haben also drei Bedingungen (2) für den *Grenzpunkt*, d. h. für den Schnittpunkt dreier benachbarter Flächen der Schar für den Fall erhalten, daß die drei Flächen immer näher aneinander rücken. Gibt es einen Punkt (x, y, z), der den drei Gleichungen (2) für den gewählten Wert von α genügt, so liegt er auf der Charakteristik der zugehörigen Fläche (α), da die beiden ersten Gleichungen (2) mit den Gleichungen (1) und (2) der vorigen Nummer übereinstimmen. Weil nun die Charakteristik der Fläche (α) die Grenzlage ihrer Schnittlinie mit der Fläche $(\alpha + h)$ ist und weil die Fläche $(\alpha + h)$ mit der Fläche $(\alpha + k)$ beim Grenzübergange ebenfalls eine Charakteristik gemein hat, so ist der Grenzpunkt auch als *Grenzlage eines Schnittpunktes zweier benachbarter Charakteristiken* aufzufassen.

Wenn die drei Gleichungen (2) für beliebige Werte von α nach x, y, z auflösbar sind, so werden x, y, z Funktionen von α. *Fassen wir α als Hilfsveränderliche auf*, so ist damit eine analytische Darstellung einer *Kurve* gewonnen, nämlich des Ortes *aller* Grenzpunkte aller Charakteristiken. Diese Kurve heißt die *Gratlinie* oder *Rückkehrkurve* der Einhüllenden, weil die Einhüllende, der ja die Gratlinie angehört, längs ihrer eine scharfe Kante aufweist, was wir in der Folge wenigstens in einem speziellen Falle (in Nr. 283) zeigen wollen.

280. Berührung zwischen der Gratlinie und den Charakteristiken. Es sei M oder (x, y, z) ein Grenzpunkt, der auf der Charakteristik einer bestimmten Fläche $F(x, y, z, \alpha) = 0$ der angenommenen Flächenschar liegt.

Diese Charakteristik selbst hat die beiden Gleichungen $F = 0$ und $F_\alpha = 0$. Nach Nr. 254 ist daher die Tangente der Charakteristik in M in den laufenden Koordinaten $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ gegeben durch die beiden Gleichungen:

$$F_x(\mathfrak{x}-x)+F_y(\mathfrak{y}-y)+F_z(\mathfrak{z}-z)=0,$$
$$F_{\alpha x}(\mathfrak{x}-x)+F_{\alpha y}(\mathfrak{y}-y)+F_{\alpha z}(\mathfrak{z}-z)=0.$$

Wenn wir dagegen in $F=0$ und $F_\alpha=0$ unter α die durch $F_{\alpha\alpha}=0$ definierte Funktion von x, y, z verstehen, so stellen die Gleichungen $F=0$, $F_\alpha=0$ die Gratlinie dar, die folglich in M die Tangente mit den beiden Gleichungen:

$$(F_x+F_\alpha\alpha_x)(\mathfrak{x}-x)+(F_y+F_\alpha\alpha_y)(\mathfrak{y}-y)+(F_z+F_\alpha\alpha_z)(\mathfrak{z}-z)=0,$$
$$(F_{\alpha x}+F_{\alpha\alpha}\alpha_x)(\mathfrak{x}-x)+(F_{\alpha y}+F_{\alpha\alpha}\alpha_y)(\mathfrak{y}-y)+(F_{\alpha z}+F_{\alpha\alpha}\alpha_z)(\mathfrak{z}-z)=0$$

hat. Da aber für die Gratlinie $F_\alpha=0$ und $F_{\alpha\alpha}=0$ ist, so sind dies dieselben Gleichungen wie die der Tangente der Charakteristik. Also folgt:

Satz 11: Die Gratlinie der Einhüllenden einer Flächenschar $F(x, y, z, \alpha)=0$ berührt in jedem Grenzpunkte die zugehörige Charakteristik.

Bei den allgemeinen Betrachtungen der letzten drei Nummern muß man beachten, daß über die Funktion F und über die durch $F=0$, $F_\alpha=0$ und $F_{\alpha\alpha}=0$ implizite definierten Funktionen besondere Annahmen gemacht wurden, deren Richtigkeit bei jeder Anwendung zu prüfen ist.

281. Tangentenflächen. Es sei insbesondere eine Schar von *Ebenen* gegeben, d. h. eine in x, y, z *lineare* Gleichung $F=0$, nämlich:

(1) $$u(\alpha)x+v(\alpha)y+w(\alpha)z+\omega(\alpha)=0,$$

deren Koeffizienten u, v, w, ω Funktionen einer willkürlichen Größe α sind. Differentiation nach α liefert:

(2) $$u'x+v'y+w'z+\omega'=0,$$

(3) $$u''x+v''y+w''z+\omega''=0.$$

Die Gleichungen (1) und (2) geben für einen beliebigen Wert von α eine zugehörige Charakteristik, und zwar eine *Gerade*, sobald nicht alle zweireihigen Determinanten $vw'-wv'$, $wu'-uw'$, $uv'-vu'$ gleich Null sind. Alle drei Gleichungen geben einen auf der zugehörigen Charakteristik gelegenen *Grenzpunkt*, falls die Determinante

$$(4) \qquad \begin{vmatrix} u & v & w \\ u' & v' & w' \\ u'' & v'' & w'' \end{vmatrix}$$

nicht verschwindet. Alsdann sind auch die vorhin erwähnten zweireihigen Determinanten nicht alle drei gleich Null. Die Charakteristiken sind nach Satz 11 der vorigen Nummer die Tangenten der Gratlinie. Die Einhüllende ist folglich die Fläche der Tangenten der Gratlinie, also die sogenannte *Tangentenfläche* einer Raumkurve. Jede Ebene (1) berührt sie längs einer Geraden, nämlich längs der zugehörigen Charakteristik.

Verstehen wir unter x, y, z diejenigen Funktionen von α, die durch die Auflösung der Gleichungen (1), (2), (3) hervorgehen, also die Koordinaten der Punkte der Gratlinie, ausgedrückt durch die Hilfsveränderliche α, so muß die *vollständige* Differentiation jener Gleichungen nach α Null liefern. Die Differentiation der Gleichungen (1) und (2) gibt mit Rücksicht auf (2) und (3):

$$(5) \qquad ux' + vy' + wz' = 0, \quad u'x' + v'y' + w'z' = 0.$$

Die erste dieser beiden Gleichungen wiederum liefert, abermals vollständig nach α differenziert, mit Rücksicht auf die zweite:

$$(6) \qquad ux'' + vy'' + wz'' = 0.$$

Nach der ersten Gleichung (5) und nach (6) sind u, v, w proportional $y'z'' - z'y''$ usw., d. h. nach (9) in Nr. 264 proportional den Richtungskosinus der Binormale der Gratlinie. Die Gleichung (1) stellt daher für jeden bestimmten Wert von α die *Schmiegungsebene* der zugehörigen Stelle der Gratlinie in den laufenden Koordinaten x, y, z dar.

Gehen wir *umgekehrt* von einer Raumkurve aus und betrachten wir die Schar ihrer Schmiegungsebenen als die gegebene Ebenenschar, so folgt aus Satz 5 in Nr. 269 und kann auch leicht direkt bewiesen werden, daß die Charakteristiken die Tangenten der Raumkurve sind.

Ist die Determinante (4) für alle Werte von α gleich Null, so heißt dies: Drei Funktionen von α, deren Ableitungen u, v, w sind, haben die in Satz 7, Nr. 275 angegebene Eigenschaft, so daß zwischen ihnen eine lineare Gleichung mit

konstanten Koeffizienten besteht, aus der durch Differentiation nach α eine Gleichung:

$$Au + Bv + Cw = 0$$

folgt, in der A, B, C Konstanten sind. Weil aber u, v, w den Richtungskosinus der Normale der Ebene (1) proportional sind, so bedeutet dies, daß alsdann alle Ebenen der gegebenen Schar eine feste Richtung enthalten, nämlich diejenige, deren Kosinus proportional A, B, C sind. Eine derartige Ebenenschar umhüllt einen *Zylinder*, dessen Mantellinien jene feste Richtung haben und die Charakteristiken vorstellen. Eine Gratlinie ist dann nicht mehr vorhanden.

Die Auflösung der Gleichungen (1), (2), (3) nach x, y, z kann unter Umständen für x, y, z von α freie, also konstante Werte ergeben. Dann gehen alle Ebenen (1) durch ein und denselben festen Punkt, sie umhüllen daher einen *Kegel*, der diesen Punkt zur Spitze hat, und die Mantellinien des Kegels sind die Charakteristiken. Die Gratlinie ist jetzt auf einen Punkt, die Kegelspitze, reduziert. Wenn insbesondere alle Ebenen (1) eine feste Gerade enthalten, liegt ein *Ebenenbüschel* vor, und der Kegel reduziert sich auf die feste Gerade.

Satz 12: Die Ebenen einer Schar:

$$u(\alpha)x + v(\alpha)y + w(\alpha)z + \omega(\alpha) = 0,$$

die nicht sämtlich einen Punkt gemein haben und auch nicht sämtlich eine feste Richtung enthalten, umhüllen die Tangentenfläche einer Kurve und sind die Schmiegungsebenen der Kurve. Die Kurve selbst ist die Gratlinie der Tangentenfläche.

282. Die Tangentenflächen als abwickelbare Flächen. Es seien die Koordinaten der Punkte M oder (x, y, z) einer Kurve als Funktionen der Bogenlänge s gegeben:

$$x = \varphi(s), \quad y = \chi(s), \quad z = \psi(s), \tag{1}$$

ferner sei M_1 derjenige Punkt auf der Tangente von M, der von M die Entfernung t hat, wobei $t = MM_1$ positiv im Sinne der positiven Tangente gerechnet werden soll. Da $\alpha = x', \beta = y', \gamma = z'$ die Richtungskosinus der positiven Tangente sind, so hat M_1 die Koordinaten:

$$x_1 = x + x't, \quad y_1 = y + y't, \quad z_1 = z + z't, \tag{2}$$

wobei der Akzent die Differentiation nach der Bogenlänge s andeutet. Die Formeln (2) geben also die Koordinaten x_1, y_1, z_1 aller Punkte der *Tangentenfläche* der Kurve (1), ausgedrückt mittels zweier Hilfsveränderlichen s und t. Dies ist ein Beispiel zu der am Schlusse von Nr. 251 erwähnten Darstellung (6) einer Fläche. Es sei ferner R der Krümmungsradius der Kurve (1); er ist eine gewisse Funktion von s. Wir betrachten außer M noch einen benachbarten Punkt M' der Kurve (1), etwa den zu $s + \Delta s$ gehörigen; die Tangenten von M und M' bilden miteinander einen gewissen Winkel, auch wenn sie einander gar nicht treffen. Der Grenzwert des Verhältnisses aus diesem Winkel und aus Δs für $\lim \Delta s = 0$ ist nach Nr. 260 die Krümmung $1 : R$.

Außer der Raumkurve (1) wollen wir jetzt eine Kurve in einer $\mathfrak{x}\mathfrak{y}$-Ebene betrachten, bei der s ebenfalls die Bogenlänge bedeute:

$$(3) \qquad \mathfrak{x} = \Phi(s), \quad \mathfrak{y} = \Psi(s),$$

und *wir wollen voraussetzen, daß der Krümmungsradius R dieser ebenen Kurve genau dieselbe Funktion der Bogenlänge von s sei wie bei der Raumkurve* (1).

Nun können wir jedem Punkte M von (1) einen Punkt $\mathfrak{M}$ von (3) zuordnen, nämlich denjenigen, der zu demselben Werte von s gehört. Die Kurven (1) und (3) haben in entsprechenden Punkten M und $\mathfrak{M}$ die gleiche Bogenlänge und die gleiche Krümmung. Wie bei der Raumkurve ziehen wir auch bei der ebenen Kurve (3) die Tangente des Punktes $\mathfrak{M}$ und tragen auf ihr, mit gehöriger Beachtung des Vorzeichens, von $\mathfrak{M}$ aus die Strecke t ab, wodurch wir zu einem Punkte $\mathfrak{M}_1$ der $\mathfrak{x}\mathfrak{y}$-Ebene gelangen, dessen Koordinaten sind:

$$(4) \qquad \mathfrak{x}_1 = \mathfrak{x} + \mathfrak{x}'t, \quad \mathfrak{y}_1 = \mathfrak{y} + \mathfrak{y}'t.$$

Der Akzent deutet wieder die Differentiation nach der Bogenlänge s an. *Zu jedem bestimmten Wertepaare s, t gehört also ein Punkt M_1 der Tangentenfläche der Raumkurve und ein Punkt $\mathfrak{M}_1$ der $\mathfrak{x}\mathfrak{y}$-Ebene.*

Lassen wir auch bei der ebenen Kurve (3) die Bogenlänge s um Δs wachsen, wodurch wir zu demjenigen Punkte $\mathfrak{M}'$ gelangen, der dem Punkte M' zugeordnet ist, so bilden

die Tangenten von $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{M}'$ einen gewissen Winkel miteinander. Der Grenzwert des Verhältnisses aus ihm und aus $\varDelta s$ für $\lim \varDelta s = 0$ wird die Krümmung $1 : R$, die nach Annahme in $\mathfrak{M}$ dieselbe wie in M ist.

Hieraus folgt: Der Streifen der Tangentenfläche der Raumkurve (1), der zwischen den zu M und M' gehörigen Tangenten liegt, und der zugehörige Streifen der $\mathfrak{x}\mathfrak{y}$-Ebene zwischen den Tangenten von $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{M}'$ werden zwar, je kleiner $|\varDelta s|$ gewählt wird, immer schmaler, aber um so genauer lassen sich beide Streifen in entsprechenden Punkten M, M', M_1 und $\mathfrak{M}, \mathfrak{M}', \mathfrak{M}_1$ miteinander zur Deckung bringen. Dies meint man, wenn man sagt: *Die Tangentenfläche der Raumkurve* (1) *ist auf die* $\mathfrak{x}\mathfrak{y}$*-Ebene abwickelbar.*

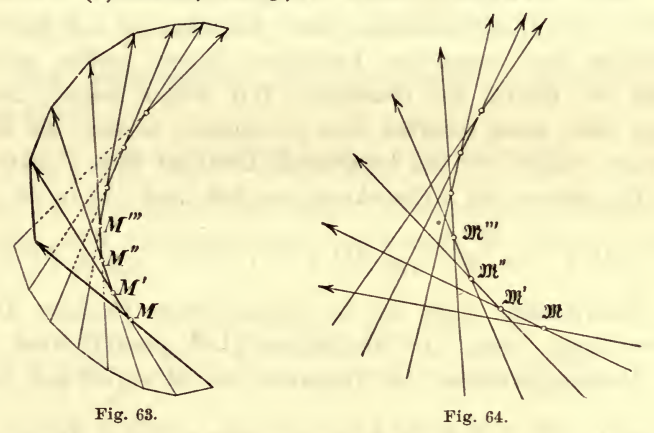


Fig. 63. Fig. 64.

Eine Vorstellung von dieser Abwicklung kann man sich dadurch machen, daß man die Raumkurve (1) zunächst durch ein räumliches Polygon $MM'M''\ldots$ und die Tangenten der Raumkurve durch die beliebig weit verlängerten Seiten MM', $M'M''$,... des Polygons ersetzt, siehe Fig. 63. Die Tangentenfläche ist dann durch eine Reihe von ebenen Winkelfeldern ersetzt, und zwar steht jedem solchen Winkelfelde das Feld des *Scheitelwinkels* gegenüber, so daß wir *zwei* Mäntel der Fläche erhalten. Da dies Modell aus lauter aneinander grenzenden ebenen Stücken besteht, so läßt es sich auf eine Ebene ausbreiten, siehe Fig. 64, wobei aus dem räumlichen Polygone $MM'M''\ldots$ ein ebenes Polygon $\mathfrak{M}\mathfrak{M}'\mathfrak{M}''\ldots$ hervorgeht.

[282

Je mehr sich das Polygon $MM'M''\ldots$ einer Raumkurve nähert, um so deutlicher geht die Vorstellung von der Abwicklung der Tangentenfläche einer Raumkurve hervor.

Die Tangentenfläche einer Raumkurve läßt sich also auf die Ebene so ausbreiten, daß dabei die Längen von Linien auf der Fläche keine Veränderung erfahren. Man erkennt auch, daß die beiden Mäntel der Tangentenfläche, von denen der eine die positiven, der andere die negativen Tangenten enthält und die längs der Raumkurve ineinander übergehen, bei der Abwicklung aufeinander fallen, da die Tangenten der ebenen Kurve in der Nähe ihrer Berührungspunkte auf der konvexen Seite der Kurve liegen.

283. Gratlinie einer Tangentenfläche. Die beiden Mäntel der Tangentenfläche einer Raumkurve, auf denen die positiven bzw. negativen Tangenten liegen, treffen einander längs der Kurve, der Gratlinie. Wir wollen zeigen, daß sie längs ihrer einen scharfen Grat miteinander bilden. Zu diesem Zwecke wählen wir das begleitende Dreikant eines Punktes M_0 der Raumkurve als Achsenkreuz, so daß nach (1) in Nr. 273:

$$x = \varDelta s + \cdots, \quad y = \frac{1}{2R_0}\varDelta s^2 + \cdots, \quad z = -\frac{1}{6R_0T_0}\varDelta s^3 + \cdots$$

die Koordinaten eines zu M_0 benachbarten Punktes M der Kurve sind, wenn $|\varDelta s|$ hinlänglich klein gewählt wird. Für die Richtungskosinus der Tangente von M ergibt sich leicht:

$$\alpha = 1 + \cdots, \quad \beta = \frac{1}{R_0}\varDelta s + \cdots, \quad \gamma = -\frac{1}{2R_0T_0}\varDelta s^2 + \cdots,$$

so daß nach (2) in voriger Nummer:

$$\begin{aligned} x_1 &= \varDelta s + \cdots + t(1 + \cdots), \\ y_1 &= \frac{1}{2R_0}\varDelta s^2 + \cdots + t\left(\frac{1}{R_0}\varDelta s + \cdots\right), \\ z &= -\frac{1}{6R_0T_0}\varDelta s^3 + \cdots + t\left(-\frac{1}{2R_0T_0}\varDelta s^2 + \cdots\right) \end{aligned}$$

die Koordinaten eines Punktes M_1 der Tangentenfläche sind. Wir wollen den Schnitt der Tangentenfläche mit der Normalebene von M_0 betrachten, d. h. mit der yz-Ebene, wählen also t so, daß $x_1 = 0$ wird. Ist $|\varDelta s|$ hinlänglich klein, so setzen wir daher für t einen Wert von der Form $-\varDelta s + \cdots$, wo

die durch Punkte angedeuteten Glieder höhere Potenzen von Δs enthalten. Setzen wir eine solche Entwicklung für t in die Werte von y_1 und z_1 ein, so kommt:

$$y_1 = -\frac{1}{2R_0}\Delta s^2 + \cdots, \quad z_1 = \frac{1}{3R_0T_0}\Delta s^3 + \cdots.$$

Daher ist der Anfangspunkt M_0 eine *Spitze* oder ein *Rückkehrpunkt* der Schnittlinie der Tangentenfläche mit der Normalebene von M_0, vgl. Nr. 184 und Nr. 190. Seine Tangente ist die y-Achse, d. h. die Hauptnormale von M_0.

Die beiden Mäntel der Tangentenfläche bilden also in der Tat längs der Raumkurve einen scharfen Grat miteinander.

§ 6. Polarfläche, Evoluten und Evolventen.

284. Polarfläche. Die Einhüllende der Normalebenen einer Kurve:

$$(1) \qquad \alpha(\mathfrak{x} - x) + \beta(\mathfrak{y} - y) + \gamma(\mathfrak{z} - z) = 0$$

heißt die *Polarfläche* der Kurve. Zweimalige Differentiation von (1) nach der Bogenlänge s gibt nach Nr. 272 mit Rücksicht auf (1):

$$(2) \qquad \begin{cases} l(\mathfrak{x} - x) + m(\mathfrak{y} - y) + n(\mathfrak{z} - z) = R, \\ \lambda(\mathfrak{x} - x) + \mu(\mathfrak{y} - y) + \nu(\mathfrak{z} - z) = -T\frac{dR}{ds}, \end{cases}$$

da $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$ und $l\alpha + m\beta + n\gamma = 0$ ist. Alle drei Gleichungen (1) und (2) definieren zusammen die Punkte $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z})$ der Gratlinie der Polarfläche, die Gleichung (1) und die erste Gleichung (2) dagegen die Charakteristiken der Polarfläche. Man sieht nach Nr. 263, *daß diese Charakteristiken die Krümmungsachsen der gegebenen Kurve sind*, und nach (5) in Nr. 276, *daß die Gratlinie der Polarfläche der Ort der Mittelpunkte der Schmiegungskugeln ist.* Nach Nr. 281 *sind also die Krümmungsachsen die Tangenten des Ortes der Mittelpunkte der Schmiegungskugeln.*

285. Gratlinie der Polarfläche. Die Koordinaten der Punkte der Gratlinie der Polarfläche, d h. diejenigen Werte von x, y und z, die den Gleichungen (1) und (2) der letzten

Nummer genügen, mögen $\bar{x}$, $\bar{y}$ und $\bar{z}$ heißen. Dann ist wie in (5), Nr. 276:

(1) $\bar{x}=x+lR-\lambda R'T,\quad \bar{y}=y+mR-\mu R'T,\quad \bar{z}=z+nR-\nu R'T.$

Dies also sind die Gleichungen der *Gratlinie* der Polarfläche, ausgedrückt mittels der Bogenlänge s der *Urkurve*, wobei $R'=dR:ds$ ist. Differentiation nach s gibt nach Nr. 272:

$$\frac{d\bar{x}}{ds}=-\lambda\left(\frac{R}{T}+\frac{dR'T}{ds}\right), \tag{2}$$

und entsprechende Formeln gehen für $d\bar{y}:ds$ und $d\bar{z}:ds$ hervor. Da die Tangenten der Gratlinie, nämlich die Krümmungsachsen der Urkurve, den Binormalen der Urkurve parallel sind, so geben wir ihnen und damit auch der Gratlinie denselben positiven Sinn wie diesen Binormalen. Es ist dann $d\bar{x}:d\bar{s}=\lambda$, $d\bar{y}:d\bar{s}=\mu$, $d\bar{z}:d\bar{s}=\nu$, wenn $d\bar{s}$ das Bogendifferential der Gratlinie bedeutet, so daß aus (2) folgt:

$$\frac{d\bar{s}}{ds}=-\left(\frac{R}{T}+\frac{dR'T}{ds}\right). \tag{3}$$

Sind $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$, $\bar{\gamma}$ die Richtungskosinus der positiven Tangente der Gratlinie, so hat man:

$$\bar{\alpha}=\lambda,\quad \bar{\beta}=\mu,\quad \bar{\gamma}=\nu. \tag{4}$$

Es seien $\bar{l}$, $\bar{m}$, $\bar{n}$ die Richtungskosinus der positiven Hauptnormale der Gratlinie, und es sei $\bar{R}$ der Krümmungsradius der Gratlinie. Da $d\bar{\alpha}=d\lambda$ usw. ist, so folgt aus Nr. 272:

$$\frac{\bar{l}}{\bar{R}}d\bar{s}=\frac{l}{T}ds,\quad \frac{\bar{m}}{\bar{R}}d\bar{s}=\frac{m}{T}ds,\quad \frac{\bar{n}}{\bar{R}}d\bar{s}=\frac{n}{T}ds, \tag{5}$$

mithin $\bar{l}:\bar{m}:\bar{n}=l:m:n$, d. h. *die Hauptnormale der Gratlinie der Polarfläche ist zur Hauptnormale der Urkurve parallel*, natürlich an entsprechenden Stellen beider Kurven. *Die Binormale der Gratlinie ist folglich der Tangente der Urkurve parallel.*

286. Krümmung und Torsion der Gratlinie der Polarfläche. Aus den letzten Formeln folgt durch Quadrieren und Addieren, daß $d\bar{s}^2:\bar{R}^2=ds^2:T^2$ wird. Da $\bar{R}$ nach Nr. 260 stets positiv ist, kommt also:

$$\bar{R}=\varepsilon T\frac{d\bar{s}}{ds}, \tag{1}$$

wobei $\varepsilon = +1$ oder -1 und zwar so zu wählen ist, daß dieser Ausdruck positiv wird. Aus (5) in Nr. 285 folgt nun:

$$\bar{l} = \varepsilon l, \quad \bar{m} = \varepsilon m, \quad \bar{n} = \varepsilon n. \tag{2}$$

Nach (6) und (7) in Nr. 264 ergeben sich hieraus und aus (4) in voriger Nummer die Richtungskosinus der positiven Binormale der Gratlinie:

$$\bar{\lambda} = -\varepsilon\alpha, \quad \bar{\mu} = -\varepsilon\beta, \quad \bar{\nu} = -\varepsilon\gamma. \tag{3}$$

Durch Differentiation folgt mit Hilfe von (2) und (1) in Nr. 272, wenn $1 : \bar{T}$ die Torsion der Gratlinie vorstellt:

$$\frac{\bar{l}}{\bar{T}} d\bar{s} = -\varepsilon \frac{l}{R} ds \quad \text{usw.},$$

also nach (2) auch $\bar{T} = -R d\bar{s} : ds$, so daß sich mit Rücksicht auf (1) ergibt:

$$\frac{ds}{R} = -\frac{d\bar{s}}{\bar{T}}, \quad \frac{d\bar{s}}{\bar{R}} = \varepsilon \frac{ds}{T}. \tag{4}$$

Sind $d\sigma$ und $d\tau$ Kontingenz- und Torsionswinkel der Urkurve, $d\bar{\sigma}$ und $d\bar{\tau}$ die der Gratlinie der Polarfläche, so folgt hieraus nach Nr. 260 und 271:

$$d\sigma = -d\bar{\tau}, \quad d\bar{\sigma} = \varepsilon d\tau. \tag{5}$$

Die Formel (3) der vorigen Nummer läßt sich mithin auch so schreiben:

$$d\bar{s} = -\varepsilon \left(R d\bar{\sigma} + d\frac{dR}{d\bar{\sigma}}\right). \tag{6}$$

287. Sphärische Kurven. Eine Kurve, die auf einer Kugel liegt, heißt *sphärisch.* Die Kugel ist für alle Punkte der Kurve die Schmiegungskugel. Die Gratlinie der Polarfläche reduziert sich also auf den Mittelpunkt der Kugel. Die Polarfläche ist folglich ein *Kegel,* dessen Spitze in der Kugelmitte liegt.

Umgekehrt: Ist der Radius der Schmiegungskugel einer Raumkurve konstant, so ist $R^2 + R'^2 T^2$ nach (6) in Nr. 276 konstant, so daß durch Differentiation nach s folgt:

$$R'(R + R'' T^2 + R' T T') = 0. \tag{1}$$

Sehen wir von dem Falle ab, wo die Krümmung konstant ist,

nehmen wir also $R' \neq 0$ an, so lehrt (3) in Nr. 285, daß $d\bar{s} = 0$ wird, und (2) in Nr. 285, daß auch $\bar{x} =$ konst. wird. Ebenso ergeben sich für $\bar{y}$ und $\bar{z}$ konstante Werte. Dabei ist jedoch vorausgesetzt, daß $1 : T \neq 0$ sei, weil sonst die Formeln (1) in Nr. 285, aus denen die soeben benutzten Formeln folgen, nicht brauchbar sind. Es wird also von den *ebenen* Kurven abgesehen (vgl. Nr. 275). Demnach gilt der

Satz 13: Eine Kurve, die nicht eben ist und deren Krümmung nicht konstant ist, ist dann und nur dann sphärisch, wenn der Radius ihrer Schmiegungskugel konstant ist.

288. Kurven konstanter Krümmung. Hat eine Kurve konstante Krümmung, so ist für sie $R' = 0$. Nach (1) in Nr. 285 fällt also für jeden Punkt der Kurve der Mittelpunkt des Krümmungskreises mit dem Mittelpunkte der Schmiegungskugel zusammen, vorausgesetzt, daß $1 : T \neq 0$, die Kurve also nicht eben ist (vgl. Nr. 275). Die ebenen Kurven konstanter Krümmung sind ja nach Satz 12 in Nr. 196 die Geraden und Kreise; sie gehören also zu den sphärischen Kurven. Im Falle $R' = 0$ wird ferner $d\bar{s} = -Rds : T$, nach (3) in Nr. 285, daher nach (1) in Nr. 286 auch $\bar{R} = -\varepsilon R$, weshalb dann $\varepsilon = -1$ wegen $\bar{R} > 0$ sein muß. Also folgt:

Satz 14: Die Mittelpunkte der Schmiegungskugeln einer nicht ebenen Kurve fallen dann und nur dann mit den Mittelpunkten der Krümmungskreise derselben Stellen zusammen, wenn die Kurve konstante Krümmung hat. Alsdann ist der Ort dieser Mittelpunkte, also die Gratlinie der Polarfläche, eine Kurve von derselben konstanten Krümmung.

289. Polarfläche einer ebenen Kurve. Eine ebene Kurve hat an jeder Stelle ihre Ebene zur Schmiegungsebene. Diejenigen Geraden also, die wir in Nr. 169 als die Normalen definierten, sind ihre Hauptnormalen zu nennen, sobald wir die ebene Kurve als eine Kurve im Raume betrachten. Die Geraden, die in den Punkten der Kurve auf der Ebene der Kurve senkrecht stehen, bedeuten die Binormalen. Nach Satz 13 in Nr. 198 und nach Nr. 199 sind folglich die Krümmungsachsen diejenigen Geraden, die in den Punkten der *Evolute* auf der Ebene der Kurve senkrecht stehen,

d. h. *die Polarfläche ist derjenige Zylinder, dessen senkrechter Querschnitt die Evolute ist.* Die Polarfläche hat, weil sie in einen Zylinder ausartet, keine Gratlinie, vgl. Nr. 281.

290. Planevolventen. Ist eine Kurve im Raume gegeben, so kann man sich fragen, ob *sie die Gratlinie der Polarfläche einer andern Kurve sein kann.* Nach der Definition in Nr. 284 hat man zu fordern, daß die Schmiegungsebenen der *gegebenen* Kurve die Normalebenen der *gesuchten* Kurve werden, d. h. *die gesuchten Kurven sind die orthogonalen Trajektorien der Schmiegungsebenen der gegebenen Kurve.* Man nennt sie die *Planevolventen* der gegebenen Kurve, diese selbst die zugehörige *Planevolute. Die Gratlinie der Polarfläche einer Kurve ist also die Planevolute der Kurve.*

Die Bestimmung der Planevolventen einer gegebenen Kurve kann in folgender Weise durchgeführt werden: Wir wollen bei der gegebenen Kurve die gebräuchlichen Bezeichnungen x, y, z; α, β, γ; l, m, n; λ, μ, ν und R für die Koordinaten, die Richtungskosinus der Kanten des begleitenden Dreikants und den Krümmungsradius benutzen. Dagegen seien ξ, η, ζ die Koordinaten des in der Schmiegungsebene des Punktes M oder (x, y, z) gelegenen Punktes der gesuchten Planevolvente. Zunächst muß sein:

$$\lambda(\xi - x) + \mu(\eta - y) + \nu(\zeta - z) = 0.$$

Die Größen:

$$X = \alpha(\xi - x) + \beta(\eta - y) + \gamma(\zeta - z), \quad Y = l(\xi - x) + m(\eta - y) + n(\zeta - z)$$

sind die Koordinaten des Punktes (ξ, η, ζ) in demjenigen Achsenkreuze, das von der positiven Tangente und Hauptnormale von M in der Schmiegungsebene gebildet wird. Die Auflösung aller drei Gleichungen gibt nach Nr. 264:

$$(1) \quad \xi = x + \alpha X + lY, \quad \eta = y + \beta X + mY, \quad \zeta = z + \gamma X + nY.$$

Da die Planevolvente die Schmiegungsebene senkrecht schneiden soll, handelt es sich nun darum, die Funktionen X und Y so zu bestimmen, daß:

$$(2) \qquad \alpha d\xi + \beta d\eta + \gamma d\zeta = 0, \quad l d\xi + m d\eta + n d\zeta = 0$$

wird. Aus (1) aber folgt nach (1) in Nr. 259 und nach (4) und (3) in Nr. 272, *wenn wir die Bogenlänge σ der sphärischen*

Indikatrix der Tangenten der gegebenen Kurve als unabhängige Veränderliche benutzen, so daß $ds = R d\sigma$ ist:

$$\frac{d\xi}{d\sigma} = \left(R - Y + \frac{dX}{d\sigma}\right)\alpha + \left(X + \frac{dY}{d\sigma}\right) l - \frac{R}{T} Y\lambda,$$

und entsprechende Werte gehen für die Ableitungen von η und ζ hervor. Die Forderungen (2) geben also mit Rücksicht auf die Gleichungen in Nr. 264:

$$(3) \qquad R - Y + \frac{dX}{d\sigma} = 0, \quad X + \frac{dY}{d\sigma} = 0.$$

Diese Bedingungen werden einfacher, wenn wir statt X und Y die Größen

$$\mathfrak{x} = -X\cos\sigma + Y\sin\sigma, \quad \mathfrak{y} = -X\sin\sigma - Y\cos\sigma$$

als die zu berechnenden Funktionen von σ einführen, also:

$$(4) \qquad X = -\mathfrak{x}\cos\sigma - \mathfrak{y}\sin\sigma, \quad Y = \mathfrak{x}\sin\sigma - \mathfrak{y}\cos\sigma$$

setzen, da sie dann übergehen in:

$$(5) \qquad \frac{d\mathfrak{x}}{d\sigma} = R\cos\sigma, \quad \frac{d\mathfrak{y}}{d\sigma} = R\sin\sigma.$$

Betrachten wir nunmehr eine *ebene* Kurve in einer $\mathfrak{x}\mathfrak{y}$-Ebene, bei der σ den Tangentenwinkel und R den Krümmungsradius bedeutet, so bestehen bei ihr nach Nr. 200 genau dieselben Gleichungen (5). Die Aufgabe, die Planevolventen einer Raumkurve zu bestimmen, bei der der Krümmungsradius R eine bekannte Funktion der Bogenlänge σ der sphärischen Indikatrix der Tangenten ist, kommt also auf die Aufgabe zurück, diejenigen *ebenen* Kurven zu bestimmen, bei denen der Krümmungsradius R als Funktion des Tangentenwinkels τ gegeben ist. Hat man diese Aufgabe erledigt, so sind X und Y nach (4), also auch ξ, η, ζ nach (1) gefunden. Es kommt:

$$(6) \qquad \xi = x - \alpha(\mathfrak{x}\cos\sigma + \mathfrak{y}\sin\sigma) + l(\mathfrak{x}\sin\sigma - \mathfrak{y}\cos\sigma),$$

und entsprechende Werte gehen für η und ζ hervor.

291. Filarevolventen. Diejenigen Kurven, die alle Tangenten einer Raumkurve senkrecht schneiden, also die *orthogonalen Trajektorien der Tangenten,* heißen die *Filarevolventen* der gegebenen Kurve, die selbst eine zugehörige *Filarevolute*

genannt wird. Nach Satz 14 in Nr. 200 sind diejenigen Kurven, die wir schlechtweg als Evolventen und Evoluten bezeichneten, Filarevolventen und -evoluten ebener Kurven.

Wir wollen die Elemente einer gegebenen Kurve in der gebräuchlichen Weise bezeichnen. Alsdann seien X, Y, Z die Koordinaten desjenigen Punktes P einer Filarevolvente, der auf der Tangente des Punktes M oder (x, y, z) der gegebenen Kurve liegt. Ist $MP = t$, positiv gerechnet im Sinne der positiven Tangente, so kommt:

$$X = x + \alpha t, \quad Y = y + \beta t, \quad Z = z + \gamma t.$$

Um die Filarevolventen zu finden, hat man t so als Funktion der Bogenlänge s der gegebenen Kurve zu bestimmen, daß:

$$\alpha d X + \beta d Y + \gamma d Z = 0$$

wird. Nach den Frenetschen Formeln in Nr. 272 lautet diese Bedingung:

$$\alpha\left(\alpha + \frac{l}{R} t + \alpha t'\right) + \beta\left(\beta + \frac{m}{R} t + \beta t'\right) + \gamma\left(\gamma + \frac{n}{R} t + \gamma t'\right) = 0,$$

wenn t' die Ableitung von t nach s bedeutet. Nach Nr. 264 vereinfacht sich die Bedingung zu $1 + t' = 0$, d. h. $s + t =$ konst. Daher sind:

$$(1) \quad X = x + \alpha(c - s), \quad Y = y + \beta(c - s), \quad Z = z + \gamma(c - s),$$

wo c eine *willkürliche* Konstante vorstellt, die Gleichungen einer Filarevolvente. Wächst s um Δs, so möge der Kurvenpunkt M oder (x, y, z) in den Punkt M_1 übergehen. Der zu M_1 gehörige Punkt P_1 der Evolvente schneidet auf der Tangente von M_1 die Strecke $t + \Delta t = c - s - \Delta s$ ab. Also ist der Bogen MM_1, vermehrt um die Strecke $M_1 P_1$, gleich $\Delta s + (c - s - \Delta s) = c - s = MP$.

Die Filarevolventen lassen sich mithin mechanisch gerade so durch Abwicklung eines Fadens von der gegebenen Evolute erzeugen wie die Evolventen einer ebenen Kurve, vgl. Nr. 201.

292. Filarevoluten. Wir wollen jetzt die gegebene Kurve als Filarevolvente auffassen, d. h. die zugehörigen Filarevoluten suchen. Sie sind definiert als diejenigen Kurven, deren Tangenten zugleich Normalen der gegebenen Kurve sind.

Wir schicken dabei eine einfache Bemerkung über einen Spezialfall voraus: Ist eine solche Filarevolute eben, so erhellt, daß die Filarevolvente ebenfalls eben ist. *Deshalb kann keine Filarevolute einer nicht-ebenen Kurve eben sein.*

Da wir mit x_1, y_1, z_1 in Nr. 263 schon die Koordinaten des Krümmungsmittelpunktes eines Punktes M oder (x, y, z) einer gegebenen Kurve bezeichnet haben, so wollen wir für die Punkte der Filarevoluten der gegebenen Kurve die Koordinaten x_2, y_2, z_2 gebrauchen. Es sei also M_2 oder (x_2, y_2, z_2) der in der Normalebene von M gelegene Punkt einer Filarevolute, so daß:

$$\alpha(x_2 - x) + \beta(y_2 - y) + \gamma(z_2 - z) = 0$$

ist. Bedeuten X und Y die Koordinaten von M_2 in dem von der positiven Haupt- und Binormale von M gebildeten Achsenkreuze, d. h. ist

$$X = l(x_2 - x) + m(y_2 - y) + n(z_2 - z),$$
$$Y = \lambda(x_2 - x) + \mu(y_2 - y) + \nu(z_2 - z),$$

so folgt aus den vorstehenden drei Gleichungen mit Rücksicht auf die Formeln in Nr. 264:

$$(1) \quad x_2 = x + lX + \lambda Y, \quad y_2 = y + mX + \mu Y, \quad z_2 = z + nX + \nu Y.$$

Unsere Aufgabe ist es jetzt, X und Y als Funktionen der Bogenlänge s der gegebenen Kurve so zu bestimmen, daß die Tangente der durch (1) mittels der Hilfsveränderlichen s dargestellten Kurve die Richtung M_2M hat, d. h. daß dx_2, dy_2, dz_2 zu $x_2 - x$, $y_2 - y$, $z_2 - z$ oder nach (1) zu $lX + \lambda Y$, $mX + \mu Y$, $nX + \nu Y$ proportional werden. Nach (1) und den Formeln in Nr. 272 ist daher zu fordern:

$$\frac{dx_2}{ds} = \left(1 - \frac{X}{R}\right)\alpha + \left(\frac{Y}{T} + \frac{dX}{ds}\right)l + \left(-\frac{X}{T} + \frac{dY}{ds}\right)\lambda = \omega(lX + \lambda Y),$$

wobei der Proportionalitätsfaktor ω eine noch unbekannte Funktion von s bedeutet, oder:

$$\left(1 - \frac{X}{R}\right)\alpha + \left(\frac{Y}{T} + \frac{dX}{ds} - \omega X\right)l + \left(-\frac{X}{T} + \frac{dY}{ds} - \omega Y\right)\lambda = 0.$$

Zyklische Vertauschung von α, β, γ bzw. l, m, n bzw. λ, μ, ν

gibt zwei entsprechende Formeln. Wegen (5) in Nr. 264 muß mithin einzeln sein:

$$1-\frac{X}{R}=0, \quad \frac{Y}{T}+\frac{dX}{ds}-\omega X=0, \quad -\frac{X}{T}+\frac{dY}{ds}-\omega Y=0.$$

Die erste Gleichung oder $X=R$ besagt, daß der Punkt M_2 der Filarevolute auf der Krümmungsachse von M liegt. *Die Filarevolute verläuft daher auf der Polarfläche der gegebenen Kurve.* Die Elimination der Hilfsgröße ω aus den beiden letzten Gleichungen gibt außerdem:

$$\frac{d \operatorname{arc} \operatorname{tg}(Y:X)}{ds}=\frac{1}{T}. \tag{2}$$

Bezeichnen wir $\operatorname{arc}\operatorname{tg}(Y:X)$ mit φ, so können wir unter φ wegen der Bedeutung von $X\,(=R)$ und Y denjenigen Winkel verstehen, den die positive Hauptnormale des Punktes M in der Normalebene von M zurücklegen muß, um in die Richtung MM_2 überzugehen, positiv gemessen im Sinne der Drehung nach der positiven Binormale hin. Dann ist $X=R$, $Y=R\operatorname{tg}\varphi$ und nach (2):

$$\frac{d\varphi}{ds}=\frac{1}{T}. \tag{3}$$

Bedeutet $d\tau$ den *Torsionswinkel* der gegebenen Kurve, so wird andererseits $1:T=d\tau:ds$, daher nach (3) auch $d\varphi-d\tau=0$, mithin $\varphi=\tau+c$, wo c eine Konstante ist. Dabei bedeutet τ die Bogenlänge der sphärischen Indikatrix der Binormalen der gegebenen Kurve. Die spezielle Annahme $c=0$ gibt mithin nach (1) die *eine* Filarevolute:

$$\begin{cases} x_2=x+(l+\lambda\operatorname{tg}\tau)R, \quad y_2=y+(m+\mu\operatorname{tg}\tau)R, \\ z_2=z+(n+\nu\operatorname{tg}\tau)R, \end{cases} \tag{4}$$

während die *allgemeinste* Filarevolute in der Form:

$$\begin{cases} x_2=x+[l+\lambda\operatorname{tg}(\tau+c)]R, \\ y_2=y+[m+\mu\operatorname{tg}(\tau+c)]R, \\ z_2=z+[n+\nu\operatorname{tg}(\tau+c)]R \end{cases} \tag{5}$$

dargestellt wird, wobei c eine willkürliche Konstante bedeutet. *Eine gegebene Kurve hat somit unzählig viele Filarevoluten, und sie liegen sämtlich auf der Polarfläche.* Dabei ist $R\operatorname{tg}(\tau+c)$ die Strecke, die von der Filarevolute (5) auf der Krümmungs-

achse abgeschnitten wird, gemessen vom Krümmungsmittelpunkte an und positiv im Sinne der positiven Binormale.

Die Filarevolute (5) würde nur dann auf allen Krümmungsachsen die Strecke Null abschneiden, wenn $R \operatorname{tg}(\tau + c) = 0$ wäre. Da R nur für singuläre Punkte gleich Null ist, bleibt die Annahme $\tau =$ konst., d. h. $d\tau = 0$ oder $1 : T = 0$. Nach Satz 6 in Nr. 275 ist *mithin der Ort der Krümmungsmittelpunkte nur dann eine Filarevolute, wenn die Urkurve eben ist.*

Die Tangente MM_2 der Filarevolute (4) liegt in der Normalebene von M und bildet mit der positiven Hauptnormale von M den Winkel τ. Die Projektionen von MM_2 auf die Kanten des Dreikants von M sind gleich 0, $MM_2 \cos\tau$ und $MM_2 \sin\tau$; die Projektion von MM_2 auf die x-Achse ist mithin gleich $MM_2 (\cos\tau \cdot l + \sin\tau \cdot \lambda)$. Folglich sind die Richtungskosinus der Tangente MM_2 der Filarevolute (4):

$$(6) \quad \alpha_2 = l\cos\tau + \lambda\sin\tau, \quad \beta_2 = m\cos\tau + \mu\sin\tau, \quad \gamma_2 = n\cos\tau + \nu\sin\tau,$$

wenn die Tangente im Sinne von M nach M_2 positiv gerechnet wird. Bedeutet s_2 die Bogenlänge der Filarevolute (4), so wird s_2 eine Funktion der Bogenlänge s der Urkurve sein, so daß $d\alpha_2 : ds$, $d\beta_2 : ds$ und $d\gamma_2 : ds$ nach (1) in Nr. 272 den Richtungskosinus der Hauptnormale der Evolute proportional sind. Mit Rücksicht auf (2) und (3) in Nr. 272 sowie auf $\varphi = \tau$ und (3) ergibt sich mithin aus (6), *daß die Hauptnormale der Filarevolute der Tangente der Urkurve parallel und somit zugleich Normale der Polarfläche ist.* Dies gilt übrigens für *alle* Filarevoluten (5).

293. Filarevoluten einer ebenen Kurve. Die Polarfläche einer ebenen Kurve ist nach Nr. 289 derjenige auf der Ebene der Kurve senkrecht stehende Zylinder, dessen Grundkurve der Ort der Krümmungsmittelpunkte, die ebene Evolute, ist. Wegen Satz 6 in Nr. 275 wird φ in diesem Falle konstant. Die Tangenten einer Filarevolute bilden also hier mit der Normale der Kurvenebene einen konstanten Winkel. Daher sind die Filarevoluten jetzt solche Kurven auf einem Zylinder, die alle Mantellinien unter einem konstanten Winkel schneiden. Derartige Kurven heißen allgemein *Schraubenlinien.* Der Winkel ist von Kurve zu Kurve ein anderer.

Bei der Ausbreitung der zylindrischen Polarfläche auf der Ebene gehen diese Filarevoluten offenbar in *gerade Linien* über.

294. Abwicklung der Polarfläche. Das letzte Ergebnis ist ein spezieller Fall eines Satzes, der für eine beliebige Urkurve gilt. Es sei M oder (x, y, z) ein Punkt einer gegebenen Raumkurve, M_1 oder (x_1, y_1, z_1) der zugehörige Krümmungsmittelpunkt und $\overline{M}$ oder $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ der zugehörige Punkt der Gratlinie. Vgl. (4) in Nr. 263 und (5) in Nr. 276. Aus den allgemeinen Formeln (5) für einen Punkt M_2 oder (x_2, y_2, z_2) einer Filarevolute in Nr. 292 ergibt sich, da $R'T = TdR : ds = dR : d\tau$ ist:

$$x_2 = \bar{x} + \lambda\left[R \operatorname{tg}(\tau + c) + \frac{dR}{d\tau}\right], \tag{1}$$

und entsprechende Formeln gehen für y_2 und z_2 hervor.

Ferner ist:

$$x_1 = \bar{x} + \lambda \frac{dR}{d\tau}, \tag{2}$$

und entsprechende Formeln gelten für y_1 und z_1.

Wir wollen nun diejenigen Größen einführen, die sich auf die Gratlinie der Polarfläche der gegebenen Kurve beziehen und die wir wie in Nr. 285 und 286 mit überstrichenen Buchstaben bezeichnen. Nach (4) in Nr. 285 sind λ, μ, ν durch $\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\gamma}$ zu ersetzen. Ferner ist $d\tau$ nach (5) in Nr. 286 gleich $\varepsilon d\bar{\sigma}$, wobei $\bar{\sigma}$ die Bogenlänge der sphärischen Indikatrix der Tangenten der Gratlinie bedeutet. Die Größe ε ist nach der Vorschrift in Nr. 286 gleich ± 1. An die Stelle von (1) und (2) treten also die Gleichungen:

$$x_2 = \bar{x} + \varepsilon\bar{\alpha}\left[R \operatorname{tg}(\bar{\sigma} + k) + \frac{dR}{d\bar{\sigma}}\right], \quad x_1 = \bar{x} + \varepsilon\bar{\alpha}\frac{dR}{d\bar{\sigma}}. \tag{3}$$

Analoge Gleichungen gelten für die übrigen Koordinaten. Dabei ist die Konstante $k = \varepsilon c$. Nach (6) in Nr. 286 haben wir:

$$R + \frac{d^2 R}{d\bar{\sigma}^2} = -\varepsilon\frac{d\bar{s}}{d\bar{\sigma}},$$

folglich wegen $d\bar{s} : \overline{R} = d\bar{\sigma}$:

$$R + \frac{d^2 R}{d\bar{\sigma}^2} = -\varepsilon\overline{R}. \tag{4}$$

Wenn wir nun die Größen einführen:

$$(5)\quad \mathfrak{x} = -\varepsilon\left(R\sin\bar{\sigma} + \frac{dR}{d\bar{\sigma}}\cos\bar{\sigma}\right),\quad \mathfrak{y} = \varepsilon\left(R\cos\bar{\sigma} - \frac{dR}{d\bar{\sigma}}\sin\bar{\sigma}\right),$$

so kommt nach (4):

$$(6)\qquad \frac{d\mathfrak{x}}{d\bar{\sigma}} = \bar{R}\cos\bar{\sigma},\quad \frac{d\mathfrak{y}}{d\bar{\sigma}} = \bar{R}\sin\bar{\sigma}.$$

Infolge von (5) aber ist:

$$R = -\varepsilon(\mathfrak{x}\sin\bar{\sigma} - \mathfrak{y}\cos\bar{\sigma}),\qquad \frac{dR}{d\bar{\sigma}} = -\varepsilon(\mathfrak{x}\cos\bar{\sigma} + \mathfrak{y}\sin\bar{\sigma}),$$

so daß wir die Gleichungen (3) und die analogen Gleichungen für die übrigen Koordinaten so schreiben können:

$$(7)\begin{cases} x_2 = \bar{x} - \bar{\alpha}\dfrac{\mathfrak{x}\cos k - \mathfrak{y}\sin k}{\cos(\bar{\sigma}+k)}, \\ y_2 = \bar{y} - \bar{\beta}\dfrac{\mathfrak{x}\cos k - \mathfrak{y}\sin k}{\cos(\bar{\sigma}+k)}, \\ z_2 = \bar{z} - \bar{\gamma}\dfrac{\mathfrak{x}\cos k - \mathfrak{y}\sin k}{\cos(\bar{\sigma}+k)}. \end{cases}\quad (8)\begin{cases} x_1 = \bar{x} - \bar{\alpha}(\mathfrak{x}\cos\bar{\sigma} + \mathfrak{y}\sin\bar{\sigma}), \\ y_1 = \bar{y} - \bar{\beta}(\mathfrak{x}\cos\bar{\sigma} + \mathfrak{y}\sin\bar{\sigma}), \\ z_1 = \bar{z} - \bar{\gamma}(\mathfrak{x}\cos\bar{\sigma} + \mathfrak{y}\sin\bar{\sigma}). \end{cases}$$

Hierin beziehen sich die überstrichenen Größen auf die Gratlinie der Urkurve, und $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ sind solche Funktionen der Bogenlänge $\bar{\sigma}$ der sphärischen Indikatrix der Tangenten der Gratlinie, deren Ableitungen durch (6) gegeben sind. Wir haben also die Koordinaten der Punkte M_2 und M_1 einer Filarevolute und des Ortes der Krümmungsmittelpunkte durch die auf die Gratlinie bezüglichen Elemente ausgedrückt. Die Konstante k in (7) ist willkürlich.

Jetzt deuten wir die Funktionen $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ von $\bar{\sigma}$, deren Ableitungen durch (6) gegeben sind, als *rechtwinklige Punktkoordinaten in einer* $\mathfrak{x}\mathfrak{y}$-*Ebene.* Nach Nr. 200 ist alsdann $\bar{\sigma}$ als der Tangentenwinkel und $\bar{R}$ als der Krümmungsradius der ebenen Kurve der Punkte $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$ aufzufassen. Nach Nr. 282 geht mithin die Gratlinie bei der Abwicklung der Polarfläche auf die Ebene gerade in diese ebene Kurve über. Da die in Nr. 282 mit t bezeichnete Größe für die auf der Polarfläche gelegene Filarevolute (7) die Strecke $\bar{M}M_2$, also den in (7) auftretenden Bruch bedeutet, so geht ferner der Punkt M_2 bei der Abwicklung in den Punkt:

$$(9)\quad \mathfrak{x}_2 = \mathfrak{x} - \frac{\mathfrak{x}\cos k - \mathfrak{y}\sin k}{\cos(\bar{\sigma}+k)}\cos\bar{\sigma},\quad \mathfrak{y}_2 = \mathfrak{y} - \frac{\mathfrak{x}\cos k - \mathfrak{y}\sin k}{\cos(\bar{\sigma}+k)}\sin\bar{\sigma}$$

über und entsprechend der Punkt M_1 in den Punkt:

(10) $\mathfrak{x}_1 = \mathfrak{x} - (\mathfrak{x} \cos \bar{\sigma} + \mathfrak{y} \sin \bar{\sigma}) \cos \bar{\sigma}, \quad \mathfrak{y}_1 = \mathfrak{y} - (\mathfrak{x} \cos \bar{\sigma} + \mathfrak{y} \sin \bar{\sigma}) \sin \bar{\sigma}.$

Eliminiert man $\bar{\sigma}$ aus (9), so fällt auch $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ heraus und es kommt:

$$\mathfrak{x}_2 \cos k - \mathfrak{y}_2 \sin k = 0.$$

Dies aber ist die Gleichung einer *geraden* Linie; und weil k willkürlich war, ergeben sich folglich lauter Geraden durch den Anfangspunkt der $\mathfrak{x}\mathfrak{y}$-Ebene. Da sich die Gleichungen (10) durch:

$$\mathfrak{y}_1 - \mathfrak{y} = (\mathfrak{x}_1 - \mathfrak{x}) \operatorname{tg} \bar{\sigma}, \quad \mathfrak{y}_1 = - \mathfrak{x}_1 \operatorname{ctg} \bar{\sigma}$$

ersetzen lassen, von denen die erste in den laufenden Koordinaten $\mathfrak{x}_1$, $\mathfrak{y}_1$ die Tangente der aus der Gratlinie bei der Abwicklung hervorgegangenen Kurve bestimmt, weil $\bar{\sigma}$ der Tangentenwinkel dieser Kurve ist, und die zweite das Lot vom Anfangspunkte auf diese Tangente darstellt, so gilt der

Satz 15: Wird die Polarfläche einer Kurve auf die Ebene abgewickelt, so gehen alle Filarevoluten in Geraden durch einen gemeinsamen Punkt über. Zugleich geht der Ort der Krümmungsmittelpunkte in den Ort der Fußpunkte der Lote von diesem Punkte auf alle Tangenten derjenigen Kurve über, in die dabei die Gratlinie der Polarfläche verwandelt wird.

Da bei der Abwicklung alle Kurven der Polarfläche ihre wahre Länge behalten und die Filarevoluten zu Geraden werden, so sind sie auf der Polarfläche *kürzeste* Linien (wie in Nr. 293).

295. Gemeine Schraubenlinien. In Nr. 293 erwähnten wir den allgemeinen Begriff der Schraubenlinien. Insbesondere heißen Schraubenlinien auf Rotationszylindern *gemeine Schraubenlinien.* Wir wollen eine gemeine Schraubenlinie als Beispiel zu den vorgetragenen Theorien behandeln. Die Achse des geraden Kreiszylinders, die sogenannte *Schraubenachse,* wählen wir dabei als die z-Achse, und die x-Achse legen wir durch einen Punkt M_0 der Kurve. Es sei a der positive Radius des Zylinders und j der nach der Definition *konstante* Winkel, den die Tangenten der Schraubenlinie mit den Mantellinien und daher auch mit der positiven z-Achse bilden. Von M_0 aus messen wir die Bogenlänge s der Kurve. Da die Schrauben-

linie bei der Abwicklung des Zylinders in einer $\mathfrak{x}\mathfrak{y}$-Ebene in die Gerade $\mathfrak{x} = s \sin j$, $\mathfrak{y} = s \cos j$ übergeht, falls der Grundkreis des Zylinders in die $\mathfrak{x}$-Achse übergeht und M_0 der Anfangspunkt der $\mathfrak{x}\mathfrak{y}$-Ebene ist, so wird $\mathfrak{x}$ die Länge des Kreisbogens $M_0 N$, der durch die Projektion des Kurvenbogens s oder $M_0 M$ der Schraubenlinie auf die xy-Ebene entsteht; $\mathfrak{y}$ ist die z-Koordinate von M. Folglich sind:

$$(1) \qquad x = a \cos \frac{s \sin j}{a}, \quad y = a \sin \frac{s \sin j}{a}, \quad z = s \cos j$$

die Gleichungen der gemeinen Schraubenlinie, ausgedrückt mittels der Bogenlänge s. Benutzen wir statt der Bogenlänge die Größe $t = s \sin j : a$, nämlich den Winkel $M_0 O N$, als unabhängige Veränderliche, so kommen wir zu der gebräuchlicheren Darstellung:

$$(2) \qquad x = a \cos t, \quad y = a \sin t, \quad z = at \operatorname{ctg} j.$$

Da $dt : ds = \sin j : a$ ist, ergibt die Differentiation von (2) nach s sofort die Richtungskosinus der Tangente:

$$(3) \qquad \alpha = -\sin j \sin t, \quad \beta = \sin j \cos t, \quad \gamma = \cos j.$$

Nach (1) in Nr. 272 folgt durch abermalige Differentiation:

$$l = -\frac{R}{a} \sin^2 j \cos t, \quad m = -\frac{R}{a} \sin^2 j \sin t, \quad n = 0.$$

Quadrieren, Addieren und Wurzelausziehen gibt, weil $l^2 + m^2 + n^2 = 1$ und $R > 0$ ist:

$$(4) \qquad \frac{1}{R} = \frac{\sin^2 j}{a}.$$

Folglich kommt:

$$(5) \qquad l = -\cos t, \quad m = -\sin t, \quad n = 0.$$

Hiernach ist die Hauptnormale das Lot von M auf die Zylinderachse und zwar positiv in der Richtung von M nach der Achse. Nach (6) in Nr. 264 folgt aus (3) und (5):

$$(6) \qquad \lambda = \cos j \sin t, \quad \mu = -\cos j \cos t, \quad \nu = \sin j.$$

Differentiation der ersten Gleichung (6) nach s gibt mit Rücksicht auf die erste Gleichung (5) und nach (2) in Nr. 272:

$$(7) \qquad \frac{1}{T} = -\frac{\sin j \cos j}{a} = -\frac{1}{2} \frac{\sin 2j}{a}.$$

Folglich ist die Schraubenlinie nach Nr. 273 rechts oder links gewunden, je nachdem $\sin 2j \gtrless 0$ ist, was auch die räumliche Anschauung lehrt. Nach der dritten Formel (6) bildet die Schmiegungsebene mit der Schraubenachse einen konstanten Winkel. Aus (4) und (7) folgt, *daß Krümmung und Torsion der gemeinen Schraubenlinie konstant sind.* Nach Nr. 288 fällt der Mittelpunkt der Schmiegungskugel mit dem Krümmungsmittelpunkte zusammen. Für die Gratlinie ist daher:

$$(8)\qquad \bar{x} = -a \operatorname{ctg}^2 j \cos t, \qquad \bar{y} = -a \operatorname{ctg}^2 j \sin t, \qquad \bar{z} = at \operatorname{ctg} j.$$

Vergleichung mit (2) zeigt, daß die Gratlinie der Polarfläche auch eine gemeine Schraubenlinie ist; sie liegt auf einem Zylinder vom Radius $a \operatorname{ctg}^2 j$ und mit derselben Schraubenachse. Diese Schraubenlinie hat dieselbe *Schraubenhöhe* wie die Urkurve. Unter der Schraubenhöhe wird dabei die Größe verstanden, um die z wächst, wenn ein Umlauf um den Zylinder vollendet wird, also die Strecke $2\pi a \operatorname{ctg} j$.

Die Polarfläche der gegebenen gemeinen Schraubenlinie ist hiernach die Tangentenfläche einer anderen gemeinen Schraubenlinie, eine sogenannte *abwickelbare Schraubenfläche.* Da die Normalebene der gegebenen Schraubenlinie (2) nach (3) in den laufenden Koordinaten $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ durch:

$$(9)\qquad \sin t \cdot \mathfrak{x} - \cos t \cdot \mathfrak{y} - \operatorname{ctg} j \cdot \mathfrak{z} + at \operatorname{ctg}^2 j = 0$$

dargestellt wird, geht die Gleichung der Polarfläche hervor, wenn man (9) nach t differenziert:

$$\cos t \cdot \mathfrak{x} + \sin t \cdot \mathfrak{y} + a \operatorname{ctg}^2 j = 0$$

und hieraus und aus (9) die Veränderliche t eliminiert. Um die *Schnittlinie der Polarfläche mit der xy-Ebene* zu erhalten, setzen wir $\mathfrak{z} = 0$, so daß sich ergibt:

$$\mathfrak{x} = -a \operatorname{ctg}^2 j\,(t \sin t + \cos t), \qquad \mathfrak{y} = a \operatorname{ctg}^2 j\,(t \cos t - \sin t).$$

Ersetzen wir hierin $\mathfrak{x}$ durch $-x$ und $\mathfrak{y}$ durch $-y$, d. h. drehen wir die Kurve um die Schraubenachse um zwei rechte Winkel herum, und bezeichnen wir $a \operatorname{ctg}^2 j$ mit r und t mit ψ, so liegen die Gleichungen der in Nr. 244 besprochenen *Kreisevolvente* vor.

[**295**

Da $s = at : \sin j$, also $ds = adt : \sin j$ und der Torsionswinkel $d\tau = ds : T$ ist, so folgt aus (7) noch $d\tau = -\cos j \cdot dt$. Wenn wir demnach $\tau = -t \cos j$ setzen, so geben die Gleichungen (5) von Nr. 292 die *Filarevoluten* der gemeinen Schraubenlinie:

$$(10)\quad \begin{cases} x_2 = -a \operatorname{ctg}^2 j \cos t - \dfrac{a \cos j}{\sin^2 j} \sin t \operatorname{tg}(t \cos j - c), \\ y_2 = -a \operatorname{ctg}^2 j \sin t + \dfrac{a \cos j}{\sin^2 j} \cos t \operatorname{tg}(t \cos j - c), \\ z_2 = \quad a \operatorname{ctg} j \cdot t - \dfrac{a}{\sin j} \operatorname{tg}(t \cos j - c), \end{cases}$$

wobei c eine willkürliche Konstante bezeichnet. Nach (1) in Nr. 291 sind die Gleichungen der *Filarevolventen* der gemeinen Schraubenlinie:

$$(11)\quad \begin{cases} X = a \cos t + (at - c \sin j) \sin t, \\ Y = a \sin t - (at - c \sin j) \cos t, \end{cases} \qquad Z = c \cos j.$$

Weil hier Z konstant ist, sind die Filarevolventen die Schnittlinien von Ebenen senkrecht zur Schraubenachse mit der Tangentenfläche der gegebenen Schraubenlinie und daher wie die Schnittlinie der Polarfläche mit der xy-Ebene *Kreisevolventen.*

296. Kurven, bei denen das Verhältnis von Krümmung und Torsion konstant ist. Aus den Frenetschen Formeln (1) und (2) in Nr. 272 folgt, daß $Rd\alpha - Td\lambda$, $Rd\beta - Td\mu$ und $Rd\gamma - Td\nu$ gleich Null sind. Ist nun bei einer Kurve *das Verhältnis von Krümmung und Torsion konstant,* also auch $R : \sqrt{R^2 + T^2}$ und $T : \sqrt{R^2 + T^2}$ konstant, etwa gleich $\cos c$ und $\sin c$, so folgt, daß $d\alpha - \operatorname{tg} c \cdot d\lambda$ usw. gleich Null sind, d. h. $\alpha - \lambda \operatorname{tg} c$, $\beta - \mu \operatorname{tg} c$, $\gamma - \nu \operatorname{tg} c$ oder auch

$$\alpha \cos c - \lambda \sin c, \quad \beta \cos c - \mu \sin c, \quad \gamma \cos c - \nu \sin c$$

konstant sind. Die Summe der Quadrate dieser drei Größen ist aber gleich Eins; also sind sie die Kosinus A, B, C einer *festen* Richtung. Weil nun:

$$A\alpha + B\beta + C\gamma = \cos c$$

ist, bilden die Tangenten der Kurve mit der festen Richtung den konstanten Winkel c. Legen wir durch alle Punkte der Kurve Geraden in dieser Richtung, so entsteht ein Zylinder.

Die Kurve schneidet alle Mantellinien dieses Zylinders unter einem konstanten Winkel c und ist folglich eine *Schraubenlinie* im allgemeinen Sinne des Wortes (vgl. Nr. 293).

Umgekehrt: Liegt eine allgemeine Schraubenlinie vor und wird die z-Achse parallel der Richtung ihres Zylinders gewählt, so ist γ konstant. Nach der letzten Frenetschen Formel (1) in Nr. 272 wird also $n = 0$, daher nach der letzten Frenetschen Formel (3) ebenda:

$$\frac{\gamma}{R} + \frac{\nu}{T} = 0, \quad \text{d. h.} \quad \nu = -\frac{T}{R}\gamma. \tag{1}$$

Nun ist aber $\gamma^2 + n^2 + \nu^2 = 1$, mithin folgt:

$$1 + \left(\frac{T}{R}\right)^2 = \frac{1}{\gamma^2},$$

d. h. mit γ ist auch $T : R$ konstant.

Satz 16: Bei einer Kurve ist dann und nur dann das Verhältnis von Krümmung und Torsion konstant, wenn sie irgend eine allgemeine Schraubenlinie ist.

297. Kurven konstanter Krümmung und konstanter Torsion. Wenn sowohl die Krümmung als auch die Torsion einer Kurve konstant ist, so gilt dasselbe vom Verhältnis von Krümmung und Torsion, so daß es sich um eine Schraubenlinie handelt. Wir wollen untersuchen, um was für eine. Wird wieder die z-Achse parallel zur Richtung des Zylinders gewählt, so ist wie vorhin γ konstant und $n = 0$. Die Gleichung (1) der vorigen Nummer besagt, daß auch ν konstant ist. Wegen $\alpha^2 + \beta^2 = 1 - \gamma^2$ können wir:

$$\alpha = \sqrt{1 - \gamma^2}\sin\varphi, \quad \beta = \sqrt{1 - \gamma^2}\cos\varphi$$

setzen. Es sind α und β die Ableitungen x' und y' von x und y nach der Bogenlänge s; folglich kommt:

$$x' = \sqrt{1 - \gamma^2}\sin\varphi, \qquad y' = \sqrt{1 - \gamma^2}\cos\varphi,$$
$$x'' = \sqrt{1 - \gamma^2}\cos\varphi \cdot \varphi', \quad y'' = -\sqrt{1 - \gamma^2}\sin\varphi \cdot \varphi'.$$

Da nun nach (10) in Nr. 264 die Konstante $\nu = R(x'y'' - y'x'')$ ist, so ergibt sich für φ' oder $d\varphi : ds$ ein konstanter Wert, so daß φ die Form $as + b$ hat, wo a und b Konstanten sind. Also kommt:

$$\frac{dx}{ds}=\sqrt{1-\gamma^2}\sin(as+b),\quad \frac{dy}{ds}=\sqrt{1-\gamma^2}\cos(as+b),\quad \frac{dz}{ds}=\gamma.$$

Führen wir $t=\pi-as-b$ als unabhängige Veränderliche ein, so ergibt sich:

$$\frac{dx}{dt}=-\frac{\sqrt{1-\gamma^2}}{a}\sin t,\quad \frac{dy}{dt}=\frac{\sqrt{1-\gamma^2}}{a}\cos t,\quad \frac{dz}{dt}=-\frac{\gamma}{a}.$$

Daher sind die drei Größen

$$x-\frac{\sqrt{1-\gamma^2}}{a}\cos t=x_0,\quad y-\frac{\sqrt{1-\gamma^2}}{a}\sin t=y_0,\quad z+\frac{\gamma}{a}t=z_0$$

Konstanten. Verlegen wir den Punkt (x_0, y_0, z_0) in den Anfangspunkt, so kommt:

$$x=\frac{\sqrt{1-\gamma^2}}{a}\cos t,\quad y=\frac{\sqrt{1-\gamma^2}}{a}\sin t,\quad z=-\frac{\gamma}{a}t.$$

Dies aber sind nach (2) in Nr. 295 die Gleichungen einer *gemeinen Schraubenlinie*, die, wie wir damals sahen, in der Tat konstante Krümmung und konstante Torsion hat. Also folgt

Satz 17: Eine Kurve hat dann und nur dann sowohl konstante Krümmung als auch konstante Torsion, wenn sie eine gemeine Schraubenlinie ist.

§ 7. Berührung und Oskulation zwischen Kurven und Flächen.

298. Berührung zwischen zwei Kurven. Wenn zwei Raumkurven einander in einem Punkte M berühren, so wollen wir die Berührung höherer Ordnung so definieren:

Es sei Q ein zu M benachbarter Punkt der gemeinsamen Tangente, siehe Fig. 65. Die durch Q gehende und zur Tangente senkrechte Ebene schneide die beiden Kurven in M' und M_1'. Alsdann sagen wir, *daß die beiden Kurven einander in M in der Ordnung r berühren, wenn der Grenzwert*

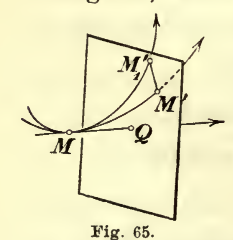


Fig. 65.

$$\lim_{MQ=0}\frac{M'M_1'}{MQ^{r+1}} \tag{1}$$

endlich und von Null verschieden ist.

Um diese Definition analytisch zu formulieren, wollen wir annehmen, die Kurven seien in den Formen:

(2) $y = f(x),\quad z = g(x),$ (3) $y = F(x),\quad z = G(x)$

gegeben, also ausgedrückt mittels der unabhängigen Veränderlichen x. Nach Voraussetzung soll es einen Wert von x geben, für den aus (2) dieselben Werte von y und z hervorgehen wie aus (3); außerdem sollen beide Kurven in dem dadurch bestimmten gemeinsamen Punkte M eine gemeinsame Tangente haben, d. h. es soll dort $f'(x) = F'(x)$ und $g'(x) = G'(x)$ sein.

Zunächst möge noch spezieller angenommen werden, diese gemeinsame Tangente sei der x-Achse parallel. Alsdann hat ein Punkt Q dieser Tangente, der zu M benachbart ist, eine Abszisse $x + \Delta x$, während für ihn y und z dieselben Werte wie für M haben. Die Punkte M' und M_1' haben dieselbe Abszisse $x + \Delta x$, doch sind die beiden anderen Koordinaten von M' diese:

$$y + \Delta y = f(x + \Delta x),\quad z + \Delta z = g(x + \Delta x)$$

und die von M_1' diese:

$$y + \Delta y_1 = F(x + \Delta x),\quad z + \Delta z_1 = G(x + \Delta x).$$

Es ist also:

$$MQ = \Delta x,\quad M'M_1'^2 = (\Delta y_1 - \Delta y)^2 + (\Delta z_1 - \Delta z)^2.$$

Wir fordern nach (1), daß $M'M_1'^2$ mit Δx in der $(2r + 2)^{\text{ten}}$ Ordnung gleich Null werde. Es muß dies also von mindestens einem der beiden Summanden $(\Delta y_1 - \Delta y)^2$ und $(\Delta z_1 - \Delta z)^2$ gelten, während der andere mit Δx dann sehr wohl in *höherer*, aber nicht in niederer Ordnung verschwinden darf. Von den beiden Grenzwerten von

$$(4)\qquad \frac{\Delta y_1 - \Delta y}{\Delta x^{r+1}},\quad \frac{\Delta z_1 - \Delta z}{\Delta x^{r+1}}$$

für $\lim \Delta x = 0$ muß also wenigstens einer endlich und von Null verschieden sein, während der andere zwar auch endlich sein muß, aber auch gleich Null sein darf.

Nehmen wir an, daß die Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ und ebenso die Funktionen $F(x)$ und $G(x)$ nebst ihren Ableitungen bis zur $(r + 1)^{\text{ten}}$ Ordnung einschließlich in der Umgebung des betrachteten Wertes x bestimmte endliche Werte haben, so können wir, da $f(x) = F(x)$, $f'(x) = F'(x)$ und $g(x) = G(x)$,

$g'(x) = G'(x)$ für den betrachteten Wert x ist, die Differenzen $\Delta y_1 - \Delta y$ und $\Delta z_1 - \Delta z$ so schreiben:

$$\Delta y_1 - \Delta y = [F''(x) - f''(x)] \frac{\Delta x^2}{2!} + \cdots + [F^{(r)}(x) - f^{(r)}(x)] \frac{\Delta x^r}{r!} +$$
$$+ [F^{(r+1)}(x + \theta \Delta x) - f^{(r+1)}(x + \theta \Delta x)] \frac{\Delta x^{r+1}}{(r+1)!},$$
$$\Delta z_1 - \Delta z = [G''(x) - g''(x)] \frac{\Delta x^2}{2!} + \cdots + [G^{(r)}(x) - g^{(r)}(x)] \frac{\Delta x^r}{r!} +$$
$$+ [G^{(r+1)}(x + \vartheta \Delta x) - g^{(r+1)}(x + \vartheta \Delta x)] \frac{\Delta x^{r+1}}{(r+1)!},$$

wobei θ und ϑ positive echte Brüche sind, vorausgesetzt, daß $|\Delta x|$ hinreichend klein gewählt wird, nach Satz 19, Nr. 112. Damit die Werte (4) *endliche* Grenzwerte für $\lim \Delta x = 0$ haben, ist also notwendig, daß die Ableitungen von $F(x)$ mit denen von $f(x)$ und die Ableitungen von $G(x)$ mit denen von $g(x)$ bis zur r^{ten} Ordnung einschließlich übereinstimmen. Damit ferner wenigstens einer der beiden Grenzwerte nicht gleich Null sei, ist notwendig und hinreichend, daß *nicht beide* $(r+1)^{\text{ten}}$ Ableitungen von $F(x)$ bzw. $G(x)$ mit denen von $f(x)$ bzw. $g(x)$ übereinstimmen. Gemeint ist natürlich immer die Übereinstimmung für den betrachteten Wert von x.

Daß dies Ergebnis auch dann gilt, wenn die gemeinsame Tangente beider Kurven nicht zur x-Achse parallel ist, sieht man so ein: Das Achsenkreuz werde durch eine Drehung um den Anfangspunkt in irgend eine neue Lage gebracht. Sind $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ die Koordinaten im neuen Achsenkreuze, so bestehen Beziehungen von der Form:

$$(5) \qquad \begin{cases} \bar{x} = A_1 x + B_1 y + C_1 z, \\ \bar{y} = A_2 x + B_2 y + C_2 z, \\ \bar{z} = A_3 x + B_3 y + C_3 z, \end{cases}$$

in denen die Koeffizienten konstant sind. Im alten Achsenkreuze war x die unabhängige Veränderliche, im neuen soll es $\bar{x}$ sein. Nach Nr. 94 lassen sich die Ableitungen k^{ter} Ordnung von $\bar{y}$ und $\bar{z}$ nach $\bar{x}$ durch die Ableitungen erster bis k^{ter} Ordnung von y und z nach x ausdrücken, und umgekehrt. Dabei muß allerdings verlangt werden, daß der aus (5) folgende Wert:

$$\frac{d\bar{x}}{dx} = A_1 + B_1\frac{dy}{dx} + C_1\frac{dz}{dx}$$

in der Umgebung der betrachteten Stelle endlich und von Null verschieden sei Da nun $dy:dx$ und $dz:dx$ an jener Stelle nach der früheren Voraussetzung gleich Null sind, muß folglich $A_1 \neq 0$ angenommen werden. Dies bedeutet: Die gemeinsame Tangente, die der alten x-Achse parallel ist, darf im neuen Achsenkreuze nicht senkrecht zur $\bar{x}$-Achse sein. Unter dieser Bedingung folgt nun daraus, daß die Ableitungen von y und z nach x bis zur r^{ten} Ordnung bei beiden Kurven an der betrachteten Stelle übereinstimmen, dasselbe für die Ableitungen von $\bar{y}$ und $\bar{z}$ nach $\bar{x}$. Die gemeinsame Tangente ist gewiß nicht zur $\bar{x}$-Achse senkrecht, wenn die ersten Ableitungen von $\bar{y}$ und $\bar{z}$ dort endliche Werte haben. Also hat sich ergeben:

Satz 18: Zwei Kurven:

$$y = f(x),\ \ z = g(x) \quad \textit{und} \quad y = F(x),\ \ z = G(x)$$

berühren einander in einem Punkte in gerader r^{ter} Ordnung, wenn für den zugehörigen Wert von x:

$$f(x) = F(x),\quad f'(x) = F'(x),\ \ldots\ f^{(r)}(x) = F^{(r)}(x),$$
$$g(x) = G(x),\quad g'(x) = G'(x),\ \ldots\ g^{(r)}(x) = G^{(r)}(x)$$

ist, dagegen nicht beide. Gleichungen:

$$f^{(r+1)}(x) = F^{(r+1)}(x),\quad g^{(r+1)}(x) = G^{(r+1)}(x)$$

bestehen. Dabei wird vorausgesetzt, daß die Funktionen $f(x)$, $g(x)$, $F(x)$ und $G(x)$ nebst ihren Ableitungen bis zur $(r+1)^{ten}$ Ordnung einschließlich in der Umgebung des betrachteten Wertes x bestimmte endliche Werte haben und daß die $(r+1)^{ten}$ Ableitungen an der betrachteten Stelle stetig seien.

Wir legen nun durch einen zum gemeinsamen Punkte M benachbarten Punkt Q der gemeinsamen Tangente eine Ebene *senkrecht zur x-Achse* (nicht zur Tangente), die beide Kurven in M' und M_1' treffe. Alsdann ist aus den Entwicklungen der Koordinaten $y + \varDelta y$, $z + \varDelta z$ von M' und der Koordinaten $y + \varDelta y_1$, $z + \varDelta z_1$ von M_1' nach Potenzen von $\varDelta x$ wie oben zu ersehen, daß $M'M_1' : MQ^{r+1}$ unter den Voraussetzungen des Satzes für $\lim MQ = 0$ einen endlichen und

von Null verschiedenen Grenzwert hat. In Nr. 214 gingen wir bei der Betrachtung der Berührung höherer Ordnung zwischen ebenen Kurven von diesem Grenzwerte aus und zeigten dann, daß auch der zu Anfang der jetzigen Nummer aufgestellte Grenzwert endlich und von Null verschieden ist. Hier haben wir den umgekehrten Weg eingeschlagen, wodurch die damaligen Betrachtungen in einem wesentlichen Punkte vervollständigt werden.

Aus dem obigen Satze und aus Nr. 214 folgt sofort:

Satz 19: Berühren zwei Kurven einander gerade in der r^{ten} Ordnung und ist die gemeinsame Tangente nicht senkrecht zur x-Achse, so berühren auch die Projektionen beider Kurven auf die xy-Ebene und ebenso ihre Projektionen auf die xz-Ebene einander in mindestens r^{ter} Ordnung, und eine dieser beiden Berührungen ist dabei von gerade r^{ter} Ordnung.

299. Oskulierende Kurven. Liegt außer einer Kurve

$$y = f(x), \quad z = g(x) \tag{1}$$

eine *Kurvenschar*

$$y = F(x, a_1, a_2, \ldots a_n), \quad z = G(x, a_1, a_2, \ldots a_n) \tag{2}$$

mit n willkürlichen Konstanten $a_1, a_2, \ldots a_n$ vor, so kann man nach derjenigen Kurve der Schar fragen, die mit der gegebenen Kurve (1) an einer bestimmten Stelle x eine Berührung von möglichst hoher Ordnung eingeht. Da Satz 18 der vorigen Nummer zu $2(r+1)$ Bedingungen für eine Berührung in der r^{ten} Ordnung führt, so kann man im allgemeinen erwarten, daß sie sich durch passende Wahl von $a_1, a_2, \ldots a_n$ erfüllen lassen, wenn $n \geqq 2(r+1)$ ist. Es ist jedoch möglich, daß einige Konstanten noch ganz willkürlich bleiben, so daß es in der Schar (2) nicht eine einzige, sondern *unzählig viele Kurven gibt*, die mit der Kurve (1) an der vorgeschriebenen Stelle eine Berührung in der höchsten möglichen Ordnung eingehen. Diese Kurven heißen die dort *oskulierenden Kurven* der Schar.

300. Der Krümmungskreis als oskulierender Kreis. Die allgemeinen Gleichungen eines Kreises im Raume enthalten die Koordinaten des Mittelpunktes, den Radius und zwei der Richtungskosinus der Senkrechten zur Kreisebene, so daß hier

die Zahl n der vorigen Nummer gleich *sechs* ist. Aus $n=2(r+1)$ folgt nun $r=2$, so daß wir vermuten dürfen, daß es gerade *einen* Kreis gibt, der eine gegebene Kurve an einer gegebenen Stelle in der höchsten möglichen Ordnung, und zwar in der *zweiten*, berührt. In der Tat gibt es gerade einen solchen oskulierenden Kreis. Denn wenn die Berührung von zweiter Ordnung sein soll, so müssen die ersten und zweiten Ableitungen von y und z beim Kreise mit denen bei der Kurve übereinstimmen; der Kreis muß also in der Schmiegungsebene des Kurvenpunktes, folglich seine Mitte auf der Hauptnormale liegen, da er die Kurve berühren soll. Weil auch der Krümmungsradius von den Ableitungen bis zur zweiten Ordnung abhängt, so muß er der Radius des Kreises sein, d. h. *der oskulierende Kreis ist der Krümmungskreis.* Er berührt im allgemeinen in nicht höherer als zweiter Ordnung, denn wenn die Berührung von dritter Ordnung wäre, so würde die Torsion der Kurve an der betrachteten Stelle mit der des Kreises übereinstimmen, die jedoch nach Satz 6 in Nr. 275 gleich Null ist. Also folgt:

Satz 20: Derjenige Kreis, der mit einer Raumkurve an einer Stelle, deren Torsion nicht gleich Null ist, eine Berührung von möglichst hoher Ordnung eingeht, ist der Krümmungskreis, und seine Berührung ist von gerade zweiter Ordnung.

Ist die Torsion dort gleich Null, so wird übrigens der Krümmungskreis im allgemeinen die Kurve auch dann nur in der zweiten Ordnung berühren, denn dieser Fall tritt z. B. bei den *ebenen* Kurven ein, vgl. Satz 6 in Nr. 275 und Satz 20 und 21 in Nr. 218.

301. Berührung zwischen zwei Flächen. Zwei Flächen berühren einander, wenn sie einen Punkt M und die Tangentenebene von M gemein haben. Legen wir durch die gemeinsame Normale von M eine beliebige Ebene, so schneidet sie die beiden Flächen in zwei ebenen Kurven k und k_1, die einander in M berühren. Die Ordnung dieser Berührung kann für verschiedene Schnittebenen verschieden sein. Ist sie für keine Schnittebene kleiner als r und für mindestens eine gleich r, so sagen wir, daß die Flächen einander in M in gerade r^{ter} Ordnung berühren.

Die gemeinsame Normale sei zunächst der z-Achse parallel, und die Schnittebene bilde mit der xz-Ebene den Winkel ω. Ferner seien x, y, z die Koordinaten von M. In der Schnittebene ziehen wir eine zur Normale benachbarte Gerade, die k und k_1 in M' und M_1' treffe, so daß $x + \Delta x$ und $y + \Delta y$ gemeinsame x- und y-Koordinaten von M' und M_1' sind, während M' und M_1' verschiedene z-Koordinaten $z + \Delta z$ und $z + \Delta z_1$ haben werden. Nach Nr. 214 ist zu fordern, daß die Differenz $\Delta z - \Delta z_1$ mit der Entfernung $\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ zwischen der Normale und $M'M_1'$ mindestens in der $(r+1)^{\text{ten}}$ Ordnung gleich Null werde, wie immer auch ω gewählt sein mag, und daß dies für wenigstens einen Wert von ω in gerade $(r+1)^{\text{ter}}$ Ordnung der Fall sei. Sind die Koordinaten z und z_1 der beiden Flächen solche Funktionen von x und y, die mit ihren Ableitungen bis zu denen von $(r+1)^{\text{ter}}$ Ordnung stetig in der Umgebung des betrachteten Wertepaares x, y sind, so ist also nach Satz 28 in Nr. 137 zu verlangen, daß für beide Flächen an der betrachteten Stelle:

$$(1) \qquad dz = dz_1, \quad d^2 z = d^2 z_1, \quad \ldots \quad d^{(r)} z = d^{(r)} z_1$$

sei, sobald $dx = \varrho \cos \omega$, $dy = \varrho \sin \omega$ gesetzt wird, und daß wenigstens für einen Wert von ω:

$$(2) \qquad d^{(r+1)} z \neq d^{(r+1)} z_1$$

sei. Da die Bedingungen (1) unabhängig von dem Werte von ω, also für alle Differentiale dx und dy gelten sollen, so müssen an der betrachteten Stelle nicht nur z und z_1, sondern auch alle partiellen Ableitungen von z und z_1 bis zu denen von r^{ter} Ordnung entsprechend gleiche Werte haben. Wegen (2) darf dies jedoch nicht für alle Ableitungen von $(r+1)^{\text{ter}}$ Ordnung gelten.

Daß dieser Schluß von der Annahme, daß die gemeinsame Normale zur z-Achse parallel sei, unabhängig ist, erkennt man wie in Nr. 298 durch Einführung eines neuen Achsenkreuzes. Es darf nur die neue z-Achse nicht parallel zur Tangentenebene von M sein. Dies ist sicher nicht der Fall, wenn die ersten Ableitungen von z und z_1 stetig sind. Somit folgt:

Satz 21: Wenn die beiden Flächen:

$$z = f(x, y) \quad \textit{und} \quad z = F(x, y)$$

einander in einem Punkte (x, y, z) *berühren, so ist die Berührung von gerade* r^{ter} *Ordnung, wenn für die zugehörigen Werte von* x *und* y *die Funktion* $f(x, y)$ *nebst allen ihren partiellen Ableitungen bis zur* r^{ten} *Ordnung mit der Funktion* $F(x, y)$ *nebst ihren entsprechenden partiellen Ableitungen bis zur* r^{ten} *Ordnung übereinstimmt, während diese Übereinstimmung nicht mehr bei allen Ableitungen von der* $(r+1)^{ten}$ *Ordnung besteht. Dabei wird vorausgesetzt, daß die Funktionen* f *und* F *nebst allen Ableitungen bis zur* $(r+1)^{ten}$ *Ordnung in der Umgebung der betrachteten Werte* x *und* y *stetig seien.*

Insgesamt ergeben sich $\frac{1}{2}(r+1)(r+2)$ Bedingungen, da ja eine Funktion von zwei Veränderlichen $k+1$ partielle Ableitungen von k^{ter} Ordnung hat.

302. Oskulierende Flächen. Liegt außer einer bestimmten Fläche $z = f(x, y)$ eine *Flächenschar:*

$$z = F(x, y, a_1, a_2, \dots a_n)$$

mit n willkürlichen Konstanten $a_1, a_2, \dots a_n$ vor, so kann man nach denjenigen Flächen der Schar fragen, die mit der gegebenen Fläche in einem gegebenen Punkte eine Berührung von möglichst hoher Ordnung eingehen. Sie heißen die *oskulierenden* Flächen. Da wir zu $\frac{1}{2}(r+1)(r+2)$ Bedingungen für eine Berührung von r^{ter} Ordnung gelangten, ist zu erwarten, daß sich oskulierende Flächen mit einer Berührung in r^{ter} Ordnung ergeben werden, wenn die Zahl n der willkürlichen Konstanten mindestens gleich $\frac{1}{2}(r+1)(r+2)$ ist. Dabei werden jedoch im allgemeinen mehrere Konstanten willkürlich bleiben, so daß eine *Schar von oskulierenden Flächen* hervorgeht. Z. B. wenn die Flächenschar die aller *Kugeln* ist, so enthält ihre Gleichung *vier* wesentliche Konstanten. Die Bedingung $\frac{1}{2}(r+1)(r+2) \leqq 4$ gibt hier $r = 1$. In der Tat gibt es, wie man zeigen könnte, unter allen Kugeln, die eine Fläche an einer bestimmten Stelle berühren, im allgemeinen keine, die in höherer als erster Ordnung berührt.

Zehntes Kapitel.

Flächenkurven und Flächenfamilien.

---

§ 1. Die Krümmungsradien eines Flächenpunktes.

303. Vorbemerkung. Da wir uns jetzt zu Kurven auf Flächen, kurz gesagt zu *Flächenkurven*, wenden, also die Theorie der Kurven mit der Theorie der Flächen verbinden wollen, so sei vorweg bemerkt, daß wir uns die Fläche meistens in der Form $z = f(x, y)$ gegeben denken werden. Dann ist eine Flächenkurve definiert, wenn x und y irgend zwei Funktionen einer Hilfsveränderlichen sind und für z die aus $z = f(x, y)$ hervorgehende Funktion dieser Veränderlichen gesetzt wird. Wir nehmen an, daß alle vorkommenden Funktionen nebst ihren Ableitungen, so weit sie gebraucht werden, in der Umgebung einer betrachteten Stelle der Fläche stetig seien.

Wie in Nr. 85 seien mit p und q die ersten und mit r, s, t die zweiten partiellen Ableitungen von $z = f(x, y)$ bezeichnet, so daß auf der Fläche:

$$(1) \quad dz = p\,dx + q\,dy, \quad dp = r\,dx + s\,dy, \quad dq = s\,dx + t\,dy$$

ist. Das vollständige Differential zweiter Ordnung von z lautet:

$$(2) \qquad d^2z = r\,dx^2 + 2s\,dx\,dy + t\,dy^2.$$

304. Krümmungsradius einer Flächenkurve. Es sei M oder (x, y, z) ein Flächenpunkt, durch den eine gewisse Kurve auf der Fläche gehe. Wie immer bezeichnen wir mit α, β, γ bzw. l, m, n die Richtungskosinus der positiven Tangente bzw. Hauptnormale der Kurve an der Stelle M, mit R ihren Krümmungsradius in M und wie in Nr. 260 mit $d\sigma$ ihren Kontingenzwinkel, d. h. mit σ die Bogenlänge der sphärischen

Indikatrix der Tangenten der Kurve. Dann ist $R d\sigma$ das Bogendifferential der Flächenkurve, so daß nach (1) in Nr. 259 und nach (4) in Nr. 272 kommt:

$$(1)\qquad \frac{dx}{d\sigma} = R\alpha, \quad \frac{dy}{d\sigma} = R\beta, \quad \frac{dz}{d\sigma} = R\gamma,$$

$$(2)\qquad \frac{d\alpha}{d\sigma} = l, \quad \frac{d\beta}{d\sigma} = m, \quad \frac{d\gamma}{d\sigma} = n.$$

Sind ferner X, Y, Z die Richtungskosinus der positiven Flächennormale von M, so ist nach (10) in Nr. 253:

$$(3)\quad X = \frac{-p}{\sqrt{p^2+q^2+1}}, \quad Y = \frac{-q}{\sqrt{p^2+q^2+1}}, \quad Z = \frac{1}{\sqrt{p^2+q^2+1}},$$

wobei die Wurzel positiv ist. Für den Kosinus des Winkels θ zwischen der positiven Flächen- und Hauptnormale von M ergibt sich nach (2) und (3):

$$(4)\quad \cos\theta = Xl + Ym + Zn = \left(\frac{d\gamma}{d\sigma} - p\frac{d\alpha}{d\sigma} - q\frac{d\beta}{d\sigma}\right) : \sqrt{p^2+q^2+1}.$$

Werden in die Formeln (1) der vorigen Nummer die Werte von dx, dy, dz aus (1) eingesetzt, so kommt:

$$\gamma = p\alpha + q\beta, \quad \frac{dp}{d\sigma} = R(r\alpha + s\beta), \quad \frac{dq}{d\sigma} = R(s\alpha + t\beta).$$

Differentiation der ersten Gleichung nach σ gibt mit Rücksicht auf die beiden letzten:

$$\frac{d\gamma}{d\sigma} - p\frac{d\alpha}{d\sigma} - q\frac{d\beta}{d\sigma} = R(r\alpha^2 + 2s\alpha\beta + t\beta^2).$$

Wird dies in (4) eingesetzt, so kommt:

$$(5)\qquad R = \frac{\sqrt{p^2+q^2+1}}{r\alpha^2 + 2s\alpha\beta + t\beta^2}\cos\theta.$$

Diese Formel drückt den Krümmungsradius der Flächenkurve in M erstens durch die Größen p, q, r, s, t aus, die sich nur auf die Fläche beziehen, zweitens durch die beiden Richtungskosinus α, β der Kurventangente und drittens durch den Kosinus des Winkels θ zwischen der Flächennormale und der Hauptnormale der Kurve in M. Da der Krümmungsradius nach Nr. 260 stets positiv ist, so sehen wir:

Ist $r\alpha^2 + 2s\alpha\beta + t\beta^2$ positiv bzw. negativ, so gilt dasselbe von $\cos\theta$, d. h. dann bildet die positive Flächennormale mit der positiven Hauptnormale einen spitzen bzw. stumpfen Winkel.

Weil der Krümmungsmittelpunkt auf der positiven Hauptnormale liegt, so liegt er im einen oder anderen Falle auf der positiven bzw. negativen Seite der Tangentenebene der Fläche.

305. Der Meusniersche Satz. Wir legen durch den Flächenpunkt M diejenige Ebene, die die Flächennormale und die Tangente der Flächenkurve enthält. Sie schneidet die Fläche in einer *ebenen* Kurve, die man einen *Normalschnitt* der Fläche in M nennt und zwar denjenigen, der zur gegebenen Kurventangente gehört. Die Hauptnormale des Normalschnittes in M fällt mit der Flächennormale in M zusammen. Als positiven Sinn auf dem Normalschnitte wählen wir denjenigen, der der positiven Kurventangente in M entspricht. Je nachdem die Hauptnormale des Normalschnittes gleichsinnig oder ungleichsinnig mit der Flächennormale zusammenfällt, ist der Kosinus des Winkels der beiden Geraden gleich $+1$ oder -1. Ist R_0 der Krümmungsradius des Normalschnittes in M, so gibt folglich die Formel (5) der vorigen Nummer, die ja für beliebige Flächenkurven gilt, sofort:

$$R_0 = \pm \frac{\sqrt{p^2+q^2+1}}{r\alpha^2 + 2s\alpha\beta + t\beta^2}.$$

Da R_0 nach Nr. 260 positiv ist, gilt das obere oder untere Zeichen, je nachdem $r\alpha^2 + 2s\alpha\beta + t\beta^2$ positiv oder negativ wird.

Es erscheint jedoch zweckmäßig, bei den Normalschnitten von denjenigen Vorzeichen-Festsetzungen abzusehen, die wir in Nr. 260, 261 für Raumkurven machten, und zwar deshalb, weil diese Normalschnitte *ebene* Kurven sind, die mit der Gestalt der Fläche an der Stelle M in engem Zusammenhange stehen. Wir wollen daher unter R_0 nicht den stets positiven Krümmungsradius des Normalschnittes in M verstehen, sondern den mit $+1$ oder -1 multiplizierten Wert, d. h. wir setzen:

$$R_0 = \frac{\sqrt{p^2+q^2+1}}{r\alpha^2 + 2s\alpha\beta + t\beta^2} \tag{1}$$

mit positiver Wurzel, so daß R_0 *positiv oder negativ ist, je nachdem der Krümmungsmittelpunkt des Normalschnittes auf der positiven oder negativen Flächennormale liegt.*

Die letzte Formel (1) und die Formel (5) von Nr. 304 ergeben nun:

(2) $$R = R_0 \cos \theta.$$

In dieser Formel liegt der

Satz 1 (Meusnierscher Satz): Der stets positive Krümmungsradius einer Flächenkurve in einem ihrer Punkte ist gleich dem Krümmungsradius des zugehörigen Normalschnittes, multipliziert mit dem Kosinus des Winkels zwischen der positiven Hauptnormale der Flächenkurve und der positiven Flächennormale. Dabei ist der Krümmungsradius des Normalschnittes positiv oder negativ gerechnet, je nachdem der Krümmungsmittelpunkt des Normalschnittes auf der positiven oder negativen Flächennormale liegt.

Da der Krümmungsmittelpunkt auf der positiven Hauptnormale liegt und vom Kurvenpunkte die Entfernung R hat, folgt weiter:

Satz 2: Alle Flächenkurven durch einen Punkt M und mit derselben Tangente in M haben in M Krümmungskreise, die auf derjenigen Kugel liegen, die den Krümmungskreis des zugehörigen Normalschnittes zum größten Kreise hat.

Hierdurch wird die Untersuchung der Krümmung beliebiger Flächenkurven, die durch M gehen, auf die Untersuchung der Krümmung der Normalschnitte an dieser Stelle zurückgeführt.

306. Hauptschnitte eines Flächenpunktes. Durch die Normale eines Flächenpunktes M lassen sich beliebig viele Normalschnitte legen. Sie werden in M verschiedene Krümmungsradien haben, aber die zu M gehörigen Krümmungsmittelpunkte liegen sämtlich auf der Flächennormale von M. Auch deshalb ist die in voriger Nummer getroffene Festsetzung über das Vorzeichen der Krümmungsradien der Normalschnitte gerechtfertigt, da diese Flächennormale nach Nr. 253 einen bestimmten positiven Sinn hat. Wir wollen von jetzt an den mit Vorzeichen gemessenen Krümmungsradius desjenigen Normalschnittes, der in M die Tangente mit den Richtungskosinus α, β, γ hat, mit R (statt R_0) bezeichnen, so daß nach (1) in voriger Nummer:

(1) $$R = \frac{\sqrt{p^2 + q^2 + 1}}{r\alpha^2 + 2s\alpha\beta + t\beta^2}$$

ist. Übersichtlicher wird die Formel, wenn wir den Flächen-

punkt M selbst als Anfangspunkt und seine positive Normale als z-Achse wählen, so daß die xy-Ebene die Tangentenebene von M wird. Nach (3) in Nr. 304 ist dann für den Punkt M wegen $Z = 1$ auch $p^2 + q^2 = 0$, d. h. $p = 0$ und $q = 0$. Ferner sei ω der Winkel, den die durch M gezogene Tangente mit der positiven x-Achse bildet, so daß $\alpha = \cos\omega$, $\beta = \sin\omega$ wird. Dann ergibt (1):

$$\text{(2)} \qquad \begin{aligned} \frac{1}{R} &= r\cos^2\omega + 2s\cos\omega\sin\omega + t\sin^2\omega \\ &= \tfrac{1}{2}(r+t) + \tfrac{1}{2}(r-t)\cos 2\omega + s\sin 2\omega. \end{aligned}$$

Zu ω und zu $\omega + \pi$ gehören hiernach dieselben Werte von R, was damit im Einklange steht, daß beiden Winkeln derselbe Normalschnitt entspricht.

Bedeutet $2\omega_0$ denjenigen Winkel zwischen 0 und π, für den

$$\text{(3)} \qquad \operatorname{tg} 2\omega_0 = \frac{2s}{r-t}, \text{ also } \sin 2\omega_0 = \frac{2s}{\sqrt{(r-t)^2 + 4s^2}} > 0$$

ist, so können wir (2) so schreiben:

$$\text{(4)} \qquad \frac{1}{R} = \tfrac{1}{2}(r+t) + \tfrac{1}{2}\cos 2(\omega - \omega_0)\cdot\sqrt{(r-t)^2 + 4s^2},$$

wobei die Wurzel das Vorzeichen der Ableitung s hat. Hiernach erreicht $1 : R$ für diejenigen Werte von ω ein Maximum oder Minimum, für die $\cos 2(\omega - \omega_0) = \pm 1$ ist, d. h. für $\omega = \omega_0$ und für $\omega = \omega_0 + \frac{1}{2}\pi$. Für $\omega = \omega_0$ hat $1 : R$ das Maximum oder Minimum, je nachdem s positiv oder negativ ist, und für $\omega = \omega_0 + \frac{1}{2}\pi$, je nachdem s negativ oder positiv ist. *Es gibt also zwei zueinander senkrechte Normalschnitte, für die R ein Maximum bzw. Minimum hat.* Diese Normalschnitte heißen die *Hauptschnitte* des Flächenpunktes M.

307. Nabelpunkte. Ehe wir das letzte Ergebnis als Satz formulieren, ist noch zu bemerken, daß der Winkel ω_0 unbestimmt wird, wenn $s = 0$ und $r = t$ ist. In diesem Ausnahmefalle reduziert sich die Formel (2) der vorigen Nummer auf $1 : R = r$, d. h. *dann haben alle Normalschnitte von M denselben Krümmungsradius.* Solche Flächenpunkte M heißen *Nabelpunkte.*

Also sagen wir:

Satz 3: Unter den Normalschnitten eines regulären Flächenpunktes, der kein Nabelpunkt ist, gibt es stets zwei, für die der Krümmungsradius ein Maximum bzw. Minimum hat, und sie sind zueinander senkrecht.

Die allgemeine Formel (1) in voriger Nummer, bei der ja die besondere Annahme über das Achsenkreuz nicht gemacht worden war, zeigt, welches die allgemeine Bedingung für einen Nabelpunkt ist. Da nämlich α, β, γ die Richtungskosinus der Tangente sind, und da die Tangente auf der Flächennormale senkrecht steht, so sind α, β, γ nach (3) in Nr. 304 an die beiden Bedingungen $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1$ und $\alpha p+\beta q=\gamma$ gebunden, d. h. zwischen α und β besteht die einzige Bedingung:

$$\alpha^2+\beta^2+(\alpha p+\beta q)^2-1=0.$$

Ein Nabelpunkt liegt also vor, wenn der Nenner des Wertes (1) von R in voriger Nummer unter dieser Bedingung für alle Werte von α und β derselbe ist, d. h. wenn es zwei von α und β unabhängige Größen u und v derart gibt, daß für alle Werte von α und β:

$$r\alpha^2+2s\alpha\beta+t\beta^2=u\left[\alpha^2+\beta^2+(\alpha p+\beta q)^2-1\right]+v$$

wird. Es muß dann $u=v$ und

$$r=u(1+p^2), \quad s=upq, \quad t=u(1+q^2)$$

sein. Elimination von u liefert demnach den

Satz 4: Ein Punkt der Fläche $z=f(x,y)$ ist dann und nur dann ein Nabelpunkt, wenn für ihn:

$$r:s:t=(1+p^2):pq:(1+q^2)$$

ist, wobei p, q, r, s, t die Ableitungen erster und zweiter Ordnung von z bedeuten.

Beispiel: Liegt das *Ellipsoid:*

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \tag{1}$$

vor, so ergibt Differentiation nach x bzw. y:

$$\frac{x}{a^2}+\frac{zp}{c^2}=0, \quad \frac{y}{b^2}+\frac{zq}{c^2}=0, \tag{2}$$

also nochmalige Differentiation:

$$\frac{1}{a^2}+\frac{p^2+zr}{c^2}=0, \quad pq+zs=0, \quad \frac{1}{b^2}+\frac{q^2+zt}{c^2}=0. \tag{3}$$

Um die Nabelpunkte zu finden, ersetzen wir hierin r, s, t nach Satz 4 durch $u(1+p^2)$, upq, $u(1+q^2)$ und erhalten:

$$uz(1+p^2)+p^2+\frac{c^2}{a^2}=0,\quad (1+uz)pq=0,\quad uz(1+q^2)+q^2+\frac{c^2}{b^2}=0.$$

Ist $1+uz=0$, so folgt $a^2=b^2=c^2$, was wir ausschließen. Wenn $1+uz \neq 0$ ist, gibt die zweite Gleichung entweder $p=0$ oder $q=0$. Nehmen wir $a^2>b^2>c^2$ an, so liefert die Annahme $p=0$ für q keinen reellen Wert. Daher verbleibt die Annahme $q=0$. In diesem Falle liefern die vorhergehenden Gleichungen:

$$x=a\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2-c^2}},\quad y=0,\quad z=c\sqrt{\frac{b^2-c^2}{a^2-c^2}},$$

wobei die Vorzeichen der Wurzeln beliebig gewählt werden können. *Das Ellipsoid hat daher vier Nabelpunkte; sie liegen in der xz-Ebene, d. h. in der Ebene der größten und kleinsten Achse des Ellipsoids.* Hierbei ist vorausgesetzt, daß alle drei Achsen verschieden lang seien.

308. Der Eulersche Satz. Den Punkt M der Fläche wollen wir wieder als Anfangspunkt und seine positive Normale als z-Achse wählen, wie in Nr. 306. Außerdem können wir die beiden Hauptschnitte, die ja zueinander senkrecht sind, als xz- und yz-Ebene benutzen, d. h. wir dürfen $\omega_0=0$ oder also $s=0$ nach (3) in Nr. 306 annehmen, so daß die Formel (2) von Nr. 306 diese wird:

$$\frac{1}{R}=r\cos^2\omega+t\sin^2\omega. \tag{1}$$

Die Krümmungsradien der beiden Hauptschnitte heißen die *Hauptkrümmungsradien* des Flächenpunktes, ihre reziproken Werte seine *Hauptkrümmungen.* Wenn wir die Hauptkrümmungsradien mit R_1 und R_2 bezeichnen, so ergeben sie sich jetzt aus (1) durch die Annahmen $\omega=0$ und $\omega=\frac{1}{2}\pi$, so daß

$$\frac{1}{R_1}=r,\qquad \frac{1}{R_2}=t \tag{2}$$

ist. Aus (1) folgt nun weiter:

Satz 5 (Eulerscher Satz): Sind R_1 und R_2 die Hauptkrümmungsradien eines Flächenpunktes und ist ω der Winkel

eines beliebigen Normalschnittes des Punktes mit dem ersten Hauptschnitte, so ist die Krümmung dieses Normalschnittes:

$$\frac{1}{R} = \frac{\cos^2\omega}{R_1} + \frac{\sin^2\omega}{R_2}.$$

Ersetzen wir ω durch $\omega + \frac{1}{2}\pi$, d. h. drehen wir den Normalschnitt um einen rechten Winkel, so ergibt sich für die Krümmung $1 : R'$ des neuen Schnittes:

$$\frac{1}{R'} = \frac{\sin^2\omega}{R_1} + \frac{\cos^2\omega}{R_2},$$

so daß folgt:

$$\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}.$$

Demnach:

Satz 6: *Die Summe der Krümmungen zweier zueinander senkrechter Normalschnitte eines Flächenpunktes ist für alle derartigen Paare in diesem Punkte die gleiche.*

Die halbe Summe der Hauptkrümmungen $1 : R_1$ und $1 : R_2$ heißt die *mittlere Krümmung* der Fläche in dem betrachteten Punkte. Also:

Satz 7: *Das arithmetische Mittel der Krümmungen zweier zueinander senkrechter Normalschnitte eines Flächenpunktes ist gleich der mittleren Krümmung der Fläche in diesem Punkte.*

Ersetzen wir ω in Satz 5 durch $-\omega$, so bleibt die Formel des Satzes ungeändert. Dies bedeutet:

Satz 8: *Zwei solche Normalschnitte eines Flächenpunktes, die zu einem der Hauptschnitte symmetrisch liegen, haben übereinstimmende Krümmung.*

309. Überblick über die Krümmungen aller Normalschnitte eines Flächenpunktes. Nach dem Eulerschen Satze ist die Krümmung $1 : R$ eines beliebigen Normalschnittes eine Funktion des Winkels ω, den die Ebene des Schnittes mit der einen Hauptschnittebene bildet. Es ergibt sich durch Differentiation nach ω:

$$\frac{d}{d\omega}\left(\frac{1}{R}\right) = \sin 2\omega \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right).$$

Wir können, um zu einem Überblicke zu gelangen, den Winkel ω nach dem letzten Satze auf das Intervall $0 \leqq \omega \leqq \frac{1}{2}\pi$ beschränken, in dem $\sin 2\omega$ positiv ist. Wenn ω von 0 bis

$\frac{1}{2}\pi$ wächst, so nimmt $1:R$ von $1:R_1$ bis $1:R_2$ entweder beständig zu oder beständig ab.

Sind R_1 und R_2 beide positiv oder beide negativ, so ist auch $1:R$ stets positiv oder stets negativ, d. h. dann sind *alle* Normalschnitte, von der positiven Normale aus betrachtet, konkav oder alle konvex.

Wenn dagegen R_1 und R_2 verschiedene Vorzeichen haben, so nimmt $1:R$ im ersten Quadranten einmal den Wert Null an, nämlich für denjenigen Winkel ω zwischen 0 und $\frac{1}{2}\pi$, für den $\operatorname{tg}^2\omega = -R_2 : R_1$ ist. Die zugehörige Normalschnittebene sowie diejenige, die zu dieser Ebene symmetrisch hinsichtlich der Hauptschnitte ist, teilen die Gesamtheit aller Normalschnitte des Punktes M in zwei Klassen. Die der einen Klasse sind, von der positiven Normale aus betrachtet, konvex und die der andern konkav, d. h. die Fläche ist an der Stelle M sattelförmig.

§ 2. Die Dupinschen Indikatrizen.

310. Oskulierende Flächen zweiter Ordnung. Wieder sei der Flächenpunkt M der Anfangspunkt, seine Tangentenebene die xy-Ebene; seine Hauptschnitte seien die xz- bzw. yz-Ebene, so daß, wenn $z = f(x, y)$ die Flächengleichung ist und R_1, R_2 die Hauptkrümmungsradien von M sind, die ersten und zweiten Ableitungen von z für M nach Nr. 306 und 308 die Werte haben:

$$(1) \qquad p = 0, \quad q = 0, \quad r = \frac{1}{R_1}, \quad s = 0, \quad t = \frac{1}{R_2} \cdot$$

Wir wollen jetzt diejenigen *Flächen zweiter Ordnung* bestimmen, die mit der gegebenen Fläche im Anfangspunkte M eine Berührung von möglichst hoher Ordnung eingehen. Die allgemeine Gleichung einer Fläche zweiter Ordnung, die den Anfangspunkt enthält, lautet:

$$(2) \quad a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + a_{33}z^2 + \\ + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z = 0.$$

Wegen Satz 21 in Nr. 301 berechnen wir zunächst die Ableitungen p, q, r, s, t erster und zweiter Ordnung der durch (2)

definierten Funktion z von x und y. Einmalige vollständige Differentiation nach x bzw. y ergibt:

$$a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14} + (a_{13}x + a_{23}y + a_{33}z + a_{34})p = 0,$$
$$a_{12}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24} + (a_{13}x + a_{23}y + a_{33}z + a_{34})q = 0.$$

Wir fordern, daß für $x = y = z = 0$ auch $p = q = 0$ sei, nach (1). Dies tritt für $a_{14} = a_{24} = 0$ ein. Von der Annahme $a_{34} = 0$ ist übrigens abzusehen, da sonst die Fläche (2) ein Kegel wäre, der im Anfangspunkt seine Spitze, d. h. einen singulären Punkt, hätte. Differenzieren wir die beiden letzten Gleichungen noch einmal vollständig nach x bzw. y, so gehen drei Gleichungen für r, s, t hervor:

$$a_{11} + 2a_{13}p + a_{33}p^2 + (a_{13}x + a_{23}y + a_{33}z + a_{34})r = 0,$$
$$a_{12} + a_{13}q + a_{33}p + a_{33}pq + (a_{13}x + a_{23}y + a_{33}z + a_{34})s = 0,$$
$$a_{22} + 2a_{23}q + a_{33}q^2 + (a_{13}x + a_{23}y + a_{33}z + a_{34})t = 0.$$

Wir haben nach Satz 21 in Nr. 301 zu fordern, daß hieraus für $x = y = z = p = q = 0$ die unter (1) angegebenen Werte von r, s, t hervorgehen. Also muß sein:

$$a_{11} + \frac{a_{34}}{R_1} = 0, \quad a_{12} = 0, \quad a_{22} + \frac{a_{34}}{R_2} = 0.$$

Da $a_{34} \neq 0$ ist, darf $a_{34} = 1$ gesetzt werden. Nach (2) kommt dann:

$$(3) \qquad -\left(\frac{x^2}{R_1} + \frac{y^2}{R_2} - 2z\right) + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + a_{33}z^2 = 0$$

als die Gleichung der allgemeinsten Fläche zweiter Ordnung, die in M mit der gegebenen Fläche eine Berührung von mindestens zweiter Ordnung eingeht und in M keinen singulären Punkt hat. Berechnet man die dritten Ableitungen von z nach x und y und setzt sie gleich den Werten, die sie für $x = y = z = 0$ bei der gegebenen Fläche $z = f(x, y)$ haben, so erkennt man, daß sich mehr Bedingungen als verfügbare Konstanten a_{13}, a_{23}, a_{33} ergeben. So lange wir also nicht für den Flächenpunkt M spezielle Annahmen machen, gibt es unter den Flächen (3) keine, die mit der gegebenen Fläche eine Berührung von höherer als zweiter Ordnung eingeht. Die Flächen (3) sind folglich nach Nr. 302 als die in M *oskulierenden* Flächen zweiter Ordnung zu bezeichnen.

[310

311. Die Indikatrizen. *Dupin*, dem wir diese Betrachtungen verdanken, bestimmte denjenigen *Kegelschnitt*, in dem eine der oskulierenden Flächen zweiter Ordnung durch die Ebene geschnitten wird, die durch den Mittelpunkt der Fläche zweiter Ordnung geht und parallel zur Tangentenebene von M ist. Eine der Flächen (3) der vorigen Nummer hat einen Mittelpunkt M_0 oder (x_0, y_0, z_0), der nach den Regeln der analytischen Geometrie durch die Bedingungen bestimmt wird:

$$(1) \qquad \begin{cases} x_0 = R_1 a_{13} z_0, \quad y_0 = R_2 a_{23} z_0, \\ a_{13} x_0 + a_{23} y_0 + a_{33} z_0 + 1 = 0. \end{cases}$$

In der Ebene durch M_0 parallel zur xy-Ebene benutzen wir als $\mathfrak{x}$- und $\mathfrak{y}$-Achse die durch M_0 parallel zur x-Achse und y-Achse gezogenen Geraden, so daß $x = x_0 + \mathfrak{x}$, $y = y_0 + \mathfrak{y}$, $z = z_0$ zu setzen ist. Tun wir dies in der Gleichung (3) der vorigen Nummer, so ergibt sich mit Rücksicht auf (1) die Gleichung des Kegelschnittes:

$$(2) \qquad \frac{\mathfrak{x}^2}{R_1} + \frac{\mathfrak{y}^2}{R_2} = z_0 .$$

Projizieren wir ihn in der Richtung des Strahles von seiner Mitte M_0 nach dem Flächenpunkte M auf die Tangentenebene von M, d. h. auf die xy-Ebene, so ergibt sich ein kongruenter Kegelschnitt, dessen Mitte M ist und dessen Achsen in den Hauptschnitten von M gelegen sind. Dieser Kegelschnitt heißt eine *Indikatrix* des Flächenpunktes M.

Da wir über a_{13}, a_{23}, a_{33} willkürlich verfügen können, dürfen wir einen *beliebigen* Punkt M_0 als Mitte der oskulierenden Fläche zweiter Ordnung wählen, denn wenn wir x_0, y_0, z_0 irgendwie wählen, lassen sich a_{13}, a_{23} und a_{33} aus (1) berechnen. Die Größe z_0 in (2) ist also willkürlich. Wir kommen mithin nicht nur zu *einer* Kurve, sondern zu einer Schar von Kegelschnitten von der Form:

$$(3) \qquad \frac{x^2}{R_1} + \frac{y^2}{R_2} = \text{konst.}$$

Wenn wir nicht gerade durch die Mitte M_0 einer der oskulierenden Flächen zweiter Ordnung die zur Tangentenebene von M parallele Ebene legen, sondern in beliebiger Höhe über der Tangentenebene, so gehen bekanntlich als

Schnittkurven mit der Fläche zweiter Ordnung lauter *ähnliche* Kegelschnitte hervor, deren Mitten auf MM_0 gelegen sind. Ihre Projektion auf die Tangentenebene von M in der Richtung von M_0 nach M liefert also ebenfalls die Kegelschnitte (3). Hiernach hat sich ergeben:

Satz 9: Alle diejenigen Flächen zweiter Ordnung, die eine gegebene Fläche in einem ihrer Punkte M in der zweiten Ordnung berühren, werden von den Ebenen parallel zur Tangentenebene von M in solchen Kegelschnitten getroffen, die, in der Richtung von ihren Mitten nach M auf die Tangentenebene von M projiziert, die Gleichungen haben:

$$\frac{x^2}{R_1} + \frac{y^2}{R_2} = konst.,$$

wenn R_1 und R_2 die Hauptkrümmungsradien von M und die x- und y-Achse diejenigen Tangenten von M sind, die in den zu R_1 und R_2 gehörigen Hauptschnitten von M liegen.

Wenn wir Polarkoordinaten ω, ϱ in der Tangentenebene von M benutzen, indem wir $x = \varrho \cos \omega$, $y = \varrho \sin \omega$ setzen, so kommt statt (3):

$$\varrho^2 \left(\frac{\cos^2 \omega}{R_1} + \frac{\sin^2 \omega}{R_2} \right) = \text{konst.}$$

Der Eulersche Satz in Nr. 308 gibt also:

$$\frac{\varrho^2}{R} = \text{konst.} \tag{4}$$

Satz 10: Die Krümmungsradien der Normalschnitte eines Flächenpunktes M sind proportional den Quadraten derjenigen Radienvektoren einer der Dupinschen Indikatrizen von M, die in den betreffenden Normalschnittebenen gelegen sind.

312. Elliptische, hyperbolische und parabolische Punkte. Wenn die Hauptkrümmungsradien R_1 und R_2 das nämliche Vorzeichen haben, also alle Normalschnitte von M nach Nr. 309 nach derselben Seite der Tangentenebene hin konvex sind, ergeben sich nur dann reelle Indikatrizen, wenn der Konstanten dasselbe Vorzeichen gegeben wird, und zwar sind sie *Ellipsen*. Deshalb heißt ein Flächenpunkt *elliptisch*, wenn für ihn $R_1 R_2 > 0$ ist.

Wenn R_1 und R_2 verschiedene Vorzeichen haben, so daß die Normalschnitte von M nach Nr. 309 teils nach der einen,

teils nach der anderen Seite der Tangentenebene hin konvex sind, ergeben sich als Indikatrizen lauter reelle *Hyperbeln.* Sie haben sämtlich dieselben *Asymptoten,* da durch $\operatorname{tg}^2 \omega = -R_2 : R_1$ die Winkel ω der Asymptoten mit der x-Achse bestimmt werden. Die Asymptoten liegen nach Nr. 309 in denjenigen Normalschnitten von M, deren Krümmung in M gleich Null ist. Je nachdem die Konstante in der Gleichung der Indikatrizen positiv oder negativ gewählt wird, liegt die Hyperbel im einen oder anderen Winkelfelde der Asymptoten. Ein Flächenpunkt heißt deshalb *hyperbolisch,* wenn für ihn $R_1 R_2 < 0$ ist.

Es kann auch der Fall eintreten, daß $1 : R_1$ oder $1 : R_2$ gleich Null ist. Z. B. im Falle $1 : R_1 = 0$ besteht jede Indikatrix aus zwei zur x-Achse parallelen Geraden und kann als Ausartung einer *Parabel* aufgefaßt werden. In diesem Falle heißt der Flächenpunkt *parabolisch.* Die Krümmungen aller Normalschnitte von M sind hier nach dem Eulerschen Satze in Nr. 308 zwischen Null und $1 : R_2$ gelegen, d. h. alle Normalschnitte sind nach derselben Seite der Tangentenebene hin konvex.

Wäre sowohl $1 : R_1$ als auch $1 : R_2$ gleich Null, so hätten für den Flächenpunkt M alle Normalschnitte nach dem Eulerschen Satze die Krümmung Null. Die allgemeine Formel (1) in Nr. 306 lehrt, *daß dies nur dann eintreten kann, wenn* $r = s = t = 0$ *für* M *ist, und zwar unter Voraussetzung einer beliebigen Lage des Achsenkreuzes.* Solche *singuläre* Flächenpunkte sollen von den allgemeinen Betrachtungen stets ausgeschlossen sein. Für einen solchen singulären Punkt reduziert sich die Gleichung (3) der oskulierenden Flächen zweiter Ordnung in Nr. 310 auf

$$z(2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33}z + 2) = 0;$$

diese Flächen zerfallen also in die Tangentenebene von M und eine beliebige Ebene. Nach Satz 21 in Nr. 301 berührt andererseits eine Ebene $z = ax + by + c$, bei der ja $r = s = t = 0$ ist, eine Fläche in einem Punkte in der Tat nur dann in mindestens zweiter Ordnung, wenn für die Fläche dort auch $r = s = t = 0$ ist.

Für einen *Nabelpunkt* (vgl. Nr. 307) sind die Indikatrizen

Kreise. Ist die gegebene Fläche selbst eine *Fläche zweiter Ordnung,* so gehört sie mit zu ihren oskulierenden Flächen zweiter Ordnung. Die Nabelpunkte einer Fläche zweiter Ordnung sind mithin die Berührungspunkte derjenigen Tangentenebenen, die den Kreisschnitten der Fläche parallel sind, vgl. das Beispiel in Nr. 307.

313. Ableitung früherer Ergebnisse aus den Indikatrizen. Mit Hilfe der bekannten Eigenschaften der Kegelschnitte und auf Grund des Satzes 10 in Nr. 311 lassen sich die Sätze 6 und 8 von Nr. 308 von neuem beweisen, denn bei der Ellipse ist bekanntlich die Summe der Quadrate der reziproken Werte zweier zueinander senkrechter Halbmesser konstant. Außerdem sind bei der Ellipse und bei der Hyperbel zwei Halbmesser, die mit der Hauptachse den gleichen Winkel bilden, gleich lang. Um Satz 6 von Nr. 308 von neuem für einen hyperbolischen Punkt abzuleiten, müssen wir beachten, daß die Konstante in der Formel (4) von Nr. 311 die in der Gleichung der Indikatrizen auftretende Konstante ist. Der Satz 10 von Nr. 311 gilt also für *alle* Normalschnitte eines hyperbolischen Punktes, wenn wir die *beiden* Hyperbeln:

$$\frac{x^2}{R_1} + \frac{y^2}{R_2} = \pm k$$

mit derselben Konstanten k, aber verschiedenen Vorzeichen von k benutzen. Es sind dies zwei sogenannte *konjugierte Hyperbeln.* Für diejenigen Normalschnitte, deren Ebenen die eine oder andere Hyperbel schneiden, dann lautet die Formel (4) von Nr. 311:

$$\frac{\varrho^2}{R} = k \quad \text{bzw.} \quad \frac{\varrho^2}{R} = -k.$$

Bei zwei konjugierten Hyperbeln ist aber die *Differenz* der Quadrate der reziproken Werte zweier zueinander senkrechter Halbmesser konstant. Sind nun ϱ und ϱ' solche Halbmesser und R und R' die zugehörigen Hauptkrümmungsradien, so ist $\varrho^2 = kR$, $\varrho'^2 = -kR'$, also:

$$\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} = \text{konst.}$$

wie in Satz 6 von Nr. 308.

314. Ein Ausnahmefall. Der Eulersche Satz in Nr. 308, nach dem sich die Krümmung eines Normalschnittes eines Flächenpunktes M gesetzmäßig ändert, sobald sich die Ebene um die Normale von M dreht, gilt nur dann, wenn die Ableitungen p, q, r, s, t an der betrachteten Stelle M der Fläche $z = f(x, y)$ bestimmte endliche Werte haben, entsprechend der Voraussetzung in Nr. 303. Daß sonst das Gesetz, nach dem sich die Krümmung eines Normalschnittes ändert, ganz anders sein kann, soll an einem Beispiele gezeigt werden:

Wir betrachten die Fläche:

$$z = \frac{x^2 + y^2}{2\varphi\left(\frac{y}{x}\right)}. \tag{1}$$

Dabei bedeute φ eine gegebene Funktion von $y : x$. Führen wir Polarkoordinaten vermöge $x = \varrho \cos \omega$, $y = \varrho \sin \omega$ ein, so kommt:

$$z = \frac{\varrho^2}{2\varphi(\operatorname{tg} \omega)}. \tag{2}$$

Für einen bestimmten Wert von ω ist dies die Gleichung derjenigen ebenen Kurve, in der die Fläche durch die Ebene $y = x \operatorname{tg} \omega$ geschnitten wird, und zwar geschrieben in den rechtwinkligen Koordinaten ϱ und z. Diese Kurve ist eine *Parabel*, die den Anfangspunkt zum Scheitel hat und deren Scheiteltangente in der xy-Ebene liegt. Der Anfangspunkt ist folglich ein Punkt der Fläche, die z-Achse die Normale dieses Flächenpunktes und die betrachtete Kurve ein Normalschnitt, der zum Anfangspunkte gehört. Da der Krümmungsradius der Parabel $y = cx^2$ im Scheitel gleich $1 : 2c$ ist, hat die durch (2) dargestellte Parabel im Anfangspunkte den Krümmungsradius $R = \varphi(\operatorname{tg} \omega)$, und weil nun die Funktion φ von $y : x$ oder $\operatorname{tg} \omega$ willkürlich gewählt werden kann, so ist der Anfangspunkt ein solcher Punkt der Fläche (1), für den der Eulersche Satz über die Krümmungen der Normalschnitte nicht zu gelten braucht. Für den Anfangspunkt werden aber auch die Ableitungen der durch (1) definierten Funktion z von x und y unbestimmt. Denn φ kann als Funktion von $y : x$ verschiedene Werte annehmen je nach der Art, wie man sich dem Anfangspunkte auf der Fläche nähert.

315. Konjugierte Tangenten. Es sei auf der Fläche $z = f(x, y)$ eine Kurve gegeben, deren Koordinaten x, y, z Funktionen einer Hilfsveränderlichen sind. Die Tangentenebene der Fläche in einem Punkte (x, y, z) oder M der Kurve hat in den laufenden Koordinaten $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ nach (5) in Nr. 253 die Gleichung:

$$(1) \qquad \mathfrak{z} - z - p(\mathfrak{x} - x) - q(\mathfrak{y} - y) = 0.$$

Hierin sind x und y und also auch z, p und q Funktionen der Hilfsveränderlichen. Die Gesamtheit derjenigen Tangentenebenen der Fläche, deren Berührungspunkte M auf der gegebenen Kurve liegen, bildet also eine von der Hilfsveränderlichen abhängige Schar, die nach Nr. 278 eine *Einhüllende* hat. Nach Nr. 282 ist die Einhüllende eine *abwickelbare* Fläche. Zu ihrer Bestimmung müssen wir die Gleichung (1) nach der Hilfsveränderlichen differenzieren, was der Akzent andeuten soll:

$$-z' - p'(\mathfrak{x} - x) - q'(\mathfrak{y} - y) + px' + qy' = 0.$$

Längs der Kurve ist $z = f(x, y)$, daher $dz = p dx + q dy$, also auch $z' = px' + qy'$, so daß bleibt:

$$(2) \qquad p'(\mathfrak{x} - x) + q'(\mathfrak{y} - y) = 0.$$

Elimination der Hilfsveränderlichen aus (1) und (2) gibt die Gleichung der abwickelbaren Fläche, geschrieben in den laufenden Koordinaten $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$.

Um die Gratlinie der abwickelbaren Fläche zu bestimmen, differenzieren wir (2) abermals. Es kommt:

$$(3) \qquad p''(\mathfrak{x} - x) + q''(\mathfrak{y} - y) - (p'x' + q'y') = 0.$$

Die Gleichungen (1), (2), (3) sind enthalten in den Formeln:

$$(4) \qquad \frac{\mathfrak{x} - x}{q'} = \frac{\mathfrak{y} - y}{-p'} = \frac{\mathfrak{z} - z}{pq' - qp'} = \frac{p'x' + q'y'}{q'p'' - p'q''}.$$

Sie geben die laufenden Koordinaten $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ der Punkte der Gratlinie als Funktionen der Hilfsveränderlichen. Die Gleichungen (4) sind, wenn von dem letzten Bruche abgesehen wird, dieselben wie (1) und (2) und bestimmen für jeden Wert der Hilfsveränderlichen eine geradlinige Charakteristik der Einhüllenden, die durch den zugehörigen Punkt M der gegebenen Flächenkurve geht. Diese Charakteristik ist, weil

sie in der Tangentenebene (1) liegt, eine Tangente der gegebenen Fläche in ihrem Punkte M.

Von jedem Punkte M der Flächenkurve gehen also zwei bei der gegenwärtigen Betrachtung besonders beachtenswerte Tangenten der Fläche aus, erstens die Tangente der Flächenkurve, zweitens die Erzeugende der abwickelbaren Fläche. Diese beiden Tangenten heißen nach *Dupin* zueinander *konjugiert.*

Es seien M und M' zwei benachbarte Punkte der gegebenen Fläche. Wir denken uns durch M und M' eine Kurve auf der Fläche gezogen. Die Tangente der Kurve in M ist die Grenzlage, der die Sekante MM' zustrebt, wenn M' auf der Kurve nach M wandert. Andererseits ist die durch M gehende konjugierte Tangente, d. h. Erzeugende derjenigen abwickelbaren Fläche, die von allen Tangentenebenen längs der Flächenkurve umhüllt wird, die Grenzlage der Schnittlinie der Tangentenebenen von M und M'. *Wenn also ein Punkt M auf der Fläche nach irgend einer Richtung hin zu wandern beginnt, d. h. die Richtung einer von M ausgehenden Flächentangente einschlägt, so dreht sich seine Tangentenebene zunächst um die zu dieser Tangente konjugierte Tangente des Flächenpunktes M.* Schon hieraus erhellt, daß die konjugierte Tangente vollständig bestimmt ist, sobald nur die ursprüngliche Tangente von M und nicht die ganze von M ausgehende Flächenkurve gegeben wird. Analytisch leuchtet dies so ein:

Die Richtungskosinus α, β, γ der von M ausgehenden Tangente der Flächenkurve sind zu x', y', z' proportional. Andererseits sind die Richtungskosinus α_1, β_1, γ_1 der konjugierten Tangente wegen der drei ersten Terme in (4) zu q', $-p'$ und $pq'-qp'$ proportional. Aber wegen $dp=rdx+sdy$ und $dq=sdx+tdy$ ist $p'=rx'+sy'$ und $q'=sx'+ty'$. Mithin sind α_1, β_1, γ_1 zu

$$sx'+ty',\quad -(rx'+sy'),\quad (ps-qr)x'+(pt-qs)y'$$

proportional. Folglich kommt:

$$\frac{\alpha_1}{s\alpha+t\beta}=\frac{\beta_1}{-(r\alpha+s\beta)}=\frac{\gamma_1}{(ps-qr)\alpha+(pt-qs)\beta}. \tag{5}$$

Wenn also für einen bestimmten Punkt der Fläche $z=f(x,y)$

eine Tangente gewählt worden ist, daher r, s, t und α, β, γ gegeben sind, so liefern diese Gleichungen (5) die Richtung der zur gewählten Tangente konjugierten Tangente mit den Richtungskosinus $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$.

Die beiden Gleichungen (5) lassen sich auf nur eine reduzieren. Denn für beide Tangenten ist wegen $dz = pdx + qdy$:

$$\gamma = p\alpha + q\beta, \quad \gamma_1 = p\alpha_1 + q\beta_1.$$

Es bleibt daher die durch Gleichsetzen der ersten beiden Brüche in (5) hervorgehende Gleichung als einzige wesentliche übrig. Sie kann übersichtlicher so geschrieben werden:

$$r\alpha\alpha_1 + s(\alpha\beta_1 + \beta\alpha_1) + t\beta\beta_1 = 0. \tag{6}$$

Weil sie sich nicht ändert, wenn α, β, γ bzw. mit $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ vertauscht werden, so folgt, daß umgekehrt die zur zweiten Tangente konjugierte Tangente die erste Tangente ist. Dies erst berechtigt zu der Bezeichnung beider Tangenten als *konjugiert.* Die Benennung hat aber noch einen anderen Grund:

Wählen wir den Flächenpunkt M wie in Nr. 310 als Anfangspunkt, so daß für ihn $p = q = s = 0$, $r = 1 : R_1$ und $t = 1 : R_2$ ist, und bildet die eine Tangente mit der x-Achse den Winkel ω, die konjugierte den Winkel ω_1, so ist $\alpha = \cos\omega$, $\beta = \sin\omega$ und $\alpha_1 = \cos\omega_1$, $\beta_1 = \sin\omega_1$, so daß aus (6) folgt:

$$\frac{\cos\omega\cos\omega_1}{R_1} + \frac{\sin\omega\sin\omega_1}{R_2} = 0 \quad \text{oder} \quad \operatorname{tg}\omega\operatorname{tg}\omega_1 = -\frac{R_2}{R_1}. \tag{7}$$

Hieraus ergibt sich wegen der Gleichung der Indikatrizen in Satz 9 von Nr. 311:

Satz 11: Zwei konjugierte Tangenten eines Flächenpunktes M sind identisch mit zwei konjugierten Durchmessern einer Indikatrix des Punktes M.

Nach Satz 10 in Nr. 311 und nach einem bekannten Satze über konjugierte Durchmesser einer Ellipse bzw. zweier konjugierter Hyperbeln (vgl. Nr. 313) folgt sofort:

Satz 12: Die Summe der Krümmungsradien zweier solcher Normalschnitte eines Flächenpunktes, die konjugierte Tangenten haben, ist für den Flächenpunkt konstant, also gleich der Summe der beiden Hauptkrümmungsradien des Punktes.

Es braucht kaum bemerkt zu werden, daß die Radien natürlich immer mit den zugehörigen Vorzeichen zu messen sind, vgl. Nr. 305.

316. Haupttangenten und Haupttangentenkurven. Liegen zwei konjugierte Hyperbeln vor, so weiß man, daß sie zwei solche Durchmesser haben, von denen jeder zu sich selbst konjugiert ist, nämlich ihre *Asymptoten.* Nach Nr. 315 gibt es daher in einem hyperbolischen Punkte einer Fläche zwei Tangenten, von denen jede zu sich selbst konjugiert ist. Im Falle eines elliptischen Punktes, wo also die Indikatrizen Ellipsen sind, gibt es zwar auch zwei, aber sie sind imaginär, weil die Ellipse imaginäre Asymptoten hat. Im Falle eines parabolischen Punktes M arten die Indikatrizen in Paare von parallelen Geraden aus, bei denen, wenn sie als Kegelschnitte aufgefaßt werden, der durch M gehende Durchmesser, der den Geraden parallel ist, bekanntlich zu sich selbst und zu jedem anderen Durchmesser konjugiert ist. Hier also gibt es nur eine zu sich selbst konjugierte Tangente; sie ist reell und gehört zu demjenigen Normalschnitte, für den der Hauptkrümmungsradius unendlich wird.

Die Formel (7) in voriger Nummer bestätigt die Ergebnisse: Es wird $\operatorname{tg}\omega$ nur dann gleich $\operatorname{tg}\omega_1$, wenn $\operatorname{tg}^2\omega = -R_2 : R_1$ ist. Haben R_1 und R_2 verschiedene Vorzeichen, d. h. liegt ein hyperbolischer Punkt vor, so gehen hieraus für $\operatorname{tg}\omega$ zwei verschiedene reelle Werte hervor. Haben R_1 und R_2 dasselbe Vorzeichen, d. h. liegt ein elliptischer Punkt vor, so ergeben sich zwei verschiedene imaginäre Werte. Ist drittens $1 : R_1 = 0$, d. h. liegt ein parabolischer Punkt vor, so ergibt sich nur $\operatorname{tg}\omega = 0$.

Die zu sich selbst konjugierten Tangenten eines Flächenpunktes heißen seine *Haupttangenten.* Sind α, β die beiden Richtungskosinus einer Haupttangente gegenüber der positiven x- und y-Achse, so gilt für sie in einem beliebigen Punkte der Fläche $z = f(x, y)$ nach (6) in Nr. 315 die Gleichung:

$$r\alpha^2 + 2s\alpha\beta + t\beta^2 = 0.$$

Wenn dx, dy, dz die Differentiale von x, y, z längs einer solchen Haupttangente sind, so ist also für sie:

$$r\,dx^2 + 2s\,dx\,dy + t\,dy^2 = 0. \tag{1}$$

Aus dieser für $dy:dx$ *quadratischen* Gleichung ergeben sich für $dy:dx$ zwei reelle verschiedene Werte im Falle $rt - s^2 < 0$ (hyperbolischer Punkt), zwei reelle gleiche Werte im Falle $rt - s^2 = 0$ (parabolischer Punkt) und zwei imaginär konjugierte Werte im Falle $rt - s^2 > 0$ (elliptischer Punkt). Aus $dz = pdx + qdy$ kann man noch $dz:dx$ bestimmen.

Diejenigen Kurven auf der Fläche, die in jedem ihrer Punkte eine Haupttangente berühren, heißen die *Haupttangentenkurven* der Fläche. Sie sind nur auf demjenigen Gebiete der Fläche reell, dessen Punkte hyperbolisch sind und überdecken dort die Fläche netzartig, nämlich doppelt, indem durch jeden Punkt dieses Gebietes zwei von ihnen gehen. Da, wo die Fläche parabolische Punkte hat, fallen dagegen die Fortschreitungsrichtungen auf beiden Kurven zusammen. Im Gebiete der elliptischen Punkte sind die Haupttangentenkurven imaginär. Wenn in (1) für r, s, t die aus $z = f(x, y)$ folgenden Werte in x, y eingesetzt werden, so enthält (1) nur x, y und $dy:dx$ und wird also eine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung, vgl. Nr. 86, nämlich *die Differentialgleichung derjenigen Kurven in der xy-Ebene, die die Projektionen der Haupttangentenkurven der Fläche sind.*

§ 3. Hauptkrümmungsradien und Krümmungsmaß einer Fläche.

317. Bestimmung der Hauptkrümmungsradien. Die in Nr. 306 angegebene Formel (1) für den Krümmungsradius R desjenigen Normalschnittes, der die Tangente mit den Richtungskosinus α, β, γ enthält, wollen wir zunächst so umformen, daß darin nur die Verhältnisse der Kosinus auftreten. Zu diesem Zwecke multiplizieren wir ihre rechte Seite mit $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$, was geschehen darf, weil diese Summe gleich Eins ist. Aber wegen $dz = pdx + qdy$ wird $\gamma = p\alpha + q\beta$. Nach Einsetzen dieses Wertes ergibt sich, nach den Potenzen von α und β geordnet, die Gleichung:

$$(1) \quad \left(1 + p^2 - \frac{Rr}{\sqrt{p^2 + q^2 + 1}}\right)\alpha^2 + 2\left(pq - \frac{Rs}{\sqrt{p^2 + q^2 + 1}}\right)\alpha\beta + \\ + \left(1 + q^2 - \frac{Rt}{\sqrt{p^2 + q^2 + 1}}\right)\beta^2 = 0.$$

Die Quadratwurzel ist nach Nr. 304 *positiv*. Die Formel gestattet, R zu berechnen, sobald nur das Verhältnis $\alpha:\beta$ der beiden Richtungskosinus der Tangente gegenüber der x- und y-Achse gegeben ist. Umgekehrt: Geben wir R einen bestimmten Wert, so ist (1) eine quadratische Gleichung für $\alpha:\beta$, die, wenn sie reelle Wurzeln hat, *zwei* Tangenten bestimmt, für deren zugehörige Normalschnitte der Krümmungsradius den gleichen gegebenen Wert hat. Zwei Normalschnitte eines Flächenpunktes haben folglich nach Satz 8, Nr. 308, nur dann dieselbe Krümmung, wenn sie zu einem der beiden *Hauptschnitte* symmetrisch sind.

Also liefert (1) die folgende Bedingung für einen Hauptschnitt: Die für $\alpha:\beta$ quadratische Gleichung (1) muß zwei gleiche Wurzeln haben, d. h. es muß sein:

$$\left(pq-\frac{Rs}{\sqrt{p^2+q^2+1}}\right)^2=\left(1+p^2-\frac{Rr}{\sqrt{p^2+q^2+1}}\right)\left(1+q^2-\frac{Rt}{\sqrt{p^2+q^2+1}}\right)$$

oder, ausgerechnet:

$$(2)\quad (rt-s^2)R^2-[(1+q^2)r-2pqs+(1+p^2)t]\sqrt{p^2+q^2+1}\,R+(p^2+q^2+1)^2=0.$$

Hier liegt eine quadratische Gleichung für R vor. Ihre Wurzeln sind die *Hauptkrümmungsradien* R_1 und R_2 des betrachteten Flächenpunktes. Zur Bestimmung der zugehörigen Hauptschnitte oder Tangentenrichtungen, also des Verhältnisses $\alpha:\beta$, schließen wir so: Ist R eine Wurzel der Gleichung (2), so hat die für α oder β quadratische Gleichung (1) eine Doppelwurzel. Für eine Doppelpurzel u der quadratischen Gleichung $Au^2+2Bu+C=0$ ist aber auch $Au+B=0$. Also folgt hier, je nachdem wir (1) als quadratische Gleichung für α oder β auffassen, daß für die Hauptschnitte:

$$\left(1+p^2-\frac{Rr}{\sqrt{p^2+q^2+1}}\right)\alpha+\left(pq-\frac{Rs}{\sqrt{p^2+q^2+1}}\right)\beta=0,$$

$$\left(pq-\frac{Rs}{\sqrt{p^2+q^2+1}}\right)\alpha+\left(1+q^2-\frac{Rt}{\sqrt{p^2+q^2+1}}\right)\beta=0$$

oder umgeformt:

$$(3)\qquad \frac{r\alpha+s\beta}{(1+p^2)\alpha+pq\beta}=\frac{s\alpha+t\beta}{pq\alpha+(1+q^2)\beta}=\frac{\sqrt{p^2+q^2+1}}{R}$$

ist. Die beiden ersten Terme stellen zusammen eine in $\alpha:\beta$

quadratische Gleichung vor, die zur Bestimmung der Tangenten der beiden Hauptschnitte dient.

Nach (2) ist für die beiden Hauptkrümmungsradien R_1 und R_2:

$$(4)\quad \begin{cases} R_1 + R_2 = \dfrac{(1+q^2)r - 2pqs + (1+p^2)t}{rt - s^2}\sqrt{p^2+q^2+1}, \\ R_1 R_2 = \dfrac{(p^2+q^2+1)^2}{rt - s^2}, \end{cases}$$

und hieraus folgt noch:

$$(5)\quad \begin{cases} (R_1 - R_2)^2 = \dfrac{(p^2+q^2+1)(1+p^2)(1+q^2)p^2q^2}{(rt-s^2)^2}\left[\dfrac{2s}{pq} - \dfrac{r}{1+p^2} - \dfrac{t}{1+q^2}\right]^2 \\ \qquad + \dfrac{(p^2+q^2+1)^2(1+p^2)(1+q^2)}{(rt-s^2)^2}\left[\dfrac{r}{1+p^2} - \dfrac{t}{1+q^2}\right]^2. \end{cases}$$

318. Das Gaußische Krümmungsmaß. Die Werte der beiden Hauptkrümmungsradien R_1 und R_2 eines Flächenpunktes stehen in engster Beziehung zu derjenigen Größe, die nach *Gauß* das Krümmungsmaß der Fläche in jenem Punkte heißt. Es ist dies übrigens eine andere Größe als die in Nr. 308 erwähnte mittlere Krümmung. Wir gelangen zu ihr auf folgendem Wege:

Um den Anfangspunkt O als Mittelpunkt wird wie in Nr. 260 die Kugel vom Radius Eins gelegt. Ist nun M ein Punkt der gegebenen Fläche, so ziehen wir von O aus denjenigen Radius, dessen Richtung und Sinn ebenso ist wie bei der *positiven* Flächennormale von M. Der Endpunkt $\mathfrak{M}$ des Radius heißt *das sphärische Bild des Flächenpunktes M.* Jedem Punkte M der Fläche entspricht *ein* Bildpunkt, umgekehrt aber können zu einem Bildpunkte mehrere Punkte der Fläche gehören, nämlich solche Punkte, die parallele positive Normalen haben. Wir wollen ein solches Stück der Fläche betrachten, auf dem es keine zwei Punkte gibt, die parallele und gleichsinnige Normalen haben, so daß alle Punkte M dieses Stückes verschiedene Bildpunkte $\mathfrak{M}$ haben.

Wir werden allerdings erst im zweiten Bande den Begriff des *Flächeninhaltes* einer krummen Fläche definieren können, möchten aber doch schon hier davon Gebrauch machen, um nicht die Definition des Krümmungsmaßes ungebührlich lange hinausschieben zu müssen. Dieser Begriff des Flächeninhaltes

wird ja dem Leser nicht fremdartig sein. Es möge also etwa S den Flächeninhalt des betrachteten Stückes der gegebenen Fläche bedeuten. Die Bildpunkte $\mathfrak{M}$ der Punkte M dieses Stückes erfüllen alsdann ein gewisses Stück der Kugel, und es sei $\mathfrak{S}$ der Flächeninhalt dieses sphärischen Stückes. Das Verhältnis $\mathfrak{S} : S$ nennen wir die *durchschnittliche Krümmung des Flächenstückes* S, nicht, wie es in Analogie mit Nr. 260 nahe liegen würde, die mittlere, da die mittlere Krümmung schon eine andere bestimmte Bedeutung hat, vgl. Nr. 308. Ist nun das Flächenstück S die Umgebung eines gewissen Punktes M der Fläche und wird diese Umgebung immer kleiner gemacht, so wird das zugehörige sphärische Stück $\mathfrak{S}$ auch eine immer kleinere Umgebung des sphärischen Bildes $\mathfrak{M}$ von M. Man kann zeigen, daß das Verhältnis $\mathfrak{S} : S$ einen bestimmten endlichen Grenzwert hat, wenn die Fläche S um M herum nach Null strebt, und dieser Grenzwert heißt nach *Gauß* das *Krümmungsmaß* oder die *Krümmung* der Fläche an der betrachteten Stelle M.

Die Tangentenebene der Fläche in M ist der Tangentenebene der Kugel in $\mathfrak{M}$ parallel. Je kleiner das Flächenstück S um M herum und dadurch auch das Flächenstück $\mathfrak{S}$ um $\mathfrak{M}$ herum wird, um so weniger weichen beide Stücke von Teilen dieser beiden parallelen Ebenen ab. Da nun der Flächeninhalt eines Stückes einer Ebene in einem von seiner Form unabhängigen Verhältnisse zu dem Flächeninhalte seiner Projektion auf die xy-Ebene steht, so schließen wir: Um das Krümmungsmaß der Fläche in M zu berechnen, dürfen wir die beiden Flächenstücke S und $\mathfrak{S}$ durch ihre Projektionen S' und $\mathfrak{S}'$ auf die xy-Ebene ersetzen.

Es möge M' die Projektion von M auf die xy-Ebene sein. Wir wählen zwei zu M' benachbarte Punkte M_1' und M_2' in der xy-Ebene und betrachten das geradlinige Dreieck $M'M_1'M_2'$ als die Projektion S' des Flächenstückes S, das also durch ein krummliniges Dreieck MM_1M_2 auf der Fläche begrenzt sei. Sind $\mathfrak{M}_1$ und $\mathfrak{M}_2$ die sphärischen Bilder von M_1 und M_2, so ist die sphärische Fläche $\mathfrak{S}$ durch ein krummliniges Dreieck $\mathfrak{M}\mathfrak{M}_1\mathfrak{M}_2$ begrenzt, dessen Ecken, auf die xy-Ebene projiziert, die Punkte $\mathfrak{M}'$, $\mathfrak{M}_1'$, $\mathfrak{M}_2'$ liefern mögen. Die

Projektion $\mathfrak{S}'$ von $\mathfrak{S}$ ist alsdann durch ein krummliniges Dreieck $\mathfrak{M}'\mathfrak{M}_1'\mathfrak{M}_2'$ begrenzt. Man kann nun beweisen, worauf wir hier nicht eingehen, daß die Fläche des *krumm*linig begrenzten Dreiecks $\mathfrak{M}'\mathfrak{M}_1'\mathfrak{M}_2'$ zur Fläche des *gerad*linig begrenzten Dreiecks $\mathfrak{M}'\mathfrak{M}_1'\mathfrak{M}_2'$ ein Verhältnis hat, das dem Grenzwerte Eins zustrebt, falls die Punkte $\mathfrak{M}_1'$ und $\mathfrak{M}_2'$ immer näher an $\mathfrak{M}'$ heranrücken. Daher dürfen wir folgern, daß die Krümmung der Fläche in M der Grenzwert ist:

$$K = \lim \frac{\Delta\, \mathfrak{M}'\mathfrak{M}_1'\mathfrak{M}_2'}{\Delta\, M'M_1'M_2'}, \tag{1}$$

wobei beide Dreiecke *gerad*linig begrenzt seien.

Der Punkt M der Fläche $z = f(x, y)$ habe die Koordinaten x, y, z. Der Punkt M' hat dann die Koordinaten x, y. Den Punkt M_1' können wir auf derjenigen Geraden durch M' wählen, die der x-Achse parallel ist, so daß M_1' die Koordinaten $x + \varDelta x$ und y habe. Dagegen möge M_2' die Koordinaten x und $y + \varDelta y$ haben. Alsdann hat das Dreieck $M'M_1'M_2'$ den Inhalt $\frac{1}{2}\varDelta x \varDelta y$.

Die Richtungskosinus der positiven Normale des Flächenpunktes M bezeichnen wir mit X, Y, Z. Sie sind zugleich die rechtwinkligen Koordinaten des Bildpunktes $\mathfrak{M}$ auf der Kugel, d. h. $\mathfrak{M}'$ hat die Koordinaten X und Y. Sie sind Funktionen von x und y. Wenn nur x um $\varDelta x$ wächst, mögen sie die Zunahmen $\varDelta_1 X$ und $\varDelta_1 Y$ erfahren; wenn dagegen nur y um $\varDelta y$ wächst, seien $\varDelta_2 X$ und $\varDelta_2 Y$ ihre Zunahmen. Alsdann haben die Ecken des Dreiecks $\mathfrak{M}'\mathfrak{M}_1'\mathfrak{M}_2'$ die Koordinaten:

$$X,\ Y;\quad X + \varDelta_1 X,\ Y + \varDelta_1 Y;\quad X + \varDelta_2 X,\ Y + \varDelta_2 Y,$$

so daß $\frac{1}{2}(\varDelta_1 X \varDelta_2 Y - \varDelta_1 Y \varDelta_2 X)$ der Inhalt des Dreiecks ist. Nach (1) wird folglich:

$$K = \lim \frac{\varDelta_1 X \varDelta_2 Y - \varDelta_1 Y \varDelta_2 X}{\varDelta x \varDelta y} = \lim \left(\frac{\varDelta_1 X}{\varDelta x} \cdot \frac{\varDelta_2 Y}{\varDelta y} - \frac{\varDelta_1 Y}{\varDelta x} \cdot \frac{\varDelta_2 X}{\varDelta y} \right).$$

Sind X und Y stetige Funktionen von x und y mit stetigen Ableitungen, so kommt:

$$\lim \frac{\varDelta_1 X}{\varDelta x} = X_x,\quad \lim \frac{\varDelta_1 Y}{\varDelta x} = Y_x,\quad \lim \frac{\varDelta_2 X}{\varDelta y} = X_y,\quad \lim \frac{\varDelta_2 Y}{\varDelta y} = Y_y,$$

so daß folgt:

$$K = X_x Y_y - Y_x X_y. \tag{2}$$

Wir erinnern daran, daß der Inhalt eines ebenen Dreiecks seinem Vorzeichen nach von dem Sinne abhängt, in dem das Dreieck umlaufen wird, und daß wir hier bei beiden Dreiecken den entsprechenden Sinn gewählt haben. Da sie nun die Projektionen von krummlinigen Dreiecken auf der Fläche und der Kugel sind und diese beiden Flächenstücke in den Umgebungen zweier Stellen M und $\mathfrak{M}$ mit parallelen Tangentenebenen liegen, so haben wir also die Inhalte der Dreiecke auf der Fläche und auf der Kugel mit bestimmten Vorzeichen versehen, die von dem Sinne des Umlaufs abhängen, falls die Fläche von der positiven Normale aus und die Kugel von außen betrachtet wird. Nach (10) in Nr. 253 haben wir:

$$X = -\frac{p}{w}, \quad Y = -\frac{q}{w}, \quad \text{wobei } w = \sqrt{p^2 + q^2 + 1},$$

und die Wurzel ist positiv. Hieraus folgt:

$$(3) \quad \begin{cases} X_x = \dfrac{w_x p - rw}{w^2}, & X_y = \dfrac{w_y p - sw}{w^2}, \\[2ex] Y_x = \dfrac{w_x q - sw}{w^2}, & Y_y = \dfrac{w_y q - tw}{w^2}, \end{cases}$$

so daß aus (2) hervorgeht:

$$K = \frac{1}{w^4} \begin{vmatrix} w_x p - rw & w_y p - sw \\ w_x q - sw & w_y q - tw \end{vmatrix}$$
$$= \frac{1}{w^4}\left[w^2(rt - s^2) - w w_x(pt - qs) - w w_y(qr - ps)\right].$$

Es ist aber $w^2 = p^2 + q^2 + 1$, also $w w_x = pr + qs$, $w w_y = ps + qt$. Demnach geht schließlich hervor:

$$(4) \qquad K = \frac{rt - s^2}{(p^2 + q^2 + 1)^2} = \frac{1}{R_1 R_2},$$

vgl. (4) in Nr. 317.

Die Krümmung der Fläche in einem Punkte ist hiernach gleich dem Produkte der beiden Hauptkrümmungen des Punktes.

319. Die Krümmungskurven. Konstruiert man in jedem Punkte einer Flächenkurve die zugehörige Normale der Fläche, so werden diese Normalen im allgemeinen nicht die Tangenten einer Raumkurve sein. Ist es aber im besonderen doch der Fall, so heißt die Flächenkurve eine *Krümmungskurve.*

In diesem Falle wird die Fläche der Normalen von Ebenen umhüllt (nach Nr. 281). Die durch einen Punkt M oder

(x, y, z) der Krümmungskurve gehende Ebene muß erstens die Normale des Punktes und zweitens die Tangente der Krümmungskurve enthalten. Um also die Bedingungen für eine Krümmungskurve aufzustellen, denken wir uns x, y, z als Funktionen einer Hilfsveränderlichen derart, daß die zugehörige Kurve auf der Fläche $z = f(x, y)$ liegt. Deutet dann der Akzent die Differentiation nach der Hilfsveränderlichen an, so sind x', y', z' den Richtungskosinus der Tangente der Kurve proportional. Bedeuten X, Y, Z die Richtungskosinus der Flächennormale, so ist die Ebene durch die Normale und durch die Tangente der Krümmungskurve in M in den laufenden Koordinaten $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ dargestellt durch die Gleichung:

$$(1) \qquad \begin{vmatrix} \mathfrak{x}-x & \mathfrak{y}-y & \mathfrak{z}-z \\ x' & y' & z' \\ X & Y & Z \end{vmatrix} = 0.$$

Hierin sind x, y, z und mithin auch x', y', z' und X, Y, Z Funktionen der Hilfsveränderlichen, so daß zu jedem Werte der Hilfsveränderlichen eine solche Ebene gehört. Daher liegt eine Ebenenschar vor, und es ist zu fordern, daß die Charakteristiken der von den Ebenen umhüllten Fläche Normalen der gegebenen Fläche seien. Nach Nr. 278 wird die durch M gehende Charakteristik durch die Gleichung (1) und die aus ihr durch Differentiation nach der Hilfsveränderlichen hervorgehende Gleichung bestimmt. Die Differentiation der ersten Zeile in (1) gibt die zweite, abgesehen vom Minuszeichen; also wird die zweite Gleichung des Charakteristik:

$$(2) \qquad \begin{vmatrix} \mathfrak{x}-x & \mathfrak{y}-y & \mathfrak{z}-z \\ x'' & y'' & z'' \\ X & Y & Z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathfrak{x}-x & \mathfrak{y}-y & \mathfrak{z}-z \\ x' & y' & z' \\ X' & Y' & Z' \end{vmatrix} = 0.$$

Beide Gleichungen sollen nun durch alle Punkte der Flächennormale, d. h. durch $\mathfrak{x} = x + cX$, $\mathfrak{y} = y + cY$, $\mathfrak{z} = z + cZ$ erfüllt werden, wenn c beliebig ist. Dies ist mit der Gleichung (1) der Fall, so daß die Gleichung (2) allein die notwendige und hinreichende Bedingung für eine Krümmungskurve in der Form liefert:

[319

$$(3) \qquad \begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ X & Y & Z \\ X' & Y' & Z' \end{vmatrix} = 0.$$

Die Flächennormale ist aber zur Tangente senkrecht, d. h.:

$$Xx' + Yy' + Zz' = 0.$$

Aus den beiden letzten in x', y', z' linearen Gleichungen folgt, daß sich x', y', z' zueinander verhalten wie drei Größen, von denen wir die erste angeben:

$$(ZX' - XZ')Z - (XY' - YX')Y,$$

aus der die beiden anderen durch zyklische Vertauschung von X, Y, Z hervorgehen. Wenn zu dieser Größe X^2X' addiert und dann X^2X' davon wieder subtrahiert wird, so kommt:

$$(X^2 + Y^2 + Z^2)X' - (XX' + YY' + ZZ')X.$$

Es ist aber $X^2 + Y^2 + Z^2 = 1$ und also $XX' + YY' + ZZ' = 0$, so daß sich die Größe auf X' reduziert. Also sind:

$$\frac{X'}{x'} = \frac{Y'}{y'} = \frac{Z'}{z'}$$

die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für eine Krümmungskurve.

Satz 13: Sind X, Y, Z die Richtungskosinus der Normalen einer Fläche für die Punkte einer Flächenkurve, und sind die Koordinaten x, y, z dieser Punkte als Funktionen einer Hilfsveränderlichen gegeben, so ist die Kurve dann und nur dann eine Krümmungskurve, wenn längs ihrer die Ableitungen von X, Y, Z proportional den Ableitungen von x, y, z nach der Hilfsveränderlichen sind.

Man kann der Bedingung (3) noch verschiedene andere Formen geben: Es ist $z' = px' + qy'$, ferner nach (10) in Nr. 253 noch $X = -p : w$, $Y = -q : w$ und $Z = 1 : w$, wenn w die positive Quadratwurzel aus $p^2 + q^2 + 1$ bedeutet. Daher wird (vgl. (3) in Nr. 318):

$$X' = \frac{1}{w^2}[(w_x p - rw)x' + (w_y p - sw)y'],$$

$$Y' = \frac{1}{w^2}[(w_x q - sw)x' + (w_y q - tw)y'],$$

$$Z' = -\frac{1}{w^2}[w_x x' + w_y y'].$$

Setzt man diese Werte in (3) ein, so vereinfacht sich die dritte Zeile der Determinante mit Rücksicht auf die zweite. Es kommt:

$$\begin{vmatrix} x' & y' & px'+qy' \\ -p & -q & 1 \\ rx'+sy' & sx'+ty' & 0 \end{vmatrix} = 0$$

oder ausgerechnet:

$$(4)\quad [(1+p^2)s-pqr]x'^2+[(1+p^2)t-(1+q^2)r]x'y'-[(1+q^2)s-pqt]y'^2=0.$$

Da $px'+qy'=z'$ und $rx'+sy'=p'$, $sx'+ty'=q'$ ist, läßt sich die Bedingung auch so schreiben:

$$(5)\quad \begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ p & q & -1 \\ p' & q' & 0 \end{vmatrix} = p'q'\left(\frac{x'+pz'}{p'}-\frac{y'+qz'}{q'}\right)=0.$$

Führt man in (4) statt x', y' die Differentiale dx und dy ein, so kommt:

$$(6)\quad [(1+p^2)s-pqr]dx^2+[(1+p^2)t-(1+q^2)r]dx\,dy \\ -[(1+q^2)s-pqt]dy^2=0.$$

Hierin sind p, q, r, s, t wegen $z=f(x, y)$ Funktionen von x, y. Diese Gleichung ist folglich nach Nr. 86 *eine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung, nämlich für diejenigen Kurven in der xy-Ebene, die durch Projektion der Krümmungskurven auf die xy-Ebene hervorgehen.*

320. Die Tangenten der Krümmungskurven. Wird der Flächenpunkt M wie in Nr. 310 als Anfangspunkt gewählt, so daß für ihn $p=q=s=0$ und $r=1:R_1$, $t=1:R_2$ ist, so liefert die Gleichung (4) der vorigen Nummer für ihn $x'y'=0$, d. h. $x'=0$ oder $y'=0$. Da die Tangenten von M jetzt in der xy-Ebene liegen, so bedeutet dies, daß entweder die y-Achse oder die x-Achse die Tangente der durch M gehenden Krümmungskurve ist. Weil nun gegenwärtig die xz-Ebene und yz-Ebene die Hauptschnittebenen von M sind, so kommt:

Satz 14: Die durch einen Flächenpunkt gehenden Krümmungskurven berühren dort die beiden Hauptschnitte der Fläche.

Hieraus folgern wir, daß durch jeden Flächenpunkt M, der kein Nabelpunkt ist, *zwei* Krümmungskurven gehen, deren

Tangenten in M zueinander senkrecht sind. *Die Krümmungskurven bilden demnach ein Netz von orthogonalen Kurven.* In M halbieren die Tangenten der Krümmungskurven die Winkel der Haupttangenten, vgl. Nr. 316.

321. Gratlinie der Fläche der Normalen längs einer Krümmungskurve. Wir nehmen wie in Nr. 319 an, eine Krümmungskurve der Fläche $z = f(x, y)$ sei dadurch dargestellt, daß für x, y, z passende Funktionen einer Hilfsveränderlichen gesetzt seien, die natürlich insbesondere der Flächengleichung genügen müssen. Wie immer seien X, Y, Z die Richtungskosinus der positiven Normale eines Flächenpunktes M oder (x, y, z), und der Punkt M gehöre der Krümmungskurve an. Die Punkte $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z})$ der Flächennormale von M sind dann durch:

$$(1) \qquad \mathfrak{x} = x + Xh, \quad \mathfrak{y} = y + Yh, \quad \mathfrak{z} = z + Zh$$

gegeben, wobei h die mit Vorzeichen gemessene Strecke von M bis zum Punkte $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z})$ bedeutet. Die Gratlinie derjenigen Fläche, die von den Normalen längs der Krümmungskurve gebildet wird, hat diese Normalen zu Tangenten. Mithin muß sich auch die Gratlinie in der Form (1) in den laufenden Koordinaten $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ darstellen lassen, sobald h die richtige Funktion der Hilfsveränderlichen ist. Wir werden diese Funktion so finden: Stellen wir sie uns unter h in (1) vor, so sind $\mathfrak{x}', \mathfrak{y}', \mathfrak{z}'$ den Richtungskosinus der Tangente der Gratlinie proportional, wenn die Akzente die Differentiation nach der Hilfsveränderlichen andeuten. Diese Kosinus müssen andererseits gleich X, Y, Z sein. Also ergibt sich aus (1):

$$x' + X'h + Xh' = uX, \quad y' + Y'h + Yh' = uY, \quad z' + Z'h + Zh' = uZ,$$

wobei u einen noch unbekannten Faktor darstellt. Wegen $X^2 + Y^2 + Z^2 = 1$ ist aber $XX' + YY' + ZZ' = 0$. Multiplizieren wir daher die drei Gleichungen mit X', Y', Z' und addieren sie dann, so ergibt sich eine von u und h' freie Gleichung, aus der sich h berechnen läßt. Es kommt:

$$(2) \qquad h = -\frac{x'X' + y'Y' + z'Z'}{X'^2 + Y'^2 + Z'^2}.$$

Um die geometrische Bedeutung dieser Strecke h zu

ermitteln, wählen wir für den Augenblick M wie in voriger Nummer als Anfangspunkt so, daß für M insbesondere $p = q = s = 0$, $r = 1 : R_1$, $t = 1 : R_2$ ist. Bedeutet w, wie in Nr. 319, die positive Quadratwurzel aus $p^2 + q^2 + 1$, so wird $ww_x = pr + qs = 0$ und $ww_y = ps + qt = 0$; folglich ergeben sich nach derselben Nummer für X', Y', Z' die Werte $-x' : R_1$, $-y' : R_2$ und 0. Nun sind x', y', z' den Richtungskosinus der Tangente einer der beiden durch M gehenden Krümmungskurven proportional. Diese Tangente fällt aber jetzt nach Satz 14 in Nr. 320 entweder in die x- oder in die y-Achse, so daß entweder $y' = 0$, $z' = 0$ oder $x' = 0$, $z' = 0$ ist. Im ersten oder zweiten Falle gibt die Formel (2) mithin $h = R_1$ bzw. $h = R_2$. Dies bedeutet geometrisch:

Satz 15: Die Gratlinie derjenigen abwickelbaren Fläche, die von allen Flächennormalen längs einer Krümmungskurve gebildet wird, ist der geometrische Ort der Krümmungsmittelpunkte aller derjenigen Hauptschnitte, die jene Krümmungskurve berühren.

Kehren wir wieder zu einer *beliebigen* Lage des Achsenkreuzes zurück, so wissen wir also, daß h entweder gleich R_1 oder gleich R_2 zu setzen ist. Nach (1) sind daher entweder:

$$(3) \qquad \mathfrak{x} = x + XR_1, \quad \mathfrak{y} = y + YR_1, \quad \mathfrak{z} = z + ZR_1$$

oder:

$$(4) \qquad \mathfrak{x} = x + XR_2, \quad \mathfrak{y} = y + YR_2, \quad \mathfrak{z} = z + ZR_2$$

die Gleichungen der Gratlinie.

Wir warnen vor einem naheliegenden Irrtume: Eine Krümmungskurve hat wie jede Raumkurve für jeden ihrer Punkte M einen Krümmungsmittelpunkt, nach Nr. 263. Er liegt auf der positiven Hauptnormale der Kurve. Diese Hauptnormale ist aber im allgemeinen durchaus nicht die Flächennormale. *Also sind R_1 und R_2 im allgemeinen durchaus nicht die Krümmungsradien der beiden durch M gehenden Krümmungskurven,* sondern nur die Krümmungsradien derjenigen beiden Hauptschnitte, die in M die Krümmungskurven berühren. Die Gratlinien sind demnach auch im allgemeinen *nicht* die Orte der Krümmungsmittelpunkte der Krümmungskurven; aber sie sind nach Nr. 291 *Filarevoluten* der Krümmungskurven.

322. Flächen mit lauter Nabelpunkten. Die Kugeln (und insbesondere die Ebenen) haben nach dem Meusnierschen Satze überall Nabelpunkte. Ferner haben alle Normalen einer Kugel die Eigenschaft, einander zu treffen (im Fall der Ebene parallel zu sein). Nach der Definition in Nr. 319 ist daher *jede Kurve* auf der Kugel (oder in der Ebene) eine Krümmungskurve. Dies zeigt sich auch analytisch. Liegt die Kugel:

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2-R^2=0$$

vor, so ergibt zweimalige Differentiation nach x und y:

$$1+p^2+(z-c)r=0, \quad pq+(z-c)s=0, \quad 1+q^2+(z-c)t=0,$$

woraus folgt, daß die drei eckigen Klammern in der Differentialgleichung (4) in Nr. 319 in diesem Falle den Inhalt Null haben, die Gleichung also nichts aussagt. Dasselbe ergibt sich im Falle einer Ebene.

Um *alle* Flächen zu finden, deren Punkte sämtlich Nabelpunkte sind, gehen wir davon aus, daß nach (3) in Nr. 318, worin w^2 gleich p^2+q^2+1 ist, für die Richtungskosinus X, Y, Z der Normale einer Fläche allgemein die Gleichungen gelten:

$$X_x=\frac{pqs-(1+q^2)r}{\sqrt{p^2+q^2+1}^3}, \quad X_y=\frac{pqt-(1+q^2)s}{\sqrt{p^2+q^2+1}^3},$$

$$Y_x=\frac{pqr-(1+p^2)s}{\sqrt{p^2+q^2+1}^3}, \quad Y_y=\frac{pqs-(1+p^2)t}{\sqrt{p^2+q^2+1}^3}.$$

Wenn nun die Fläche lauter Nabelpunkte haben soll, so muß also nach Satz 4 in Nr. 307 überall auf der Fläche $X_y=0$, $Y_x=0$ und $X_x=Y_y$ sein. Nach der ersten Bedingung hängt daher X nur von x, nach der zweiten Y nur von y ab, und folglich ist nach der dritten $X_x=Y_y$ konstant. Ist diese Konstante von Null verschieden, so kann sie mit $1:c$ bezeichnet werden. Dann haben $x-cX$ und $y-cY$ die Ableitungen Null und sind deshalb auch Konstanten x_0 und y_0, so daß $X=(x-x_0):c$ und $Y=(y-y_0):c$ wird. Da $X^2+Y^2+Z^2=1$ ist, folgt:

$$Z=\frac{1}{c}\sqrt{c^2-(x-x_0)^2-(y-y_0)^2}.$$

Nach (10) in Nr. 253 ist nun $p=-X:Z$ und $q=-Y:Z$. Aus $dz=p\,dx+q\,dy$ folgt jetzt:

$$dz + \frac{(x - x_0)\,dx + (y - y_0)\,dy}{\sqrt{c^2 - (x - x_0)^2 - (y - y_0)^2}} = 0.$$

Die linke Seite ist das vollständige Differential von $z - \sqrt{c^2 - (x - x_0)^2 - (y - y_0)^2}$, und dieser Wert muß daher konstant, etwa gleich z_0, sein. Daraus ergibt sich schließlich:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = c^2,$$

d. h. die Fläche ist eine *Kugel.*

Wir setzten vorhin voraus, daß die Konstante $X_x = Y_y \neq 0$ sei. Ist $X_x = Y_y = 0$, so ergibt sich noch einfacher $X =$ konst., $Y =$ konst., folglich auch $Z =$ konst. Die Fläche hat also lauter parallele Normalen. Wählen wir die z-Achse in der Richtung dieser Normalen, so muß $X = Y = 0$, d. h. $p = q = 0$, daher $z =$ konst. sein. Wir gelangen mithin zu einer *Ebene.*

Satz 16: Die Ebenen und Kugeln sind die einzigen Flächen mit lauter Nabelpunkten. Auf ihnen ist jede Kurve eine Krümmungskurve.

323. Die Flächennormalen längs einer beliebigen Flächenkurve. Ehe wir die Krümmungskurven weiter untersuchen, wollen wir eine *beliebige* Flächenkurve annehmen und einige Formeln aufstellen, die sich auf die Lagerung der Normalen der Fläche längs der Kurve beziehen.

Eine Kurve auf der Fläche $z = f(x, y)$ sei wieder dadurch gegeben, daß für x, y und z solche Funktionen einer Hilfsveränderlichen gewählt worden sind, die der Gleichung der Fläche Genüge leisten. Die Normalen der Fläche längs der Kurve werden im allgemeinen keine Tangentenfläche (Nr. 281) bilden, also nicht die Tangenten einer Kurve sein. Aber wir können uns immer eine Raumkurve vorstellen, deren Tangenten diesen Normalen *parallel* sind; indem wir von dieser Idee Gebrauch machen, ergibt sich mit Leichtigkeit eine Reihe von nützlichen Formeln.

Wir stellen uns also eine Raumkurve vor, deren Punkte (x_1, y_1, z_1) ebenfalls Funktionen jener Hilfsveränderlichen sind, so daß jedem Punkte M oder (x, y, z) der *Flächen*kurve ein gewisser Punkt M_1 oder (x_1, y_1, z_1) der *Raum*kurve entspricht, nämlich derjenige, der zu demselben Werte der Hilfsveränderlichen gehört, und außerdem *soll die Tangente der Raumkurve*

in M_1 der Normale des Flächenpunktes M parallel sein. Die auf die Flächenkurve bezüglichen Elemente bezeichnen wir wie üblich, also z. B. mit α, β, γ die Richtungskosinus ihrer positiven Tangente usw. Die auf die Raumkurve bezüglichen Elemente unterscheiden wir von jenen durch den angehängten Index 1, so daß z. B. α_1, β_1, γ_1 die Richtungskosinus ihrer positiven Tangente sind. Bedeuten, wie immer, X, Y, Z die Richtungskosinus der positiven Normale des Flächenpunktes M, so ist zunächst nach Voraussetzung:

$$\alpha_1 = X, \quad \beta_1 = Y, \quad \gamma_1 = Z. \tag{1}$$

Nach den Frenetschen Formeln (4), (5), (6) in Nr. 272 kommt ferner:

$$d\alpha_1 = l_1 d\sigma_1, \quad d\beta_1 = m_1 d\sigma_1, \quad d\gamma_1 = n_1 d\sigma_1; \tag{2}$$

$$d\lambda_1 = l_1 d\tau_1, \quad d\mu_1 = m_1 d\tau_1, \quad d\nu_1 = n_1 d\tau_1; \tag{3}$$

$$\left\{\begin{array}{l} dl_1 = -\alpha_1 d\sigma_1 - \lambda_1 d\tau_1, \quad dm_1 = -\beta_1 d\sigma_1 - \mu_1 d\tau_1, \\ \qquad dn_1 = -\gamma_1 d\sigma_1 - \nu_1 d\tau_1. \end{array}\right. \tag{4}$$

Hier ist $d\sigma_1$ der Kontingenz- und $d\tau_1$ der Torsionswinkel der Raumkurve, so daß sich nach (2), (1) und (3) und wegen $l_1^2 + m_1^2 + n_1^2 = 1$ noch ergibt:

$$d\sigma_1 = \sqrt{d\alpha_1^2 + d\beta_1^2 + d\gamma_1^2} = \sqrt{dX^2 + dY^2 + dZ^2}, \tag{5}$$

$$d\tau_1 = \sqrt{d\lambda_1^2 + d\mu_1^2 + d\nu_1^2}. \tag{6}$$

Die Wurzeln in (5) sind nach Nr. 260 *positiv.*

Es sei ω der Winkel zwischen der positiven Tangente der Flächenkurve und der positiven Hauptnormale der Raumkurve (natürlich an entsprechenden Stellen). Ferner sei θ der Winkel zwischen der positiven Flächennormale und der positiven Hauptnormale der Flächenkurve. Alsdann liegen zwei begleitende rechtwinklige Dreikante vor, das des Punktes M der Flächenkurve und das des entsprechenden Punktes M_1 der Raumkurve. Legen wir beide mit den Punkten M und M_1 zusammen, ohne ihre Richtungen zu ändern, so kommt die erste Kante des zweiten Dreikants, nämlich die Tangente von M_1, in die Ebene der Haupt- und Binormale des ersten Dreikants, da die Tangente von M_1 der Flächennormale von M parallel

und die Flächennormale eine Normale der Flächenkurve ist. Diese erste Kante des zweiten Dreikants liegt jetzt so, daß die Kosinus ihrer Winkel mit der zweiten und dritten Kante des ersten Dreikants, d. h. mit der Haupt- und Binormale von M, gleich $\cos\theta$ und $\sin\theta$ sind. Da die Tangente der Flächenkurve zur Tangente der Raumkurve senkrecht ist, liegt ferner die erste Kante des ersten Dreikants in der Ebene der zweiten und dritten Kante des zweiten Dreikants und bildet mit ihnen Winkel, deren Kosinus gleich $\cos\omega$ und $\sin\omega$ sind. Die Kosinus derjenigen Winkel, die von der zweiten und dritten Kante des ersten Dreikants mit der zweiten bzw. dritten Kante des zweiten Dreikants gebildet werden, seien vorläufig mit A, B bzw. C, D bezeichnet. Die folgende Tabelle gibt eine bessere Übersicht über die Kosinus:

	$\alpha\beta\gamma$	lmn	$\lambda\mu\nu$
$\alpha_1\beta_1\gamma_1$	0	$\cos\theta$	$\sin\theta$
$l_1 m_1 n_1$	$\cos\omega$	A	B
$\lambda_1\mu_1\nu_1$	$\sin\omega$	C	D

Da je zwei Richtungen eines der beiden Dreikante zueinander senkrecht sind, so ergibt die Multiplikation entsprechender Glieder je zweier Zeilen bzw. zweier Reihen miteinander die Bedingungen:

$$A\cos\theta + B\sin\theta = 0, \quad C\cos\theta + D\sin\theta = 0,$$

$$\sin\omega\cos\omega + AC + BD = 0,$$

$$A\cos\omega + C\sin\omega = 0, \quad B\cos\omega + D\sin\omega = 0,$$

$$\sin\theta\cos\theta + AB + CD = 0,$$

aus denen ohne Mühe zu folgern ist:

$$A = \quad \varepsilon\sin\theta\sin\omega, \quad B = -\varepsilon\cos\theta\sin\omega,$$

$$C = -\varepsilon\sin\theta\cos\omega, \quad D = \quad \varepsilon\cos\theta\cos\omega,$$

wobei ε die Zahl $+1$ oder -1 bedeutet. Nun aber sind die drei positiven Kanten jedes der beiden Dreikante gegeneinander gleich orientiert. Entsprechend der Formel (5) in Nr. 264, die sich ja auf die Kosinus der Richtungen eines Dreikants gegenüber dem Dreikant des Koordinaten-Achsenkreuzes bezieht,

muß daher die Determinante der in der Tabelle angegebenen Größen gleich Eins sein, woraus noch $\varepsilon = -1$ hervorgeht. Daher gibt die folgende Tabelle die Kosinus der Winkel beider Dreikante an:

	$\alpha\beta\gamma$	lmn	$\lambda\mu\nu$
$\alpha_1\beta_1\gamma_1$	0	$\cos\theta$	$\sin\theta$
$l_1m_1n_1$	$\cos\omega$	$-\sin\theta\sin\omega$	$\cos\theta\sin\omega$
$\lambda_1\mu_1\nu_1$	$\sin\omega$	$\sin\theta\cos\omega$	$-\cos\theta\cos\omega$

Dies bedeutet im Einzelnen:

(7)
$$\alpha\alpha_1+\beta\beta_1+\gamma\gamma_1=0,\quad \alpha l_1+\beta m_1+\gamma n_1=\cos\omega,\quad \alpha\lambda_1+\beta\mu_1+\gamma\nu_1=\sin\omega;$$

(8)
$$l\alpha_1+m\beta_1+n\gamma_1=\cos\theta,\quad ll_1+mm_1+nn_1=-\sin\theta\sin\omega,\quad l\lambda_1+m\mu_1+n\nu_1=\sin\theta\cos\omega;$$

(9)
$$\lambda\alpha_1+\mu\beta_1+\nu\gamma_1=\sin\theta,\quad \lambda l_1+\mu m_1+\nu n_1=\cos\theta\sin\omega,\quad \lambda\lambda_1+\mu\mu_1+\nu\nu_1=-\cos\theta\cos\omega.$$

Differenziert man die Gleichungen (7), (8), (9) und nimmt man Rücksicht auf die Gleichungen (4), (5), (6) von Nr. 272 sowie auf die vorhin aufgestellten Formeln (2), (3) und (4), so ergeben sich, wenn man nach Ausführung der Differentiationen die vorliegenden Formeln (7), (8), (9) benutzt, *drei* und nur drei verschiedene Gleichungen. Man erhält sie schon, wenn man nur die erste und zweite Gleichung (7) sowie die erste Gleichung (8) differenziert. Es sind dies die folgenden Beziehungen:

$$\cos\omega\, d\sigma_1+\cos\theta\, d\sigma=0, \tag{10}$$

$$d\tau_1=d\omega-\sin\theta\, d\sigma, \tag{11}$$ $$d\tau=d\theta-\sin\omega\, d\sigma_1. \tag{12}$$

Die Gleichung (12) läßt sich mit Rücksicht auf (10) auch so schreiben:

$$d\tau=d\theta+\cos\theta\operatorname{tg}\omega\, d\sigma. \tag{13}$$

324. Bedingung für eine Krümmungskurve. Insbesondere werde jetzt angenommen, daß die gewählte Flächenkurve eine Krümmungskurve sei. Nach Satz 13, Nr. 319, ist dies der Fall, wenn x', y', z' zu X', Y', Z' proportional sind. Weil nun x', y', z' ihrerseits zu den Richtungskosinus α, β, γ der Tangente der Flächenkurve, dagegen X', Y', Z' nach (1) und (2) in voriger Nummer zu l_1, m_1, n_1 proportional sind, so

folgt: Die Flächenkurve ist dann und nur dann eine Krümmungskurve, wenn ihre Tangente der Hauptnormale der zugehörigen Raumkurve parallel läuft. *Folglich ist* $\sin\omega = 0$ *die notwendige und hinreichende Bedingung für eine Krümmungskurve.* Nach (13) in Nr. 323 verschwindet $\sin\omega$ unter der Annahme $\cos\theta \neq 0$ dann und nur dann, wenn $d\tau = d\theta$ ist. Im Falle $\cos\theta = 0$ folgt $d\tau = 0$, d. h. dann ist die Kurve nach Satz 6 in Nr. 275 eben. Demnach geht der Satz von *Lancret* hervor:

Satz 17: Eine nicht ebene Flächenkurve ist dann und nur dann eine Krümmungskurve, wenn ihr Torsionswinkel gleich dem Differentiale desjenigen Winkels ist, den die Flächennormale mit der Hauptnormale der Kurve bildet.

Ist die Kurve eben, also $d\tau = 0$, so folgt aus $\sin\omega = 0$ und aus (12) in Nr. 323 noch $d\theta = 0$. Daher gilt der Satz von *Joachimsthal:*

Satz 18: Eine Ebene schneidet eine Fläche dann und nur dann in einer Krümmungskurve, wenn die Ebene der Kurve die Fläche überall unter demselben Winkel trifft.

Denn in diesem Falle ist ja die Hauptnormale der Kurve in der Ebene gelegen; der Winkel der Ebene mit der Tangentenebene der Fläche wird daher das Komplement von θ.

Wenn die Flächenkurve eine Krümmungskurve ist, so bilden die Normalen der Fläche längs der Kurve nach der Definition in Nr. 319 eine Tangentenfläche und sind daher die Tangenten der *Gratlinie* dieser Fläche. *Mithin kann jetzt unter der in voriger Nummer eingeführten Raumkurve diese Gratlinie verstanden werden.*

Ist die Krümmungskurve insbesondere eben, so folgt noch aus (10) und (11) in voriger Nummer, daß $d\tau_1 : d\sigma_1 = \pm \operatorname{tg}\theta$, also konstant sein muß, weil ja θ, wie wir sahen, konstant ist. Es bedeutet aber bei der Gratlinie $d\tau_1 : ds_1$, falls ds_1 ihr Bogendifferential vorstellt, die Torsion und $d\sigma_1 : ds_1$ die Krümmung. Mithin wird in diesem Falle das Verhältnis aus Krümmung und Torsion bei der Gratlinie konstant. Nach Satz 16 in Nr. 296 folgt somit:

Satz 19: Die Normalen der Fläche längs einer ebenen Krümmungskurve sind die Tangenten einer Schraubenlinie.

325. Bedingung dafür, daß die Schnittkurve zweier Flächen eine Krümmungskurve ist. Zwei Flächen mögen sich längs einer Kurve schneiden. Diese Kurve ist dann in doppelter Weise eine Flächenkurve. Wir behalten die üblichen Bezeichnungen für die Auffassung der Schnittkurve als Kurve der ersten Fläche bei, während wir zur Unterscheidung bei der Auffassung der Schnittkurve als Kurve der zweiten Fläche den Akzent hinzufügen wollen. Nach (13) in Nr. 323 ist alsdann:

$$d\tau = d\theta + \cos\theta \operatorname{tg}\omega\, d\sigma, \quad d\tau = d\theta' + \cos\theta' \operatorname{tg}\omega'\, d\sigma,$$

d. h.

$$(1) \qquad d(\theta - \theta') = (\cos\theta' \operatorname{tg}\omega' - \cos\theta \operatorname{tg}\omega)\, d\sigma.$$

Nach der Definition in Nr. 323 sind θ und θ' die Winkel, die von der positiven Hauptnormale der Schnittkurve mit den positiven Normalen der beiden Flächen gebildet werden. Alle drei Geraden liegen in der Normalebene der Schnittkurve. Daher bedeutet $\theta - \theta'$ den Winkel, den die beiden Flächennormalen miteinander in einem Puukte der Schnittkurve bilden. Ist nun die Schnittkurve auf beiden Flächen eine Krümmungskurve, so wird nach Nr. 324 sowohl $\sin\omega$ als auch $\sin\omega'$ gleich Null, mithin $d(\theta - \theta') = 0$, also $\theta - \theta'$ konstant.

Hieraus folgt der Satz von *Bonnet:*

Satz 20: Ist die Schnittkurve zweier Flächen auf beiden Flächen eine Krümmungskurve, so schneiden sich die Flächen längs der Kurve unter einem konstanten Winkel.

Umgekehrt: Es sei die Schnittkurve auf der zweiten Fläche eine Krümmungskurve, und außerdem mögen sich die Kurven unter einem konstanten Winkel schneiden. Alsdann ist $\sin\omega' = 0$ und $d(\theta - \theta') = 0$, so daß aus (1) folgt, daß $\cos\theta \operatorname{tg}\omega = 0$ sein muß. Im Falle $\cos\theta \neq 0$ wird also $\sin\omega = 0$, d. h. die Kurve muß auch auf der ersten Fläche eine Krümmungskurve sein. Im Falle $\cos\theta = 0$ versagt dieser Schluß. Wir werden aber in der nächsten Nummer zeigen, daß in der Tat stets die Folgerung gilt:

Satz 21: Schneiden sich zwei Flächen längs einer Kurve unter einem konstanten Winkel und ist die Schnittkurve auf der einen Fläche eine Krümmungskurve, so ist sie es auch auf der andern.

Weil auf einer Ebene oder Kugel jede Kurve nach Nr. 322 eine Krümmungskurve ist, so ergibt sich noch ein Satz, der den Joachimsthalschen Satz 18 in Nr. 324 mit umfaßt:

Satz 22: Eine auf einer Fläche gelegene ebene oder sphärische Kurve ist eine Krümmungskurve der Fläche dann und nur dann, wenn die Ebene oder Kugel, auf der die Kurve liegt, die Fläche unter einem konstanten Winkel schneidet.

Eine einfache Anwendung von Satz 21 ist diese: Die Tangentenebenen einer Tangentenfläche berühren die Fläche längs erzeugender Geraden, vgl. Nr. 281, und bilden also längs dieser Geraden den Winkel Null mit der Fläche. Mithin folgt:

Satz 23: Die Erzeugenden einer Tangentenfläche sind Krümmungskurven der Fläche.

326. Andere Ableitung des Hauptsatzes der vorigen Nummer. Wir betrachten wieder zwei Flächen und wollen die Ableitungen von z nach x und y auf der zweiten Fläche zum Unterschiede mit dem Index 1 versehen. Alsdann gelten für die Schnittkurve beider Flächen die beiden Formeln:

$$dz = p\,dx + q\,dy, \qquad dz = p_1 dx + q_1 dy.$$

Wenn nun der Akzent die Differentiation nach derjenigen Hilfsveränderlichen andeutet, mittels derer die Schnittkurve dargestellt wird, so folgt hieraus:

$$\frac{x'}{q - q_1} = \frac{y'}{p_1 - p} = \frac{z'}{q p_1 - q_1 p}. \tag{1}$$

Diese drei gleichgroßen Brüche wollen wir mit k bezeichnen. Außerdem setzen wir:

$$\frac{x' + p z'}{p'} = P, \quad \frac{y' + q z'}{q'} = Q, \quad \frac{x' + p_1 z'}{p_1'} = P_1, \quad \frac{y' + q_1 z'}{q_1'} = Q_1. \tag{2}$$

Alsdann kommt:

$$Pp' = [q(pp_1 + qq_1 + 1) - q_1(p^2 + q^2 + 1)]\,k,$$
$$Qq' = [p_1(p^2 + q^2 + 1) - p(pp_1 + qq_1 + 1)]\,k.$$

Wenn φ den Winkel der Normalen beider Flächen in einem Punkte ihrer Schnittkurve bedeutet, also nach (10) in Nr. 253:

$$\cos\varphi = \frac{pp_1 + qq_1 + 1}{\sqrt{p^2 + q^2 + 1}\,\sqrt{p_1^{\,2} + q_1^{\,2} + 1}}$$

ist, so folgt aus dem Vorhergehenden:

$$\frac{\partial \cos \varphi}{\partial p} p' + \frac{\partial \cos \varphi}{\partial q} q' = \frac{(Q-P)\, p'q'}{k\sqrt{p^2+q^2+1}^3 \sqrt{p_1^2+q_1^2+1}}.$$

Eine analoge Formel ergibt sich, wenn p, q, p', q' mit p_1, q_1, p_1', q_1' und P, Q mit P_1, Q_1 vertauscht werden. Durch Addition beider Formeln geht hervor:

$$(3)\quad (\cos \varphi)' = \frac{1}{k\sqrt{p^2+q^2+1}\sqrt{p_1^2+q_1^2+1}} \left(\frac{Q-P}{p^2+q^2+1} p'q' + \frac{Q_1-P_1}{p_1^2+q_1^2+1} p_1'q_1' \right).$$

Nach (2) sind nun wegen (5) in Nr. 319:

$$(4)\qquad (Q-P)p'q' = 0 \quad \text{und} \quad (Q_1-P_1)p_1'q_1' = 0$$

die Bedingungen dafür, daß die Schnittkurve auf der einen oder andern Fläche eine Krümmungskurve ist. Fügen wir noch die Gleichung hinzu, die aussagt, daß der Winkel φ konstant ist:

$$(5)\qquad (\cos \varphi)' = 0,$$

so lehrt die Formel (3), daß zwei der drei Bedingungen (4) und (5) jedesmal die dritte nach sich ziehen, womit die Sätze 20 und 21 der vorigen Nummer von neuem bewiesen sind. Dabei wäre nur noch zu bemerken, daß die in (3) auftretende Größe k, die ja die drei gleichen Brüche (1) darstellt, nur dann verschwindet, wenn die Schnittkurve eine Gerade ist, in welchem Falle wir den Satz 18 in Nr. 324 heranziehen können, indem wir durch die Gerade eine Ebene legen.

§ 4. Dreifache orthogonale Flächensysteme.

327. Begriff eines dreifachen Flächensystems. Werden drei Funktionen φ, χ, ψ von x, y, z drei willkürlichen Konstanten λ, μ, ν gleichgesetzt:

$$(1)\qquad \varphi(x, y, z) = \lambda, \quad \chi(x, y, z) = \mu, \quad \psi(x, y, z) = \nu,$$

so stellt jede einzelne Gleichung eine Flächenschar dar. Wir setzen voraus, daß diejenigen drei Flächen, die sich ergeben, wenn wir λ, μ, ν drei bestimmte Werte — innerhalb eines gewissen Variabilitätsbereiches — beilegen, einen Schnittpunkt (x, y, z) haben, d. h. daß die drei Gleichungen (1) nach x, y, z

auflösbar seien (vgl. Nr. 77). Dies ist nach Satz 3 in Nr. 79 der Fall, wenn, wie wir in der Folge immer voraussetzen, die drei Funktionen φ, χ, ψ voneinander *unabhängig* sind. Alsdann definieren die Gleichungen (1) ein sogenanntes *dreifaches Flächensystem*.

Es seien:

$$(2) \qquad x = \Phi(\lambda, \mu, \nu), \qquad y = X(\lambda, \mu, \nu), \qquad z = \Psi(\lambda, \mu, \nu)$$

die Auflösungen der Gleichungen (1), so daß hierin x, y, z als die zu den drei Funktionen (1) *inversen* Funktionen von λ, μ, ν dargestellt sind (vgl. Nr. 81). Die rechtwinkligen Koordinaten eines beliebigen Punktes (x, y, z) des Raumes sind — wenigstens innerhalb eines gewissen Bereiches — durch (2) mittels der drei veränderlichen Größen λ, μ, ν ausgedrückt. Ein Beispiel hierzu ist die Art, wie man die rechtwinkligen Koordinaten x, y, z durch räumliche Polarkoordinaten r, θ, ψ ausdrücken kann, vgl. Nr. 251. Wenn drei nach λ, μ, ν auflösbare Gleichungen (2) vorliegen, so sagt man, daß die rechtwinkligen Koordinaten x, y, z als Funktionen *krummliniger Koordinaten* λ, μ, ν dargestellt seien. Während nämlich je zwei der drei Gleichungen $x =$ konst., $y =$ konst., $z =$ konst. zusammen eine *gerade* Linie definieren, wird durch je zwei der drei Gleichungen $\lambda =$ konst., $\mu =$ konst., $\nu =$ konst. nach (1) eine *krumme* Linie, nämlich die Schnittlinie von zwei Flächen der drei Scharen, gegeben.

Wenn wir nun etwa den Größen μ und ν bestimmte Werte beilegen, aber λ veränderlich lassen, so stellen die Gleichungen (2) die Punkte (x, y, z) der Schnittlinie zweier Flächen $\mu =$ konst. und $\nu =$ konst. des Systems (1) dar, *ausgedrückt mittels der Hilfsveränderlichen* λ. Daher sind auch nach Nr. 252 *die Ableitungen* x_λ, y_λ, z_λ *der drei Funktionen (2) proportional den Richtungskosinus der Tangente dieser Schnittkurve.*

Wenn wir in der Folge von den drei *Funktionen* x, y, z oder von den drei *Funktionen* λ, μ, ν sprechen, so meinen wir damit die drei Funktionen (2) von λ, μ, ν bzw. die drei Funktionen (1) von x, y, z.

328. Dreifaches orthogonales Flächensystem. Bedeuten wie vorher x, y, z drei voneinander unabhängige Funktionen

von λ, μ, ν und umgekehrt λ, μ, ν die dazu inversen Funktionen von x, y, z, so heißt das dadurch definierte dreifache Flächensystem insbesondere *orthogonal*, wenn jede Fläche jeder Schar alle Flächen der beiden andern Scharen überall senkrecht schneidet. Die Bedingungen hierfür lassen sich in doppelter Weise ausdrücken:

Zunächst nämlich sind, wenn x, y, z die Koordinaten eines beliebig herausgegriffenen Punktes bedeuten, $\lambda_x, \lambda_y, \lambda_z$ den Richtungskosinus der Normale derjenigen Fläche $\lambda =$ konst. proportional, die durch diesen Punkt geht, nach Nr. 253. Ebenso sind μ_x, μ_y, μ_z bzw. ν_x, ν_y, ν_z proportional den Richtungskosinus der Normalen derjenigen beiden Flächen $\mu =$ konst. und $\nu =$ konst., die durch den Punkt gehen. Für die Orthogonalität ist folglich notwendig und hinreichend, daß die Summen der Produkte entsprechender Ableitungen der μ und ν, der ν und λ und der λ und μ gleich Null seien. Wir können aber auch so schließen: Es ist notwendig und hinreichend, daß die drei durch den beliebigen Punkt (x, y, z) gehenden Schnittkurven je zweier der genannten drei Flächen in diesem Punkte zueinander senkrechte Tangenten haben. Nach der vorigen Nummer sind nun $x_\lambda, y_\lambda, z_\lambda$, ferner x_μ, y_μ, z_μ und endlich x_ν, y_ν, z_ν den Richtungskosinus dieser drei Tangenten proportional, so daß die Summen der Produkte entsprechender Ableitungen der x, y, z nach μ und ν, nach ν und λ und nach λ und μ gleich Null gesetzt werden müssen.

Demnach lassen sich *die notwendigen und hinreichenden Bedingungen der Orthogonalität* in einer der beiden folgenden Arten ausdrücken:

$$(1)\quad \begin{cases} \mu_x\nu_x + \mu_y\nu_y + \mu_z\nu_z = 0, \\ \nu_x\lambda_x + \nu_y\lambda_y + \nu_z\lambda_z = 0, \\ \lambda_x\mu_x + \lambda_y\mu_y + \lambda_z\mu_z = 0, \end{cases} \qquad (2)\quad \begin{cases} x_\mu x_\nu + y_\mu y_\nu + z_\mu z_\nu = 0, \\ x_\nu x_\lambda + y_\nu y_\lambda + z_\nu z_\lambda = 0, \\ x_\lambda x_\mu + y_\lambda y_\mu + z_\lambda z_\mu = 0. \end{cases}$$

In Nr. 330 wird gezeigt werden, wie man die Bedingungen der einen Art in die der andern Art umformen kann.

329. Partielle Differentialgleichung dritter Ordnung für ein dreifaches orthogonales Flächensystem. Aus den Orthogonalitätsbedingungen der ersten Art kann man zwei der drei Funktionen λ, μ, ν vollständig eliminieren, wenn

man noch diejenigen Gleichungen benutzt, die durch die Differentiation dieser Bedingungen hervorgehen. Nach den beiden ersten Gleichungen (1) der vorigen Nummer ist nämlich zunächst:

$$(1)\quad K\nu_x = \lambda_y\mu_z - \lambda_z\mu_y,\quad K\nu_y = \lambda_z\mu_x - \lambda_x\mu_z,\quad K\nu_z = \lambda_x\mu_y - \lambda_y\mu_x,$$

wobei K eine gewisse Funktion von x, y, z bedeutet; und hiernach gelten auch die Formeln:

$$\nu_x\left(\frac{\partial K\nu_y}{\partial z} - \frac{\partial K\nu_z}{\partial y}\right) = \nu_x\nu_y K_z - \nu_x\nu_z K_y,$$

$$\nu_y\left(\frac{\partial K\nu_z}{\partial x} - \frac{\partial K\nu_x}{\partial z}\right) = \nu_y\nu_z K_x - \nu_y\nu_x K_z,$$

$$\nu_z\left(\frac{\partial K\nu_x}{\partial y} - \frac{\partial K\nu_y}{\partial x}\right) = \nu_z\nu_x K_y - \nu_z\nu_y K_x.$$

Addieren wir alle drei Gleichungen, so geht rechts Null hervor. Setzen wir außerdem die Werte von $K\nu_x$, $K\nu_y$, $K\nu_z$ aus (1) auf der linken Seite ein, so kommt:

$$\begin{aligned}&\nu_x\left[\frac{\partial(\lambda_z\mu_x - \lambda_x\mu_z)}{\partial z} - \frac{\partial(\lambda_x\mu_y - \lambda_y\mu_x)}{\partial y}\right]\\ &+ \nu_y\left[\frac{\partial(\lambda_x\mu_y - \lambda_y\mu_x)}{\partial x} - \frac{\partial(\lambda_y\mu_z - \lambda_z\mu_y)}{\partial z}\right]\\ &+ \nu_z\left[\frac{\partial(\lambda_y\mu_z - \lambda_z\mu_y)}{\partial y} - \frac{\partial(\lambda_z\mu_x - \lambda_x\mu_z)}{\partial x}\right] = 0.\end{aligned}$$

Führen wir die Differentiationen aus und addieren wir noch die beiden ersten Gleichungen (1) der vorigen Nummer, nachdem sie zuvor mit

$$-\lambda_{xx} - \lambda_{yy} - \lambda_{zz} \quad \text{bzw.} \quad \mu_{xx} + \mu_{yy} + \mu_{zz}$$

multipliziert worden sind, so folgt:

$$(2)\left\{\begin{aligned}&\nu_x(\lambda_x\mu_{xx} + \lambda_y\mu_{xy} + \lambda_z\mu_{xz} - \mu_x\lambda_{xx} - \mu_y\lambda_{xy} - \mu_z\lambda_{xz})\\ &+ \nu_y(\lambda_x\mu_{xy} + \lambda_y\mu_{yy} + \lambda_z\mu_{yz} - \mu_x\lambda_{xy} - \mu_y\lambda_{yy} - \mu_z\lambda_{yz})\\ &+ \nu_z(\lambda_x\mu_{xz} + \lambda_y\mu_{yz} + \lambda_z\mu_{zz} - \mu_x\lambda_{xz} - \mu_y\lambda_{yz} - \mu_z\lambda_{zz}) = 0.\end{aligned}\right.$$

Um hieraus die Ableitungen zweiter Ordnung von μ zu entfernen, differenzieren wir zunächst die dritte Gleichung (1) der vorigen Nummer je einmal nach x, y, z, wodurch sich ergibt:

$$\lambda_x\mu_{xx} + \lambda_y\mu_{xy} + \lambda_z\mu_{xz} = -\mu_x\lambda_{xx} - \mu_y\lambda_{xy} - \mu_z\lambda_{xz},$$

$$\lambda_x\mu_{xy} + \lambda_y\mu_{yy} + \lambda_z\mu_{yz} = -\mu_x\lambda_{xy} - \mu_y\lambda_{yy} - \mu_z\lambda_{yz},$$

$$\lambda_x\mu_{xz} + \lambda_y\mu_{yz} + \lambda_z\mu_{zz} = -\mu_x\lambda_{xz} - \mu_y\lambda_{yz} - \mu_z\lambda_{zz}.$$

Setzen wir die rechts stehenden Werte für die links stehenden in (2) ein und führen wir ferner für ν_x, ν_y, ν_z die in (1) rechts angegebenen zu ihnen proportionalen Größen ein, so kommt:

$$(3)\quad \begin{cases} (\lambda_y\mu_z - \lambda_z\mu_y)(\mu_x\lambda_{xx} + \mu_y\lambda_{xy} + \mu_z\lambda_{xz}) \\ + (\lambda_z\mu_x - \lambda_x\mu_z)(\mu_x\lambda_{xy} + \mu_y\lambda_{yy} + \mu_z\lambda_{yz}) \\ + (\lambda_x\mu_y - \lambda_y\mu_x)(\mu_x\lambda_{xz} + \mu_y\lambda_{yz} + \mu_z\lambda_{zz}) = 0. \end{cases}$$

Diese Gleichung enthält ν nicht mehr; sie ist außerdem frei von den zweiten Ableitungen von μ und hat, nach den ersten Ableitungen von μ geordnet, die Form:

$$(4)\quad A\mu_x^2 + B\mu_y^2 + C\mu_z^2 + A'\mu_y\mu_z + B'\mu_z\mu_x + C'\mu_x\mu_y = 0,$$

wobei die Koeffizienten die Bedeutungen haben:

$$(5)\quad \begin{cases} A = \lambda_z\lambda_{xy} - \lambda_y\lambda_{xz}, \quad B = \lambda_x\lambda_{yz} - \lambda_z\lambda_{yx}, \quad C = \lambda_y\lambda_{zx} - \lambda_x\lambda_{zy}, \\ A' = \lambda_x(\lambda_{zz} - \lambda_{yy}) + \lambda_y\lambda_{xy} - \lambda_z\lambda_{xz}, \\ B' = \lambda_y(\lambda_{xx} - \lambda_{zz}) + \lambda_z\lambda_{yz} - \lambda_x\lambda_{yx}, \\ C' = \lambda_z(\lambda_{yy} - \lambda_{xx}) + \lambda_x\lambda_{zx} - \lambda_y\lambda_{zy}. \end{cases}$$

In (4) und in der dritten Gleichung (1) der vorigen Nummer haben wir nun zwei Gleichungen, die von ν ganz frei sind und von μ nur die ersten Ableitungen μ_x, μ_y, μ_z enthalten und zwar homogen, während die rechten Seiten der beiden Gleichungen gleich Null sind. Aus ihnen lassen sich folglich die Verhältnisse der Ableitungen μ_x, μ_y, μ_z berechnen als die Verhältnisse dreier Größen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, die jedoch so umständlich sind, daß wir sie nicht ausführlich hinsetzen. Es sind $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ jedenfalls drei berechenbare Funktionen der ersten und zweiten Ableitungen von λ allein. Verstehen wir unter $\mathfrak{K}$ eine gewisse Funktion von x, y, z, so können wir nun schreiben:

$$(6)\quad \mathfrak{K}\mu_x = \mathfrak{A}, \quad \mathfrak{K}\mu_y = \mathfrak{B}, \quad \mathfrak{K}\mu_z = \mathfrak{C}.$$

Ebenso wie wir nach den Formeln (1) eine Summe bildeten, die gleich Null war, erkennen wir, daß jetzt auch:

$$\mu_x\left(\frac{\partial\mathfrak{K}\mu_y}{\partial z} - \frac{\partial\mathfrak{K}\mu_z}{\partial y}\right) + \mu_y\left(\frac{\partial\mathfrak{K}\mu_z}{\partial x} - \frac{\partial\mathfrak{K}\mu_x}{\partial z}\right) + \mu_z\left(\frac{\partial\mathfrak{K}\mu_x}{\partial y} - \frac{\partial\mathfrak{K}\mu_y}{\partial x}\right) = 0$$

ist. Mithin folgt nach (6):

$$(7)\quad \mathfrak{A}(\mathfrak{B}_z - \mathfrak{C}_y) + \mathfrak{B}(\mathfrak{C}_x - \mathfrak{A}_z) + \mathfrak{C}(\mathfrak{A}_y - \mathfrak{B}_x) = 0.$$

Da $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ Funktionen der Ableitungen erster und zweiter Ordnung von λ allein sind, so enthält die Gleichung (7) nur die Ableitungen erster bis dritter Ordnung von λ. Es heben sich übrigens, wie ihre Ausrechnung lehren würde, nicht etwa alle Glieder links gegenseitig fort. Eine Gleichung nun, die außer mehreren unabhängigen Veränderlichen — hier x, y, z — eine Funktion λ und ihre partiellen Ableitungen bis zur n^{ten} Ordnung enthält, heißt *eine partielle Differentialgleichung n^{ter} Ordnung für die Funktion λ*. Hier liegt eine spezielle vor, so daß sich der Satz von *Bonnet* ergibt:

Satz 24: Gehört die Flächenschar $\lambda(x, y, z) = konst.$ einem dreifachen orthogonalen Systeme an, so genügt die Funktion λ einer gewissen partiellen Differentialgleichung dritter Ordnung, die von x, y, z und λ selbst frei ist.

330. Ableitung der Orthogonalitätsbedingungen der einen Art aus denen der anderen Art. Aus den Nr. 328 angegebenen Orthogonalitätsbedingungen (1) lassen sich, wie schon angekündigt wurde, die sie ersetzenden Bedingungen (2) direkt rechnerisch ableiten. Es sind ja x, y, z Funktionen von λ, μ, ν, die ihrerseits wieder die dazu inversen Funktionen von x, y, z bedeuten, so daß z. B. x, ausgedrückt durch λ, μ, ν, eine *zusammengesetzte* Funktion von x, y, z ist (vgl. Nr. 41, 42). In dieser Weise aufgefaßt, sind die Ableitungen von x nach x, y, z gleich 1, 0, 0. Somit ergibt sich:

$$x_\lambda \lambda_x + x_\mu \mu_x + x_\nu \nu_x = 1, \quad x_\lambda \lambda_y + x_\mu \mu_y + x_\nu \nu_y = 0,$$
$$x_\lambda \lambda_z + x_\mu \mu_z + x_\nu \nu_z = 0.$$

Multiplizieren wir diese drei Gleichungen bzw. mit $\lambda_x, \lambda_y, \lambda_z$ oder μ_x, μ_y, μ_z oder ν_x, ν_y, ν_z und addieren sie alsdann jedesmal, so ergeben sich wegen der Orthogonalitätsbedingungen (1) in Nr. 328 drei Gleichungen, zu denen wir sogleich die analogen Gleichungen für die Ableitungen nach y und z hinzufügen:

$$(1) \quad \begin{cases} \lambda_x = L^2 x_\lambda, & \mu_x = M^2 x_\mu, & \nu_x = N^2 x_\nu, \\ \lambda_y = L^2 y_\lambda, & \mu_y = M^2 y_\mu, & \nu_y = N^2 y_\nu, \\ \lambda_z = L^2 z_\lambda, & \mu_z = M^2 z_\mu, & \nu_z = N^2 z_\nu. \end{cases}$$

Hierin ist zur Abkürzung gesetzt worden:

(2) $\lambda_x^2 + \lambda_y^2 + \lambda_z^2 = L^2, \quad \mu_x^2 + \mu_y^2 + \mu_z^2 = M^2, \quad \nu_x^2 + \nu_y^2 + \nu_z^2 = N^2.$

Um L^2, M^2, N^2 durch die Ableitungen von x, y, z nach λ, μ, ν auszudrücken, quadrieren wir die Gleichungen (1) und addieren dann jedesmal die drei untereinander stehenden Gleichungen. Alsdann geht wegen der in (2) angegebenen Bedeutung von L^2, M^2, N^2 sofort hervor:

$$(3) \quad \frac{1}{L^2} = x_\lambda^2 + y_\lambda^2 + z_\lambda^2, \quad \frac{1}{M^2} = x_\mu^2 + y_\mu^2 + z_\mu^2, \quad \frac{1}{N^2} = x_\nu^2 + y_\nu^2 + z_\nu^2.$$

Setzen wir diese Werte in (1) ein, so werden die Ableitungen von λ, μ, ν nach x, y, z durch die von x, y, z nach λ, μ, ν ausgedrückt. Umgekehrt geben die Gleichungen (1) auch sofort die Ableitungen von x, y, z nach λ, μ, ν, ausgedrückt durch die von λ, μ, ν nach x, y, z.

Werden die Werte (1) in die Orthogonalitätsbedingungen (1) von Nr. 328 eingeführt, *so gehen sofort die Orthogonalitätsbedingungen* (2) *von Nr. 328 hervor.*

331. Zweite Ableitungen der Koordinaten in einem dreifachen orthogonalen Systeme. Differenzieren wir die Orthogonalitätsbedingungen (2) von Nr. 328 bzw. nach λ, μ, ν und subtrahieren wir von der Summe der hervorgehenden beiden letzten Gleichungen die erste, so folgt:

$$x_\lambda x_{\mu\nu} + y_\lambda y_{\mu\nu} + z_\lambda z_{\mu\nu} = 0.$$

Differenzieren wir die zweite Gleichung (3) der vorigen Nummer nach ν und die dritte nach μ, so kommt:

$$x_\mu x_{\mu\nu} + y_\mu y_{\mu\nu} + z_\mu z_{\mu\nu} = -\frac{M_\nu}{M^3}, \quad x_\nu x_{\mu\nu} + y_\nu y_{\mu\nu} + z_\mu z_{\mu\nu} = -\frac{N_\mu}{N^3}.$$

Werden diese drei Gleichungen bzw. mit λ_x, μ_x, ν_x multipliziert und darauf addiert, so erhalten $x_{\mu\nu}$, $y_{\mu\nu}$, $z_{\mu\nu}$ Koeffizienten, die offenbar nichts anderes als $\partial x : \partial x$, $\partial y : \partial x$, $\partial z : \partial x$, d. h. als 1, 0, 0 sind, so daß mithin links nur $x_{\mu\nu}$ auftritt. Rechts setzen wir für μ_x und ν_x ihre Werte aus den Gleichungen (1) der vorigen Nummer ein. Dann ergibt sich eine Formel für $x_{\mu\nu}$, und wir geben außerdem sogleich die analogen Formeln für $y_{\mu\nu}$, $z_{\mu\nu}$ an, die hervorgehen, wenn die obigen drei Gleichungen bzw. mit λ_y, μ_y, ν_y oder λ_z, μ_z, ν_z multipliziert und dann addiert werden:

$$
(1) \qquad \begin{cases} x_{\mu\nu} = -\dfrac{M_\nu}{M} x_\mu - \dfrac{N_\mu}{N} x_\nu, \\[2ex] y_{\mu\nu} = -\dfrac{M_\nu}{M} y_\mu - \dfrac{N_\mu}{N} y_\nu, \\[2ex] z_{\mu\nu} = -\dfrac{M_\nu}{M} z_\mu - \dfrac{N_\mu}{N} z_\nu. \end{cases}
$$

Diese Formeln lassen sich auch so schreiben:

$$
(2) \qquad \frac{\frac{\partial M x_\mu}{\partial \nu}}{x_\nu} = \frac{\frac{\partial M y_\mu}{\partial \nu}}{y_\nu} = \frac{\frac{\partial M z_\mu}{\partial \nu}}{z_\nu} = -\frac{M}{N} N_\mu .
$$

Analoge Formeln gehen aus (1) und (2) hervor, wenn gleichzeitig λ, μ, ν und L, M, N zyklisch vertauscht werden.

332. Der Dupinsche Satz über dreifache orthogonale Systeme. Die letzten Formeln haben eine schöne geometrische Bedeutung:

Werden für λ und μ bestimmte Zahlen gewählt, während ν veränderlich bleibt, so beschreibt der Punkt (x, y, z) nach Nr. 327 die Schnittkurve zweier Flächen $\lambda =$ konst. und $\mu =$ konst. des Systems; längs der Kurve ist ν die unabhängige Veränderliche, und die Richtungskosinus der Kurventangente verhalten sich wie $x_\nu : y_\nu : z_\nu$. Die Fläche $\mu =$ konst. hat im Punkte (x, y, z) eine Normale, deren Richtungskosinus X, Y, Z proportional μ_x, μ_y, μ_z und also wegen der zweiten Formel (2) von Nr. 330 gleich $\mu_x : M$, $\mu_y : M$, $\mu_z : M$, d. h. nach den Formeln der zweiten Reihe in (1), Nr. 330, gleich Mx_μ, My_μ, Mz_μ sind. Daher besagen die Gleichungen (2) der vorigen Nummer, wenn wir von dem letzten Terme absehen, daß längs jener Schnittkurve, längs derer ν die unabhängige Veränderliche vorstellt,

$$
X_\nu : Y_\nu : Z_\nu = x_\nu : y_\nu : z_\nu
$$

ist. Dies aber bedeutet nach Satz 13 in Nr. 319, daß die Schnittkurve eine *Krümmungskurve* der Fläche $\mu =$ konst. ist. Ebenso folgt aus den Gleichungen, die den Formeln (2) in voriger Nummer analog sind, daß die Kurve auch eine Krümmungskurve der Fläche $\lambda =$ konst. ist. Wir gelangen somit zu dem Satze von *Dupin:*

Satz 25: In einem dreifachen orthogonalen Flächensysteme wird jede Fläche einer Schar von allen Flächen der beiden anderen Scharen in Krümmungskurven geschnitten.

333. Elliptische Koordinaten. Ein besonders wichtiges System von krummlinigen Koordinaten (vgl. Nr. 327) sind die *elliptischen*. Darunter versteht man die drei Wurzeln λ, μ, ν der für α kubischen Gleichung:

$$\frac{x^2}{a^2-\alpha}+\frac{y^2}{b^2-\alpha}+\frac{z^2}{c^2-\alpha}=1, \tag{1}$$

in der a^2, b^2, c^2 bestimmte Konstanten bedeuten und etwa $a^2 > b^2 > c^2$ sein möge. Die kubische Gleichung läßt sich auch so schreiben:

$$x^2(b^2-\alpha)(c^2-\alpha)+y^2(c^2-\alpha)(a^2-\alpha)+z^2(a^2-\alpha)(b^2-\alpha)$$
$$-(a^2-\alpha)(b^2-\alpha)(c^2-\alpha)=0,$$

wo links eine ganze rationale Funktion dritten Grades von α steht, die mit α zugleich nach $+\infty$ oder $-\infty$ strebt, während sie für $\alpha=c^2$ positiv, für $\alpha=b^2$ negativ und für $\alpha=a^2$ positiv ist, so daß die Gleichung in der Tat nach Satz 5 in Nr. 21 drei reelle Wurzeln λ, μ, ν hat, die so liegen, wie es die Ungleichungen angeben:

$$\lambda < c^2 < \mu < b^2 < \nu < a^2. \tag{2}$$

Die drei Gleichungen, die aus (1) hervorgehen, wenn darin für α irgend drei solche Werte λ, μ, ν gesetzt werden, die den Ungleichungen (2) genügen, lassen sich, da sie in x^2, y^2, z^2 linear sind, ohne Mühe nach x^2, y^2, z^2 auflösen. Insbesondere ergibt sich:

$$x^2=\frac{(a^2-\lambda)(a^2-\mu)(a^2-\nu)}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)}, \tag{3}$$

woraus die Werte von y^2 und z^2 durch zyklische Vertauschung von a, b, c hervorgehen. Man sieht überdies, daß alle drei Werte positiv sind, sobald man die Bedingungen (2) berücksichtigt. Es ergeben sich mithin für x, y, z drei Funktionen von λ, μ, ν, *wobei* λ, μ, ν *die durch* (2) *vorgeschriebenen Variabilitätsbereiche haben.* Wir kommen also zu Gleichungen, die sich der allgemeinen Form (2) in Nr. 327 unterordnen, d. h. wir gelangen zu einem *dreifachen Flächensysteme.* Wenn ins-

besondere für α irgend ein Wert λ gemäß (2) gewählt wird, so stellt (1) ein *Ellipsoid* dar. Wählen wir dagegen für α irgend einen Wert μ gemäß (2), so definiert (1) ein *einschaliges Hyperboloid.* Wenn wir endlich für α einen Wert ν gemäß (2) annehmen, so liefert (1) ein *zweischaliges Hyperboloid.* Das Vorhergehende zeigt, daß umgekehrt durch *jeden* Punkt (x, y, z) des Raumes drei solche Flächen gehen. Alle diese Flächen zweiter Ordnung haben die Koordinatenebenen zu Achsenebenen, und sie schneiden die Koordinatenebenen in konfokalen Kegelschnitten. Daher liegt ein *dreifaches System von konfokalen Flächen zweiter Ordnung* vor. Nach (3) ist:

$$x_\mu x_\nu = \frac{1}{4} \frac{a^2 - \lambda}{(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)},$$

und durch zyklische Vertauschung von a, b, c gehen $y_\mu y_\nu$ und $z_\mu z_\nu$ hervor. Diese drei Werte erfüllen die erste Gleichung (2) in Nr. 328. Analog erkennt man, daß die beiden anderen Gleichungen befriedigt werden, d. h. *das System der konfokalen Flächen zweiter Ordnung ist orthogonal.*

334. Krümmungskurven des Ellipsoids. Nach Satz 25 in Nr. 332 schneiden die Flächen des soeben betrachteten Systems einander in *Krümmungskurven.* Demnach können wir die Krümmungskurven irgend einer der Flächen zweiter Ordnung berechnen. Wir greifen insbesondere eines der *Ellipsoide* heraus, indem wir $\lambda = 0$ wählen:

$$(1) \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \qquad (a^2 > b^2 > c^2).$$

Dies Ellipsoid wird also von den einschaligen Hyperboloiden mit dem Parameter μ:

$$(2) \qquad \frac{x^2}{a^2 - \mu} + \frac{y^2}{b^2 - \mu} + \frac{z^2}{c^2 - \mu} = 1 \qquad (c^2 < \mu < b^2)$$

und von den zweischaligen Hyperboloiden mit dem Parameter ν:

$$(3) \qquad \frac{x^2}{a^2 - \nu} + \frac{y^2}{b^2 - \nu} + \frac{z^2}{c^2 - \nu} = 1 \qquad (b^2 < \nu < a^2)$$

in Krümmungskurven geschnitten. Die Schnitte mit der Flächenschar (2) sind die Krümmungskurven der einen Schar, die mit der Flächenschar (3) die Krümmungskurven der anderen Schar.

Um die Gestalten der Krümmungskurven zu untersuchen, projizieren wir sie auf die Achsenebenen des Ellipsoids (1), d. h. auf die Koordinatenebenen. Wir eliminieren also entweder x oder y oder z aus (1) und (2) bzw. aus (1) und (3). Da sich (2) von (3) nur durch die Bezeichnung der willkürlichen Konstanten μ und ν unterscheidet, so setzen wir für beide dasselbe Zeichen α und erhalten durch die Elimination von x oder y oder z die drei Gleichungen:

$$\frac{b^2-a^2}{b^2(b^2-\alpha)}y^2+\frac{c^2-a^2}{c^2(c^2-\alpha)}z^2=1, \tag{4}$$

$$\frac{c^2-b^2}{c^2(c^2-\alpha)}z^2+\frac{a^2-b^2}{a^2(a^2-\alpha)}x^2=1, \tag{5}$$

$$\frac{a^2-c^2}{a^2(a^2-\alpha)}x^2+\frac{b^2-c^2}{b^2(b^2-\alpha)}y^2=1. \tag{6}$$

Z. B. stellt (4) die Projektion der Krümmungskurven beider Scharen in der yz-Ebene dar und zwar die der ersten Schar, wenn α zwischen c^2 und b^2 gewählt wird, dagegen die der zweiten Schar, wenn α zwischen b^2 und a^2 gewählt wird. Man sieht, *daß sich alle Krümmungskurven des Ellipsoids auf jede Achsenebene als solche Kegelschnitte projizieren, deren Achsen auf den Achsen des Ellipsoids liegen.*

Die Koeffizienten der Koordinatenquadrate in (4), (5), (6) haben, je nachdem α zwischen c^2 und b^2 oder zwischen b^2 und a^2 gewählt wird, die hier angegebenen Vorzeichen:

	$c^2 < \alpha < b^2$	$b^2 < \alpha < a^2$
(4)	$-\quad+$	$+\quad+$
(5)	$+\quad+$	$+\quad+$
(6)	$+\quad+$	$+\quad-$

Die Krümmungskurven stellen sich daher sämtlich, auf die Ebene der größten und kleinsten Achse des Ellipsoids, d. h. auf die xz-Ebene projiziert — siehe (5) —, als *Ellipsen* dar. Dagegen erscheinen die der einen oder anderen Art, auf eine der beiden anderen Achsenebenen projiziert, abwechselnd als *Hyperbeln* bzw. *Ellipsen.*

335. Projektion der Krümmungskurven des Ellipsoids in der Ebene der größten und kleinsten Achse.

334, 335]

Wir betrachten jetzt insbesondere die Ellipsen, die sich durch Projektion der Krümmungskurven beider Scharen in der xz-Ebene ergeben, siehe (5) in voriger Nummer:

$$(1) \qquad \frac{c^2-b^2}{c^2(c^2-\alpha)}z^2+\frac{a^2-b^2}{a^2(a^2-\alpha)}x^2=1.$$

Die Halbachsen einer solchen Ellipse seien mit x_1 und z_1 bezeichnet. Sie hängen von dem für α gewählten Zahlenwerte ab; es ist:

$$x_1^2=\frac{a^2(a^2-\alpha)}{a^2-b^2},\quad z_1^2=\frac{c^2(c^2-\alpha)}{c^2-b^2}.$$

Elimination von α liefert eine Gleichung für x_1 und y_1:

$$(2) \qquad \frac{a^2-b^2}{a^2(a^2-c^2)}x_1^2+\frac{b^2-c^2}{c^2(a^2-c^2)}z_1^2=1.$$

Dies aber ist wegen $a^2>b^2>c^2$ die Gleichung einer Ellipse, die wir nach *Monge* als *Hilfsellipse* zur Konstruktion der Projektion der Krümmungskurven benutzen. Ist nämlich P_1 ein beliebiger Punkt dieser Hilfsellipse, so sind seine Koordinaten x_1, z_1 die Halbachsen einer der zu konstruierenden Ellipsen, deren Achsen auf der x-Achse und z-Achse liegen, d. h. die Fußpunkte der Lote von P_1 auf der x- und z-Achse sind Haupt- und Nebenscheitel einer solchen Ellipse. Man erkennt, daß alle Ellipsen innerhalb der Hilfsellipse liegen, indem zwei von ihnen in Strecken ausarten, nämlich in die große und kleine Achse der Hilfsellipse. (Vgl. auch Nr. 249 für $n=m=2$.)

In (1) liegt, da α variieren kann, eine Schar von Ellipsen vor. Ihre Einhüllende ergibt sich nach Nr. 210, wenn wir die Gleichung (1) nach α differenzieren, wodurch:

$$(3) \qquad \frac{c^2-b^2}{c^2(c^2-\alpha)^2}z^2+\frac{a^2-b^2}{a^2(a^2-\alpha)^2}x^2=0$$

hervorgeht, und dann α aus (1) und (3) eliminieren. Zu diesem Zwecke berechnen wir aus (1) und (3) zunächst:

$$x=\frac{a(a^2-\alpha)}{\sqrt{(a^2-b^2)(a^2-c^2)}},\quad z=\frac{c(c^2-\alpha)}{\sqrt{(a^2-c^2)(b^2-c^2)}}$$

und eliminieren erst dann α. Es ergibt sich so:

$$\frac{1}{a}\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2-c^2}}\,x-\frac{1}{c}\sqrt{\frac{b^2-c^2}{a^2-c^2}}\,z=1,$$

wobei die Wurzeln positiv oder negativ sein können. *Mithin besteht die Einhüllende aus vier Geraden.* Jede von ihnen enthält einen Haupt- und einen Nebenscheitel der Hilfsellipse. Also sind die Ellipsen (1) einem *Rhombus* einbeschrieben.

Insbesondere ist unter den Ellipsen (1) die *Hauptellipse* enthalten, in der die xz-Ebene das Ellipsoid schneidet, nämlich für $\alpha = b^2$. Sie gehört also zu den Krümmungskurven des Ellipsoids und bildet die Grenze zwischen denen der einen und anderen Schar, da bei denen der einen Schar $\alpha < b^2$ und bei denen der anderen Schar $\alpha > b^2$ ist. Die Hauptellipse ist folglich ebenfalls dem Rhombus einbeschrieben. Nach dem Beispiele in Nr. 307 erkennt man ohne Mühe, daß sie den Rhombus in den vier *Nabelpunkten* des Ellipsoids berührt.

336. Projektion der Krümmungskurven des Ellipsoids in der Ebene der größten und mittleren Achse. Projizieren wir die Krümmungskurven des Ellipsoids auf die xy-Ebene, so ist die Gleichung (6) von Nr. 334 zu benutzen:

$$\frac{a^2 - c^2}{a^2(a^2 - \alpha)} x^2 + \frac{b^2 - c^2}{b^2(b^2 - \alpha)} y^2 = 1. \tag{1}$$

Sie stellt für $c^2 < \alpha < b^2$ eine Ellipse und für $b^2 < \alpha < a^2$ eine Hyperbel dar. Sind x_1 und y_1 die Halbachsen einer der Ellipsen, so ist:

$$\frac{a^2 - c^2}{a^2(a^2 - b^2)} {x_1}^2 - \frac{b^2 - c^2}{b^2(a^2 - b^2)} {y_1}^2 = 1. \tag{2}$$

Sind dagegen x_1 und y_1 die Halbachsen einer der Hyperbeln, so ist:

$$\frac{a^2 - c^2}{a^2(a^2 - b^2)} {x_1}^2 + \frac{b^2 - c^2}{b^2(a^2 - b^2)} {y_1}^2 = 1. \tag{3}$$

Als Ort der Punkte (x_1, y_1), deren Koordinaten die Halbachsen einer Ellipse bzw. Hyperbel sind, ergibt sich daher eine Hyperbel (2) bzw. Ellipse (3), und wir nennen diese beiden Kurven die *Hilfshyperbel* und *Hilfsellipse.* Sie haben die x-Achse und y-Achse zu Hauptachsen und berühren einander in den Scheiteln der Hyperbel. Da die willkürliche Konstante α für die erste Schar der Krümmungskurven nicht kleiner als c^2 wird, so ist die Hilfshyperbel (2) nur bis zu denjenigen Punkten zu benutzen, die sich für $\alpha = c^2$ ergeben, d. h. bis zu den Punkten $x_1 = \pm a$, $y_1 = \pm b$. Die xy-Ebene schneidet das Ellipsoid in

einer Ellipse mit den Halbachsen a und b. Umschreiben wir also dieser *Hauptellipse* der Fläche dasjenige Rechteck, das aus den vier Scheiteltangenten besteht, so geht die Hilfshyperbel durch die Ecken des Rechtecks und ist nur soweit von Bedeutung, als sie im Innern des Rechtecks liegt. Die gemeinsamen Scheitel:

$$x_1 = \pm a\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2-c^2}}, \quad y_1 = 0 \tag{4}$$

der Hilfshyperbel und Hilfsellipse sind nach Nr. 307 die Projektionen der Nabelpunkte des Ellipsoids.

Wir konstruieren nun die Ellipsen und Hyperbeln, als die sich die Krümmungskurven des Ellipsoids in der xy-Ebene projizieren, so: Es wird ein beliebiger Punkt P_1 auf der Hilfshyperbel innerhalb des angegebenen Gebietes oder auf der Hilfsellipse gewählt. Alsdann werden seine Koordinaten als die Halbachsen einer Ellipse bzw. Hyperbel benutzt, und zwar als Halbachsen auf der x- bzw. y-Achse. Alle diese Ellipsen und Hyperbeln wenden den beiden Punkten (4) ihre konkaven Seiten zu.

Die beiden Scharen von Krümmungskurven des Ellipsoids umschließen folglich die vier Nabelpunkte der Fläche. Bei der Annahme $\alpha = b^2$ geht nach Nr. 335 als Krümmungskurve die Hauptellipse der Fläche hervor, die in der xz-Ebene liegt und alle vier Nabelpunkte enthält; sie ist, wie gesagt, diejenige Krümmungskurve, die *beiden* Scharen angehört.

Die Gleichung (1) liefert bei der Annahme $\alpha = c^2$ diejenige Hauptellipse der Fläche, die in der xy-Ebene liegt. Sie gehört daher auch zu den Krümmungskurven, aber nur zu denen der ersten Art.

337. Differentialgleichung der Krümmungskurven des Ellipsoids. Um zu finden, welcher Differentialgleichung die Projektionen der Krümmungskurven des Ellipsoids:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

in der xy-Ebene genügen, wird man z, p, q, r, s, t hieraus und aus den durch Differentiation hervorgehenden Formeln berechnen und in die Gleichung (6) von Nr. 319 einsetzen.

Ein Teil der Rechnung ist schon im Beispiele in Nr. 307 ausgeführt worden. Danach kommt:

$$z[(1+p^2)s-pqr]=-\frac{a^2-c^2}{a^2}pq,\quad z[(1+q^2)s-pqt]=-\frac{b^2-c^2}{b^2}pq,$$

$$z[(1+p^2)t-(1+q^2)r]=\frac{b^2-c^2}{b^2}p^2-\frac{a^2-c^2}{a^2}q^2-\frac{(a^2-b^2)c^2}{a^2b^2}.$$

Substituiert man diese Werte in die Gleichung (6) von Nr. 319 und führt man ferner an Stelle von z, p und q ihre Werte in x, y ein, so bekommt die gesuchte Differentialgleichung die Form:

$$(1)\qquad Axy\,dy^2+(x^2-Ax^2-B)\,dy\,dx-xy\,dx^2=0,$$

worin A und B die Konstanten bedeuten:

$$A=\frac{a^2(b^2-c^2)}{b^2(a^2-c^2)},\qquad B=\frac{a^2(a^2-b^2)}{a^2-c^2}.$$

Zu derselben Differentialgleichung (1) wären wir gelangt, wenn wir die Gleichung (1) von Nr. 336 differenziert und alsdann die willkürliche Konstante α aus beiden Gleichungen eliminiert hätten.

338. Dreifaches orthogonales System von Kugeln und Kegeln zweiter Ordnung. Die Gleichung:

$$\frac{x^2}{a^2-\alpha}+\frac{y^2}{b^2-\alpha}+\frac{z^2}{c^2-\alpha}=1$$

stellt nach Nr. 333 ein dreifaches orthogonales System dar, sobald für α je eine von drei willkürlichen Konstanten λ, μ, ν gesetzt wird, wobei $\lambda < c^2 < \mu < b^2 < \nu < a^2$ sein sollte. Wenn wir nun x, y, z durch $x:\varepsilon$, $y:\varepsilon$, $z:\varepsilon$ und λ durch $-\lambda^2:\varepsilon^2$ ersetzen, wobei ε eine Konstante sei, so sind die Bedingungen der Orthogonalität nach wie vor erfüllt. Aber beim Grenzübergange für $\lim \varepsilon = 0$ ergibt sich als Ausartung des Systems das neue System:

$$(1)\quad \begin{cases} x^2+y^2+z^2=\lambda^2, \\ \dfrac{x^2}{a^2-\mu}+\dfrac{y^2}{b^2-\mu}+\dfrac{z^2}{c^2-\mu}=0,\quad \dfrac{x^2}{a^2-\nu}+\dfrac{y^2}{b^2-\nu}+\dfrac{z^2}{c^2-\nu}=0, \end{cases}$$

wobei wie vorher $c^2 < \mu < b^2 < \nu < a^2$ sein soll, während jetzt λ^2 eine beliebige positive Konstante bedeutet. Die erste Gleichung definiert alle *Kugeln* mit dem Anfangspunkte als Mitte,

während die zweite und dritte *Kegel zweiter Ordnung* vorstellen, die den Anfangspunkt zur Spitze haben. Um die Auflösungen der Gleichungen dieses dreifachen orthogonalen Systems nach x, y, z zu erhalten, geht man am bequemsten von der Gleichung (3) in Nr. 333 und den beiden dazu analogen Gleichungen aus, worin man dieselbe Substitution und denselben Grenzübergang ausführt. So kommt:

$$x^2 = \lambda^2 \frac{(a^2 - \mu)(a^2 - \nu)}{(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)}, \tag{2}$$

und zyklische Vertauschung von a, b, c gibt die Formeln für y^2 und z^2.

339. Dreifaches orthogonales System von Paraboloiden. Durch einen anderen Grenzübergang gewinnt man aus dem Systeme der Ellipsoide und Hyperboloide ein dreifaches orthogonales System von *Paraboloiden,* indem man zunächst den Anfangspunkt in einen der Brennpunkte in der xy-Ebene verlegt und darauf die Hauptschnittellipsen in Parabeln ausarten läßt. Wir ziehen es jedoch vor, dies neue System direkt zu definieren mittels der Gleichung:

$$\frac{y^2}{\alpha} - \frac{z^2}{c^2 - \alpha} = 4(x + \alpha), \tag{1}$$

worin c eine bestimmte, α eine willkürliche Konstante bedeute. Diese Gleichung (1) hat, als Gleichung für α aufgefaßt, wieder drei relle Wurzeln λ, μ, ν, für die

$$\lambda < 0 < \mu < c^2 < \nu \tag{2}$$

ist. Wählt man für λ, μ, ν irgend drei Konstanten in diesen Intervallen und setzt man sie für α in (1) ein, so gehen drei nach x, y, z auflösbare Gleichungen hervor, von denen die erste ein *elliptisches,* die zweite ein *hyperbolisches* und die dritte ein *elliptisches Paraboloid* definiert. Die Auflösung ergibt:

$$x = c^2 - \lambda - \mu - \nu, \quad y^2 = -\frac{4\lambda\mu\nu}{c^2}, \quad z = -\frac{4}{c^2}(c^2 - \lambda)(c^2 - \mu)(c^2 - \nu),$$

wobei die Werte von y^2 und z^2 infolge von (2) in der Tat positiv sind. Mit Hilfe dieser Formeln kann man leicht beweisen, daß die Bedingungen (2) der Orthogonalität in Nr. 328 erfüllt sind.

§ 5. Höhen- und Fallkurven.

340. Höhenkurven. Wird die xy-Ebene als wagerechte Ebene betrachtet, so heißen die horizontalen, also zur xy-Ebene parallelen ebenen Schnitte einer Fläche $z = f(x, y)$ die *Höhenkurven* oder auch *Niveaukurven* der Fläche. Für jede Höhenkurve ist $dz = 0$, also $p\,dx + q\,dy = 0$. Daher stellt:

$$(1) \qquad \frac{dy}{dx} = -\frac{p}{q}$$

die *Differentialgleichung der Höhenkurven* oder, genauer gesagt, die Differentialgleichung der zu den Höhenkurven kongruenten Projektionen in der xy-Ebene vor.

Sollen die Höhenkurven insbesondere Krümmungskurven sein, so muß diejenige Bedingung erfüllt werden, die sich durch Einsetzen von (1) in die Gleichung (6) von Nr. 319 ergibt:

$$pq(r - t) + (q^2 - p^2)s = 0.$$

Dies ist eine *partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung* für die fraglichen Flächen.

Etwas einfacher wird die Bedingung, wenn man die xz-Ebene als die wagerechte Ebene annimmt, da dann für die Höhenkurven $dy = 0$ ist, also nach (6) in Nr. 319 kommt:

$$(1 + p^2)s - pqr = 0.$$

Dies aber ist eine der beiden Bedingungen, die sich in Satz 4, Nr. 307, für einen *Nabelpunkt* ergaben. Auf einer Fläche also, deren Höhenkurven Krümmungskurven sind, hat man bei der Aufsuchung ihrer Nabelpunkte nur noch *eine* Bedingung zu erfüllen, woraus man schließt, daß es im allgemeinen eine *Kurve* auf dieser Fläche geben wird, deren Punkte sämtlich Nabelpunkte sind. Sollen sowohl die zur xz-Ebene als auch die zur yz-Ebene gehörigen Höhenkurven Krümmungskurven sein, so folgt, daß alle Punkte der Fläche Nabelpunkte sein müssen, d. h. die Fläche ist dann eine Ebene oder Kugel, nach Satz 16 in Nr. 322.

341. Fallkurven. Wird wieder die xy-Ebene als wagerechte Ebene betrachtet, so versteht man unter den *Fallkurven* diejenigen Kurven einer Fläche, deren Tangenten überall die

Tangenten stärkster Neigung zur xy-Ebene sind. Jede Tangente einer Fallkurve ist daher, selbst als Kurve in der zugehörigen Tangentenebene aufgefaßt, eine Fallkurve dieser Ebene, daher rechtwinklig zu den wagerechten Tangenten. Da nach Nr. 340 für diese wagerechten Tangenten $dy : dx = -p : q$ ist, so kommt:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{q}{p}$$

als Differentialgleichung der Fallkurven oder, genauer gesagt, als Differentialgleichung der Projektionen der Fallkurven in der xy-Ebene. Die Höhen- und Fallkurven sind zueinander orthogonal, und dasselbe gilt von ihren Projektionen in der xy-Ebene.

Sind die Höhenkurven Krümmungskurven, so müssen daher auch die Fallkurven Krümmungskurven sein.

342. Höhen- und Fallkurven auf einer Mittelpunktsfläche zweiter Ordnung. Eine solche Fläche hat allgemein die Gleichung:

$$ax^2 + by^2 + cz^2 = m,$$

wo a, b, c, m Konstanten sind. Hier ist:

$$ax + czp = 0, \quad by + czq = 0.$$

Folglich sind nach Nr. 340 und 341:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{ax}{by}, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{by}{ax}$$

die Differentialgleichungen der Höhen- und Fallkurven, wenn die xy-Ebene wagerecht angenommen wird. Sie lassen sich so schreiben:

$$bydy + axdx = 0, \quad \frac{ady}{y} - \frac{bdx}{x} = 0.$$

Die linken Seiten sind die vollständigen Differentiale von $\frac{1}{2}(by^2 + ax^2)$ und $a \ln y - b \ln x$. Daher definieren die Gleichungen:

$$by^2 + ax^2 = \text{konst.}, \quad a \ln y - b \ln x = \text{konst.}$$

die Höhen- und Fallkurven. Die erste Gleichung besagt, was auch geometrisch einleuchtet, daß die Höhenkurven Kegelschnitte sind. Für die Fallkurven ist:

$$y = \text{konst.}\, x^{b:a}.$$

In der xy-Ebene gibt diese Gleichung die Projektionen der Fallkurven an, die also die konzentrischen, ähnlichen und ähnlich gelegenen Kegelschnitte:

$$by^2 + ax^2 = \text{konst.}$$

senkrecht durchsetzen.

§ 6. Flächenfamilien.

343. Linienflächen, insbesondere Tangentenflächen. Im folgenden sollen nacheinander verschiedene Familien von Flächen betrachtet und diejenigen partiellen Differentialgleichungen bestimmt werden, denen die Flächen einer solchen Familie genügen.

Vorher jedoch fassen wir die *Linienflächen* genauer ins Auge. Dies sind diejenigen Flächen, die durch eine bewegliche Gerade beschrieben werden. Durch jeden Punkt einer solchen Fläche geht demnach eine Gerade, die der Fläche angehört. Diese Geraden heißen die *Erzeugenden.* Eine bewegliche Gerade können wir uns analytisch durch zwei Gleichungen:

$$(1) \qquad x = Uz + u, \quad y = Vz + v$$

gegeben denken, in denen U, u, V, v Funktionen einer Hilfsveränderlichen τ sind. Die Elimination von τ aus (1) würde eine Gleichung zwischen x, y und z, eben die Gleichung der erzeugten Linienfläche, liefern.

Fragen wir uns vor allem, unter welchen Umständen die Linienfläche insbesondere eine *Tangentenfläche* ist, d. h. nach Nr. 281, unter welchen Umständen die Linienfläche die Einhüllende einer Ebenenschar ist, so daß die Erzeugenden die Charakteristiken der Einhüllenden vorstellen. Eine allgemeine Ebene der Schar wird von dem Werte von τ abhängen und muß die Gerade (1) enthalten. Ihre Gleichung wird daher in den laufenden Koordinaten x, y, z die Form haben:

$$(2) \qquad x - Uz - u + w(y - Vz - v) = 0,$$

worin w eine gewisse Funktion von τ bedeutet. Soll die Gerade (1), die in dieser Ebene liegt, eine Charakteristik sein,

so muß sie der Gleichung genügen, die durch Differentiation von (2) nach τ hervorgeht:

$$-(U'z + u') - w(V'z + v') + w'(y - Vz - v) = 0.$$

Es muß also wegen (1) für alle Werte von z:

$$U'z + u' + w(V'z + v') = 0$$

sein, mithin einzeln:

$$U' + wV' = 0, \quad u' + wv' = 0.$$

Demnach gibt es dann und nur dann eine Ebenenschar (2), deren Einhüllende die Linienfläche ist, wenn eine Funktion w vorhanden ist, die diesen beiden Bedingungen genügt, d. h. wenn $U'v' - V'u'$ verschwindet. Somit folgt:

Satz 26: Eine bewegliche Gerade

$$x = Uz + u, \quad y = Vz + v,$$

in deren Gleichungen U, u, V, v Funktionen einer Veränderlichen τ sind, erzeugt dann und nur dann eine Tangentenfläche, wenn die Ableitungen der Funktionen U, u, V, v nach τ der Bedingung genügen:

$$U'v' - V'u' = 0.$$

In Nr. 282 erkannten wir, daß sich die Tangentenflächen ohne Dehnung auf die Ebene *abwickeln* lassen.

344. Abstand und Winkel benachbarter Erzeugender einer Linienfläche. Wir betrachten jetzt eine *beliebige* Linienfläche, definiert durch die Gleichungen (1) der vorigen Nummer. Die Funktionen U, u, V, v mögen für einen zweiten Werte τ_1 von τ die Werte U_1, u_1, V_1, v_1 haben. Alsdann stellen die Gleichungen:

$$(1) \quad x = Uz + u, \quad y = Vz + v \quad \text{und} \quad x_1 = U_1 z_1 + u_1, \quad y_1 = V_1 z_1 + v_1$$

zwei Erzeugende der Fläche dar, wobei x, y, z bzw. x_1, y_1, z_1 die laufenden Koordinaten sind.

Nach Nr. 161, worin wir b, β, c, γ durch U, u, V, v und b', β', c', γ' durch U_1, u_1, V_1, v_1 ersetzen, ist das Quadrat der kürzesten Entfernung D zwischen zwei Punkten der beiden Erzeugenden:

$$D^2 = \frac{[(U_1 - U)(v_1 - v) - (V_1 - V)(u_1 - u)]^2}{(U_1 - U)^2 + (V_1 - V)^2 + (UV_1 - VU_1)^2}.$$

Es sei $\tau_1 = \tau + \varDelta\tau$ und $U_1 = U + \varDelta U$, $u_1 = u + \varDelta u$ usw., so daß sich ergibt:

$$(2) \qquad D^2 = \frac{(\varDelta U \varDelta v - \varDelta V \varDelta u)^2}{\varDelta U^2 + \varDelta V^2 + (U\varDelta V - V\varDelta U)^2}.$$

Da die Richtungskosinus der ersten Erzeugenden proportional $U, V, 1$ und die der zweiten proportional $U + \varDelta U$, $V + \varDelta V$, 1 sind, so ist der Kosinus ihres Winkels j leicht zu berechnen, woraus alsdann:

$$(3) \qquad \sin^2 j = \frac{\varDelta U^2 + \varDelta V^2 + (U\varDelta V - V\varDelta U)^2}{[1 + U^2 + V^2]\,[1 + (U + \varDelta U)^2 + (V + \varDelta V)^2]}$$

folgt. Daher ergibt sich aus (2) und (3) beim Grenzübergange für $\lim \varDelta\tau = 0$:

$$(4) \qquad \lim_{\varDelta\tau = 0} \frac{D^2}{\sin^2 j} = \frac{(1 + U^2 + V^2)^2 (U'v' - V'u')^2}{[U'^2 + V'^2 + (UV' - VU')^2]^2},$$

wo die Akzente die Differentiation nach τ andeuten. Der Bruch rechts ist nur im Falle einer Tangentenfläche nach Satz 26 in Nr. 343 gleich Null. Vgl. die letzte Bemerkung in Nr. 161.

Da nach Nr. 26 für $\lim \varDelta\tau = 0$:

$$\lim \frac{D}{j} = \lim \frac{D}{\sin j} \cdot \lim \frac{\sin j}{j} = \lim \frac{D}{\sin j}$$

ist, so folgt:

Satz 27: Bei einer Linienfläche, die keine Tangentenfläche ist, verschwindet die kürzeste Entfernung zweier benachbarter Erzeugenden mit dem Winkel, den sie miteinander bilden, gerade in der ersten Ordnung.

345. Zylinder. Den einfachsten Fall von Tangentenflächen bieten die *Zylinder*, vgl. Nr. 281. Eine Fläche ist ein Zylinder dann und nur dann, wenn sie in jedem ihrer Punkte eine Tangente hat, die einer festen Richtung parallel läuft. Daher muß die Gleichung ihrer Tangentenebene:

$$p(\mathfrak{x} - x) + q(\mathfrak{y} - y) - (\mathfrak{z} - z) = 0$$

erfüllt werden, wenn darin $\mathfrak{x} = x + at$, $\mathfrak{y} = y + bt$, $\mathfrak{z} = z + ct$ gesetzt wird, wo t veränderlich ist und a, b, c bestimmt gegebene Konstanten sind, die eben den Kosinus jener festen Richtung proportional sind. Folglich haben wir:

$$(1) \qquad ap + bq - c = 0$$

als Bedingung für einen Zylinder. Diese Gleichung ist aber eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung. Also:

Satz 28: Eine Fläche ist dann und nur dann eine Zylinderfläche, wenn sie einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung von der Form:

$$ap + bq - c = 0$$

genügt, worin a, b, c Konstanten bedeuten. Die Richtungskosinus der Erzeugenden der Zylinderfläche sind proportional a, b, c.

Man kann die Bedingung auch aus der allgemeinen Darstellung einer Zylinderfläche als Linienfläche ableiten: Wir betrachten eine bewegliche Gerade, deren Richtungskosinus proportional a, b, c sind. Dies tritt bei der Geraden (1) in Nr. 343 ein, wenn $U : V : 1 = a : b : c$ ist. Wir setzen also $U = a : c$, $V = b : c$ und erhalten:

$$x = \frac{a}{c} z + u, \quad y = \frac{b}{c} z + v.$$

Bei der beweglichen Geraden müssen hiernach $cx - az$ und $cy - bz$ Funktionen cu bzw. cv von nur *einer* Veränderlichen τ sein, d. h. voneinander *abhängige* Funktionen sein, so daß zwischen ihnen eine Gleichung besteht. Mithin ist:

$$F(cx - az, \quad cy - bz) = 0, \tag{2}$$

worin a, b, c Konstanten sind, *die allgemeine Gleichung einer Zylinderfläche.*

Eine Fläche von Punkten (x, y, z) ist also ein Zylinder, wenn es Konstanten a, b, c derart gibt, daß $cx - az$ und $cy - bz$ voneinander abhängig sind. Nach Satz 4 in Nr. 80 muß dann die Funktionaldeterminante hinsichtlich x, y gleich Null sein:

$$\begin{vmatrix} c - ap & -aq \\ -bp & c - bq \end{vmatrix} = 0 \quad \text{oder} \quad ap + bq - c = 0.$$

Dies aber ist wieder die partielle Differentialgleichung (1).

Nach Satz 23 in Nr. 325 bilden die Erzeugenden der Zylinderfläche die eine Schar von Krümmungskurven, so daß die dazu senkrechte zweite Schar von Krümmungskurven von denjenigen *ebenen* Kurven gebildet wird, in denen die Fläche durch Ebenen senkrecht zur Richtung des Zylinders geschnitten wird.

346. Kegel. Auch die Kegel gehören nach Nr. 281 zu den Tangentenflächen. Es sind dies Linienflächen, die von einer solchen beweglichen Geraden erzeugt werden, die beständig durch einen festen Punkt (x_0, y_0, z_0) geht. Jede Tangentenebene:

$$p(\mathfrak{x} - x) + q(\mathfrak{y} - y) - (\mathfrak{z} - z) = 0$$

muß durch den festen Punkt gehen; daher ist:

$$p(x_0 - x) + q(y_0 - y) - (z_0 - z) = 0$$

die Bedingung für die Kegelfläche.

Satz 29: Eine Fläche ist dann und nur dann eine Kegelfläche, wenn sie einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung von der Form:

$$(x - x_0)p + (y - y_0)q - (z - z_0) = 0$$

genügt, worin x_0, y_0, z_0 Konstanten bedeuten.

Wir können diese Bedingung auch aus der allgemeinen Darstellung einer Kegelfläche als Linienfläche ableiten: Die in Nr. 343 unter (1) angegebene bewegliche Gerade geht beständig durch den festen Punkt (x_0, y_0, z_0), wenn $u = x_0 - Uz_0$ und $v = y_0 - Vz_0$ ist, so daß:

$$x - x_0 = U(z - z_0), \quad y - y_0 = V(z - z_0)$$

die Gleichungen der Erzeugenden des Kegels sind. Sie besagen, daß $(x - x_0):(z - z_0)$ und $(y - y_0):(z - z_0)$ voneinander abhängige Funktionen sein müssen, so daß:

$$F\left(\frac{x - x_0}{z - z_0}, \frac{y - y_0}{z - z_0}\right) = 0 \tag{1}$$

die allgemeine Gleichung eines Kegels ist.

Eine Fläche ist daher nur dann ein Kegel, wenn es drei Konstanten x_0, y_0, z_0 derart gibt, daß $(x - x_0):(z - z_0)$ und $(y - y_0):(z - z_0)$ voneinander abhängige Funktionen von x und y sind. Nach Satz 4 in Nr. 80 ist dazu notwendig und hinreichend, daß die Funktionaldeterminante dieser beiden Funktionen hinsichtlich x und y gleich Null wird. Rechnen wir sie aus, so kommen wir zu der Bedingung des Satzes 29 zurück.

Nach Satz 23 in Nr. 325 bilden die Erzeugenden der Kegelfläche die eine Schar von Krümmungskurven. Die dazu senkrechte zweite Schar von Krümmungskurven besteht daher

aus denjenigen *sphärischen* Kurven, in denen der Kegel von allen Kugeln geschnitten wird, deren Mittelpunkte in der Kegelspitze liegen.

347. Konoide. Bewegt sich eine Gerade so, daß sie stets eine feste Gerade, die sogenannte *Leitgerade,* trifft und stets einer festen Ebene, der sogenannten *Leitebene,* parallel bleibt, während sie im übrigen ihre Richtung ändern darf, so heißt die von ihr erzeugte Fläche ein *Konoid.* Die Konoide sind im allgemeinen keine Tangentenflächen. Ein Beispiel ist das *hyperbolische Paraboloid.*

Es seien:

$$\mathfrak{x} = a\mathfrak{z} + \alpha, \quad \mathfrak{y} = b\mathfrak{z} + \beta \tag{1}$$

die Gleichungen der Leitgeraden des Konoids. Da es bei der Leitebene nur auf ihre Stellung ankommt, können wir sie so weit verschieben, bis sie durch den Anfangspunkt geht. Es sei also:

$$A\mathfrak{x} + B\mathfrak{y} + C\mathfrak{z} = 0 \tag{2}$$

die Gleichung der Leitebene.. Nun muß gefordert werden, daß die Tangentenebene:

$$p(\mathfrak{x} - x) + q(\mathfrak{y} - y) - (\mathfrak{z} - z) = 0 \tag{3}$$

der Fläche eine solche Gerade durch den Berührungspunkt (x, y, z) enthalte, die erstens die Gerade (1) trifft und zweitens der Ebene (2) parallel ist. Wegen der zweiten Bedingung muß die Gerade in der Ebene:

$$A(\mathfrak{x} - x) + B(\mathfrak{y} - y) + C(\mathfrak{z} - z) = 0 \tag{4}$$

liegen. Also fordern wir, daß die Schnittlinie der beiden Ebenen (3) und (4) die Gerade (1) treffe. Dazu ist notwendig und hinreichend, daß es einen Wert von $\mathfrak{z}$ gebe, für den:

$$p(a\mathfrak{z} + \alpha - x) + q(b\mathfrak{z} + \beta - y) - \quad (\mathfrak{z} - z) = 0,$$
$$A(a\mathfrak{z} + \alpha - x) + B(b\mathfrak{z} + \beta - y) + C(\mathfrak{z} - z) = 0$$

wird. Hieraus folgt durch Elimination von $\mathfrak{z}$:

Satz 30: Eine Fläche ist dann und nur dann ein Konoid, wenn sie einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung von der Form:

$$\begin{vmatrix} ap + bq - 1 & p(\alpha - x) + q(\beta - y) + z \\ aA + bB + C & A(\alpha - x) + B(\beta - y) - Cz \end{vmatrix} = 0$$

genügt, in der $a, b, \alpha, \beta, A, B, C$ *Konstanten bedeuten.*

Wenn insbesondere *die Leitgerade zur Leitebene senkrecht* ist, kann die z-Achse als Leitgerade und die xy-Ebene als Leitebene benutzt werden. Alsdann ist $a = b = \alpha = \beta = A = B = 0$ zu setzen, so daß einfacher kommt:

$$xp + yq = 0. \tag{5}$$

In diesem Falle haben die Erzeugenden Gleichungen von der Form $z = u(\tau)$, $y = v(\tau)x$, weil sie die z-Achse treffen und der xy-Ebene parallel sind, d. h. z und $y : x$ sind voneinander abhängige Funktionen, so daß allgemein:

$$z = \varphi\left(\frac{y}{x}\right) \tag{6}$$

eine derartige Konoidfläche darstellt.

Die Fläche $z = f(x, y)$ ist also dann und nur dann ein Konoid, dessen Leitgerade die z-Achse und dessen Leitebene die xy-Ebene ist, wenn z als *homogene* Funktion nullter Ordnung von x und y ausgedrückt wird. Nach Satz 9 in Nr. 91 muß dann in der Tat die Gleichung (5) bestehen.

348. Rotationsflächen. Dreht sich eine starre Kurve um eine mit ihr starr verbundene feste Gerade, so erzeugt sie eine *Rotationsfläche.* Die feste Gerade heißt die *Achse* der Fläche. Jeder Punkt der erzeugenden Kurve beschreibt einen Kreis, dessen Mittelpunkt auf der Achse liegt und dessen Ebene zur Achse senkrecht ist. Diese Kreise heißen die *Breitenkreise* (auch Parallelkreise) der Fläche. Alle Ebenen durch die Achse schneiden die Fläche in kongruenten Kurven, den sogenannten *Meridianen.*

Die beiden einfachsten Arten zur Erzeugung der betrachteten Rotationsfläche sind diese: Entweder läßt man eine ebene Kurve (Meridian) um eine in ihrer Ebene gelegene feste Achse rotieren, oder man läßt einen Kreis (Breitenkreis) von veränderlichem Radius eine solche Bewegung ausführen, bei der sein Mittelpunkt die feste Achse beschreibt und seine Ebene beständig zur Achse senkrecht ist.

Wir wollen die Rotationsfläche analytisch darstellen, indem wir uns dieser zweiten Erzeugungsweise bedienen:

Die Achse gehe durch den Punkt (a, b, c) und habe die Richtungskosinus α, β, γ. Alsdann sind $a + \alpha t$, $b + \beta t$, $c + \gamma t$ die Koordinaten eines beliebigen Punktes der Achse, wenn t eine Hilfsveränderliche ist. Dieser Punkt sei der Mittelpunkt des veränderlichen Kreises. Ferner sei der Radius des Kreises eine beliebige Funktion r von t. Alsdann ist (x, y, z) ein Punkt des Kreises, wenn die Formeln gelten:

$$(x - a - \alpha t)^2 + (y - b - \beta t)^2 + (z - c - \gamma t)^2 = r^2,$$

$$\alpha(x - a - \alpha t) + \beta(y - b - \beta t) + \gamma(z - c - \gamma t) = 0.$$

Denn die erste Gleichung sagt aus, daß der Punkt vom Mittelpunkte den Abstand r hat, und die zweite, daß der Radius zur Achse senkrecht ist. Die zweite Gleichung gibt wegen $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$:

$$t = \alpha(x - a) + \beta(y - b) + \gamma(z - c), \tag{1}$$

also die erste:

$$r^2 + t^2 = (x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2. \tag{2}$$

Weil $r^2 + t^2$ eine Funktion von t allein ist, so folgt: Die rechten Seiten der beiden Formeln (1) und (2) müssen voneinander abhängige Funktionen sein. Umgekehrt: Ist dies der Fall und wird die erste Funktion mit t bezeichnet, die zweite dagegen mit $r^2 + t^2$, so wird dadurch r als eine Funktion von t definiert. Nun ist zu bedenken, daß z auf der Rotationsfläche eine Funktion von x und y sein wird. Also fordern wir nach Satz 4 in Nr. 80: Wird z als eine Funktion von x und y betrachtet, so muß die Funktionaldeterminante der rechten Seiten der Gleichungen (1) und (2) hinsichtlich x und y verschwinden. Es ergibt sich:

$$\begin{vmatrix} \alpha + \gamma p & \beta + \gamma q \\ x - a + p(z - c) & y - b + q(z - c) \end{vmatrix} = 0.$$

Diese Gleichung ändert sich nicht, wenn wir für α, β, γ dazu proportionale Größen setzen. Die Bedingung $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$ braucht also nicht erfüllt zu sein. Somit folgt:

Satz 31: Eine Fläche ist dann und nur dann eine Ro-

tationsfläche, wenn sie einer partiellen Differentialgleichung von der Form:

$$(x-a)(\beta+\gamma q)-(y-b)(\alpha+\gamma p)+(z-c)(\beta p-\alpha q)=0$$

genügt, in der a, b, c, α, β, γ Konstanten bedeuten.

Die Normalen der Rotationsfläche treffen sämtlich die Achse. Wir wollen dies analytisch ausdrücken: Die Richtungskosinus einer Normale sind nach (10) in Nr. 253 proportional zu p, q -1; folglich sind auch:

$$\mathfrak{x}=x+ph, \quad \mathfrak{y}=y+qh, \quad \mathfrak{z}=z-h$$

die Koordinaten eines beliebigen Punktes der Normale des Flächenpunktes (x, y, z), wenn h beliebig ist. Dieser Punkt $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z})$ liegt auf der Achse:

$$\mathfrak{x}=a+\alpha t, \quad \mathfrak{y}=b+\beta t, \quad \mathfrak{z}=c+\gamma t,$$

wenn sich t und h so bestimmen lassen, daß:

$$x+ph=a+\alpha t, \quad y+qh=b+\beta t, \quad z-h=c+\gamma t$$

wird. Dazu ist notwendig und hinreichend:

$$(3) \qquad \begin{vmatrix} x-a & \alpha & p \\ y-b & \beta & q \\ z-c & \gamma & -1 \end{vmatrix}=0.$$

Dies aber ist nichts anderes als die partielle Differentialgleichung in Satz 31. Also folgt:

Satz 32: Eine Fläche ist dann und nur dann eine Rotationsfläche, wenn alle Normalen der Fläche ein und dieselbe feste Gerade schneiden.

Wird die Rotationsachse als z-Achse gewählt, so können wir $a=b=c=0$ setzen. Außerdem ist dann $\alpha=\beta=0$, $\gamma=1$, so daß die partielle Differentialgleichung die einfache Form:

$$(4) \qquad xq-yp=0$$

annimmt. Die Formeln (1) und (2) geben jetzt $t=z$ und $r^2=x^2+y^2$. Dies also müssen voneinander abhängige Funktionen sein. Mithin wird:

$$z=\varphi(x^2+y^2)$$

die allgemeine Gleichung einer Rotationsfläche, deren Achse die z-Achse ist.

Da die Normalen der Rotationsfläche sämtlich die Achse treffen, insbesondere also diejenigen längs eines Meridians eine Ebene und diejenigen längs eines Breitenkreises einen Rotationskegel bilden, so folgt aus der Definition in Nr. 319, *daß die Meridiane und Breitenkreise die Krümmungskurven der Rotationsfläche sind.*

349. Partielle Differentialgleichung erster Ordnung für eine Tangentenfläche. Eine Tangentenfläche ist nach Nr. 281 die Einhüllende einer Schar von Ebenen. Wir greifen nun aus der Gesamtheit aller Ebenen:

$$ux + vy + wz + \omega = 0 \tag{1}$$

dadurch eine Schar heraus, daß wir ebenso wie damals unter u, v, w, ω bestimmte Funktionen einer willkürlichen Konstanten α verstehen. Die Einhüllende $z = f(x, y)$ der Schar geht alsdann hervor, wenn α aus (1) und der durch Differentiation nach α gebildeten Gleichung:

$$u'x + v'y + w'z + \omega' = 0 \tag{2}$$

eliminiert wird. Um für die Tangentenfläche $z = f(x, y)$ die Werte der Ableitungen p und q zu berechnen, differenzieren wir die Gleichung (1) vollständig, indem wir darin unter z die Funktion $f(x, y)$ und unter α diejenige Funktion von x, y, z verstehen, die durch (2) definiert wird. Es kommt zunächst:

$$udx + vdy + w(pdx + qdy) + (u'x + v'y + w'z + \omega')\,d\alpha = 0$$

oder wegen (2) einfacher:

$$udx + vdy + w(pdx + qdy) = 0.$$

Also ist einzeln:

$$u + wp = 0, \quad v + wq = 0 \quad \text{oder} \quad p = -\frac{u}{w}, \quad q = -\frac{v}{w},$$

d. h. p und q sind Funktionen von einer Funktion α allein, so daß zwischen ihnen eine Gleichung besteht:

$$\varphi(p, q) = 0. \tag{3}$$

Es läßt sich nun zeigen, daß, wenn *umgekehrt* bei einer Fläche $z = f(x, y)$ zwischen den Ableitungen p und q eine Gleichung (3) besteht, die Fläche eine Tangentenfläche sein muß. Denn alle diejenigen Punkte der Fläche, für die p oder f_x denselben Wert hat, liegen auf einer *Flächenkurve,* und für

diese Kurve hat auch q nach (3) einen konstanten Wert, d. h. längs dieser Kurve sind alle Tangentenebenen der Fläche einander parallel. Da aber die Tangenten der Flächenkurve in den Tangentenebenen liegen, so folgt, daß alle Tangenten dieser Kurve ein und derselben Ebene parallel sind. Wählen wir diese Ebene für den Augenblick als xy-Ebene, so ist längs der Kurve $dz = 0$, d. h. $z =$ konst., die Kurve daher eben. Somit fallen die Tangentebenen aller Punkte der Kurve in eine Ebene zusammen, weil sie überdies parallel sind. Längs einer solchen Kurve der Fläche $z = f(x, y)$ also, längs derer p konstant ist, hat die Fläche einerlei Tangentenebene.

Da nun p, q, -1 den Richtungskosinus der Normale der Fläche proportional sind und q nach (3) eine Funktion:

$$q = \psi(p)$$

ist, so muß die längs der Kurve $p =$ konst. unveränderliche Tangentenebene eine Gleichung von der Form:

$$p\mathfrak{x} + \psi(p)\mathfrak{y} - \mathfrak{z} = \text{konst.}$$

haben. Die Konstante rechts kann für eine zweite Kurve $p =$ konst. der Fläche eine andere sein, wird also allgemein eine Funktion von p sein. Folglich stellt eine Gleichung von der Form:

$$p\mathfrak{x} + \psi(p)\mathfrak{y} - \mathfrak{z} = \chi(p)$$

alle Tangentenebenen der Fläche dar. Hier aber liegt eine Schar von Ebenen vor, die von einer willkürlichen Größe p abhängt, und ihre Einhüllende ist nach Nr. 281 eine *Tangentenfläche.* Insbesondere ergibt sich nachträglich noch, daß die Flächenkurven $p =$ konst., von denen wir vorhin bewiesen, daß sie eben seien, auch geradlinig sind.

Satz 33: Eine Fläche ist dann und nur dann eine Tangentenfläche, wenn sie einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung genügt von der Form:

$$\varphi(p, q) = 0.$$

350. Partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung für alle Tangentenflächen. Nach dem letzten Satze ist eine Fläche $z = f(x, y)$ dann und nur dann eine Tangentenfläche, wenn die Ableitungen p und q voneinander abhängige

Funktionen von x und y sind. Nach Satz 4 in Nr. 80 ist dafür notwendig und hinreichend, daß die Funktionaldeterminante von p und q hinsichtlich x und y gleich Null sei, d. h. daß $rt - s^2 = 0$ sei, vgl. Nr. 100. Also folgt:

Satz 34: Eine Fläche ist dann und nur dann eine Tangentenfläche, wenn sie der partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung genügt:

$$rt - s^2 = 0.$$

Der in Nr. 318 aufgestellte Wert (4) der Krümmung der Fläche lehrt, daß wir diesen Satz auch so aussprechen können:

Satz 35: Die Tangentenflächen sind die Flächen von der Krümmung Null.

351. Abwickelbare Flächen. Wir erkannten in Nr. 282, daß die Tangentenflächen abwickelbar sind. Wir wollen jetzt beweisen, daß es sonst keine abwickelbare Flächen gibt. Es sei nämlich:

$$z = f(x, y) \tag{1}$$

eine gegebene Fläche. Sie wird Punkt für Punkt in allgemeinster Weise auf eine $\mathfrak{x}\mathfrak{y}$-Ebene *abgebildet*, wenn wir jedem Wertepaare x, y ein Wertepaar $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}$ zuordnen, indem wir für $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ irgend welche voneinander unabhängige Funktionen von x und y setzen:

$$\mathfrak{x} = \varphi(x, y), \quad \mathfrak{y} = \psi(x, y). \tag{2}$$

Nach Satz 4 in Nr. 80 soll dabei sein:

$$\varphi_x \psi_y - \psi_x \varphi_y \neq 0.$$

Wir betrachten irgend eine Kurve auf der Fläche (1), d. h. wir verstehen unter y irgend eine Funktion von x:

$$y = \omega(x), \tag{3}$$

so daß die Gleichungen der Kurve sind:

$$y = \omega(x), \quad z = f[x, \omega(x)]. \tag{4}$$

Diese Kurve wird vermöge (2) auf die $\mathfrak{x}\mathfrak{y}$-Ebene als eine Kurve abgebildet, deren Gleichungen lauten:

$$\mathfrak{x} = \varphi[x, \omega(x)], \quad \mathfrak{y} = \psi[x, \omega(x)]. \tag{5}$$

Hierin spielt x die Rolle einer Hilfsveränderlichen. Die Fläche (1) heißt nun auf die $\mathfrak{x}\mathfrak{y}$-Ebene *abwickelbar*, wenn es eine solche Abbildung (2) gibt, bei der *jedem* Bogendifferential *irgend einer*

Flächenkurve (4) ein *gleich großes* Bogendifferential der Bildkurve (5) entspricht.

Um die analytischen Bedingungen hierfür aufzustellen, bemerken wir, daß bei der Flächenkurve (4):

$$dy = \omega' dx, \quad dz = (f_x + f_y \omega')\, dx,$$

also das Quadrat des Bogendifferentials:

$$(6) \quad ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = [1 + \omega'^2 + (f_x + f_y \omega')^2]\, dx^2$$

ist, worin $y = \omega(x)$ gesetzt werden muß. Bei der ebenen Kurve (5) kommt dagegen:

$$d\mathfrak{x} = (\varphi_x + \varphi_y \omega')\, dx, \quad d\mathfrak{y} = (\psi_x + \psi_y \omega')\, dx,$$

also das Quadrat des Bogendifferentials:

$$(7) \qquad ds^2 = [(\varphi_x + \varphi_y \omega')^2 + (\psi_x + \psi_y \omega')^2]\, dx^2,$$

worin ebenfalls $y = \omega(x)$ gesetzt werden muß. Da die beiden Werte (6) und (7) von ds^2 einander gleich sein sollen, so fordern wir also:

$$1 + \omega'^2 + (f_x + f_y \omega')^2 = (\varphi_x + \varphi_y \omega')^2 + (\psi_x + \psi_y \omega')^2;$$

und diese Bedingung soll erfüllt sein, wenn für y *beliebige* Funktionen ω von x gesetzt werden. Dies ist aber nur dann der Fall, wenn einzeln die drei Gleichungen bestehen:

$$1 + f_x^2 = \varphi_x^2 + \psi_x^2, \quad f_x f_y = \varphi_x \varphi_y + \psi_x \psi_y, \quad 1 + f_y^2 = \varphi_y^2 + \psi_y^2,$$

die sich wegen $f_x = p$ und $f_y = q$ auch so schreiben lassen:

$$1 + p^2 = \varphi_x^2 + \psi_x^2, \quad pq = \varphi_x \varphi_y + \psi_x \psi_y, \quad 1 + q^2 = \varphi_y^2 + \psi_y^2.$$

Diese drei Bedingungen müssen somit *für beliebige Werte von* x *und von* y erfüllt sein.

Wenn sie partiell nach x bzw. y differenziert werden, so gehen sechs Gleichungen hervor, von denen sich zwei wegen der übrigen etwas vereinfachen lassen, so daß kommt:

$$\begin{aligned} pr &= \varphi_x \varphi_{xx} + \psi_x \psi_{xx}, & qr &= \varphi_y \varphi_{xx} + \psi_y \psi_{xx}, \\ ps &= \varphi_x \varphi_{xy} + \psi_x \psi_{xy}, & qs &= \varphi_y \varphi_{xy} + \psi_y \psi_{xy}, \\ pt &= \varphi_x \varphi_{yy} + \psi_x \psi_{yy}, & qt &= \varphi_y \varphi_{yy} + \psi_y \psi_{yy}. \end{aligned}$$

Hiernach stehen r, φ_{xx}, ψ_{xx} in denselben Verhältnissen zueinander wie s, φ_{xy}, ψ_{xy} und ebenso wie t, φ_{yy}, ψ_{yy}. Also ist:

351]

$$\varphi_{xx}\psi_{xy} - \varphi_{xy}\psi_{xx} = 0, \quad \varphi_{xy}\psi_{yy} - \varphi_{yy}\psi_{xy} = 0,$$
$$\varphi_{xx}\, s \; - \varphi_{xy}\, r \; = 0, \quad \varphi_{xy}\, t \; - \varphi_{yy}\, s \; = 0,$$
$$\psi_{xx}\, s \; - \psi_{xy}\, r \; = 0, \quad \psi_{xy}\, t \; - \psi_{yy}\, s \; = 0.$$

Die linken Seiten dieser Gleichungen aber sind Funktionaldeterminanten von je zweien der Größen φ_x, ψ_x; φ_y, ψ_y; φ_x, p; φ_y, q; ψ_x, p; ψ_y, q. Nach Satz 4 in Nr. 80 sind folglich alle sechs Größen $\varphi_x, \varphi_y, \psi_x, \psi_y, p, q$ voneinander abhängig, d. h. insbesondere besteht eine Gleichung zwischen p und q, so daß die Fläche nach Satz 33 in Nr. 349 eine *Tangentenfläche* sein muß. Es ergibt sich mithin:

Satz 36: Nur die Tangentenflächen sind auf die Ebene abwickelbar.

352. Kanalflächen mit ebenen Leitlinien. Beschreibt der Mittelpunkt einer Kugel von konstantem Radius R eine Kurve, die sogenannte *Leitlinie*, so heißt die Einhüllende der Kugel eine *Kanalfläche*. Wir wollen nur den Fall betrachten, wo *die Leitlinie eine ebene Kurve* ist, etwa die Kurve $y = \varphi(x)$ in der xy-Ebene. Alsdann wird:

$$(1) \qquad (x - \alpha)^2 + [y - \varphi(\alpha)]^2 + z^2 - R^2 = 0$$

die Gleichung der Kugelschar. Um die Einhüllende zu finden, haben wir diese Gleichung nach α zu differenzieren, wodurch hervorgeht:

$$(2) \qquad x - \alpha + (y - \varphi)\varphi' = 0.$$

Es wurde bereits im Beispiele in Nr. 92 diejenige *partielle Differentialgleichung erster Ordnung* bestimmt, der alle diese Flächen genügen, nämlich:

$$(3) \qquad z = \frac{R}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}.$$

Wir wollen die Krümmungskurven der betrachteten Flächen ermitteln. Zunächst gelten die schon in Nr. 92 aufgestellten Gleichungen, die durch Differentiation von (1) nach x und y hervorgehen:

$$(4) \qquad x - \alpha + pz = 0, \quad y - \varphi + qz = 0,$$

vorausgesetzt, daß α die durch (2) definierte Funktion von x und y ist. Längs einer Flächenkurve sind x und y und mithin auch z, p, q und α Funktionen einer Veränderlichen, und

die Differentiation nach dieser Veränderlichen sei durch den Akzent angedeutet, so daß aus (4) folgt:

$$(5) \qquad x' + pz' + zp' = \alpha', \quad y' + qz' + zq' = \varphi'(\alpha)\alpha'.$$

Setzen wir die Werte von $x - \alpha$ und $y - \varphi$ aus (4) in (2) ein, so kommt noch:

$$p + q\varphi'(\alpha) = 0, \quad \text{also} \quad \varphi'(\alpha) = -\frac{p}{q}.$$

Hieraus und aus (5) folgt:

$$1 + \frac{zp'}{x' + pz'} = \frac{\alpha'}{x' + pz'}, \quad 1 + \frac{zq'}{y' + qz'} = -\frac{p}{q}\frac{\alpha'}{y' + qz'}.$$

Die linken Seiten dieser Gleichungen sind nur für eine Krümmungskurve einander gleich, nach (5) in Nr. 319. Also ist für die Krümmungskurven:

$$\frac{q\alpha'}{x' + pz'} + \frac{p\alpha'}{y' + qz'} = 0$$

oder wegen $px' + qy' = z'$:

$$(1 + p^2 + q^2)z'\alpha' = 0,$$

woraus $\alpha' = 0$ oder $z' = 0$, d. h. $\alpha =$ konst. oder $z =$ konst. folgt. Die Krümmungskurven der einen Schar sind daher die Charakteristiken der Einhüllenden, nämlich diejenigen größten Kreise der Kugeln, deren Ebenen zur Leitlinie senkrecht sind, und die Krümmungskurven der anderen Schar sind die Höhenkurven, woraus nach Nr. 341 zu schließen ist, daß die Krümmungskurven der ersten Schar die Fallkurven vorstellen.

353. Partielle Differentialgleichung dritter Ordnung für alle Linienflächen. Es seien:

$$(1) \qquad x = Uz + u, \quad y = Vz + v$$

die Gleichungen einer beweglichen Geraden, d. h. es seien U, u, V, v wie in Nr. 343 Funktionen einer willkürlichen Konstanten τ, so daß die Gerade (1) eine allgemeine Linienfläche erzeugt.

Nach (1) ist τ auf der Fläche eine Funktion von x, y, z und deshalb ebenso wie z eine Funktion von x und y. Differenzieren wir die Gleichungen (1) nach x und y, so ergibt sich, wenn der Akzent die Differentiation nach τ andeutet:

$$(2) \qquad \begin{cases} 1 = Up + (U'z + u')\dfrac{\partial\tau}{\partial x}, & 0 = Vp + (V'z + v')\dfrac{\partial\tau}{\partial x}, \\ 0 = Uq + (U'z + u')\dfrac{\partial\tau}{\partial y}, & 1 = Vq + (V'z + v')\dfrac{\partial\tau}{\partial y}. \end{cases}$$

Hieraus folgt:

$$\frac{\partial \tau}{\partial x} : \frac{\partial \tau}{\partial y} = \frac{Up - 1}{Uq} = \frac{Vp}{Vq - 1},$$

also:

$$(3) \qquad Up + Vq = 1, \quad U\frac{\partial \tau}{\partial x} + V\frac{\partial \tau}{\partial y} = 0.$$

Differentiation der ersten Gleichung (3) nach x und y liefert:

$$Ur + Vs + (U'p + V'q)\frac{\partial \tau}{\partial x} = 0, \quad Us + Vt + (U'p + V'q)\frac{\partial \tau}{\partial y} = 0.$$

Multiplizieren wir diese beiden Gleichungen bzw. mit U und V und addieren sie dann, so kommt wegen der zweiten Gleichung (3):

$$(4) \qquad U^2 r + 2UVs + V^2 t = 0.$$

Differentiation dieser Gleichung nach x und y ergibt, wenn wir die Ableitungen *dritter* Ordnung von z nach x und y mit $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ bezeichnen:

$$U^2\alpha + 2UV\beta + V^2\gamma + \frac{\partial(U^2 r + 2UVs + V^2 t)}{\partial \tau}\frac{\partial \tau}{\partial x} = 0,$$

$$U^2\beta + 2UV\gamma + V^2\delta + \frac{\partial(U^2 r + 2UVs + V^2 t)}{\partial \tau}\frac{\partial \tau}{\partial y} = 0.$$

Werden diese beiden Gleichungen bzw. mit U und V multipliziert und dann addiert, so kommt wegen der zweiten Gleichung (3):

$$(5) \qquad U^3\alpha + 3U^2V\beta + 3UV^2\gamma + V^3\delta = 0.$$

Nun sind (4) und (5) in U und V homogen, so daß sich U und V daraus eliminieren lassen. Setzen wir nämlich zur Abkürzung:

$$\mathsf{M} = \frac{-s + \sqrt{s^2 - rt}}{t},$$

so gibt (4) für V den Wert $\mathsf{M}U$, der in (5) einzusetzen ist. Wenn wir wieder $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ als Ableitungen dritter Ordnung von z ausführlich schreiben, so geht also die Gleichung hervor:

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} + 3\mathsf{M}\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} + 3\mathsf{M}^2\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} + \mathsf{M}^3\frac{\partial^3 z}{\partial y^3} = 0.$$

Dies ist also eine partielle Differentialgleichung dritter Ordnung, der alle Linienflächen genügen.

Elftes Kapitel.

Elementare Funktionen einer komplexen Veränderlichen.

---

§ 1. Allgemeines über komplexe Zahlen.

354. Der Bereich der komplexen Zahlen. In dem in Nr. 2 festgestellten Bereiche aller reellen Zahlen haben die einfachsten Funktionen, nämlich die ganzen linearen Funktionen $y = ax + b$, die folgende Eigenschaft: Nicht nur für diese Funktionen selbst, sondern auch für die zu ihnen *inversen* Funktionen $x = (y - b) : a$ ist der Variabilitätsbereich der unabhängigen Veränderlichen unbeschränkt. Dies trifft jedoch bei den nächst einfachen ganzen Funktionen nicht mehr zu. Z. B. die einfachste ganze quadratische Funktion, nämlich $y = x^2$, ist zwar für alle Werte von x definiert, die inversen Funktionen $x = \pm\sqrt{y}$ sind es dagegen nur für positive Werte von y. Der Wunsch, die inversen Funktionen auch für negative Werte der Veränderlichen y zu definieren, führt also zunächst im Falle $y = -1$ zu der Zahl i, der *imaginären Einheit*, die man mit $\sqrt{-1}$ bezeichnet und die durch die Eigenschaft $i^2 = -1$ definiert wird. Fügt man diese Zahl dem Gebiete aller reellen Zahlen hinzu, so ist $x = \pm\sqrt{y}$ auch für jeden negativen Wert von y definiert, da sich für $y = -b^2$ ergibt, daß $x = \pm ib$ sein muß, wenn vorausgesetzt wird, daß auch in dem erweiterten Gebiete die *formalen Gesetze* von Nr. 1 gelten. Der soeben berührte und schon in Nr. 1 erwähnte *Grundsatz von der Erhaltung der formalen Gesetze* führt ferner zu der Forderung, daß auch die Summe aus einer reellen Zahl a und einer sogenannten *rein imaginären* Zahl ib, wo b reell ist, daß also auch $a + ib$ eine erlaubte Zahl sein soll. So gelangt man zum

Bereiche aller *komplexen Zahlen* $a + ib$, bei denen a und b reell sind.

Eine Zahl $a + ib$ ist im Falle $a \neq 0$ und $b \neq 0$ weder reell noch rein imaginär. Denn bei Aufrechterhaltung der formalen Gesetze würde aus $a + ib = c$ bzw. aus $a + ib = ic$, wo c reell sein soll, entweder $ib = c - a$ oder $a = i(c - b)$ folgen, woraus durch Quadrieren entweder $-b^2 = (c - a)^2$ oder $a^2 = -(c - b)^2$ hervorginge. Da a, b, c reell sein sollen, müßte also entweder $b = 0$ und $c = a$ oder aber $a = 0$ und $c = b$ sein.

Die komplexen Zahlen $a + ib$ sind daher *neue* Zahlen, und zwar *sind zwei derartige Zahlen nur dann einander gleich, wenn ihre reellen und ihre rein imaginären Bestandteile übereinstimmen.* Denn wenn $a + ib = c + id$ sein soll, so muß $a - c = i(d - b)$, d. h. $(a - c)^2 = -(d - b)^2$, also $a = c$ und $d = b$ sein. *Insbesondere ist eine komplexe Zahl $a + ib$ dann und nur dann gleich Null, wenn sowohl $a = 0$ als auch $b = 0$ ist.* Nach dem Grundsatze von der Erhaltung der formalen Gesetze kann man die Rechenregeln für die Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division aufstellen und zwar so, daß sie ebenfalls den formalen Gesetzen der Kommutation, Assoziation und Distribution (siehe Nr. 1) genügen und zu keinerlei Widersprüchen führen. Es ist zu setzen:

$$(1) \qquad (a + ib) \pm (c + id) = (a \pm c) + i(b \pm d),$$

$$(2) \qquad (a + ib)(c + id) = ac - bd + i(bc + ad),$$

$$(3) \qquad \frac{a + ib}{c + id} = \frac{(a + ib)(c - id)}{(c + id)(c - id)} = \frac{ac + bd + i(bc - ad)}{c^2 + d^2}$$

$$= \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + i\,\frac{bc - ad}{c^2 + d^2}.$$

Nur die Division $(a + ib):(c + id)$ kann unmöglich werden, nämlich wenn $c = d = 0$ ist. Also gilt auch jetzt, *daß nur die Division mit Null unstatthaft ist.* Aus (2) folgt: *Ein Produkt verschwindet nur dann, wenn einer der Faktoren gleich Null ist,* da aus $ac - bd = 0$ und $bc + ad = 0$ entweder $a = b = 0$ oder $c = d = 0$ folgt.

Wir haben vorhin i als eine Zahl definiert, deren Quadrat

gleich -1 ist. Soll das Quadrat einer komplexen Zahl $a+ib$ den Wert -1 haben, so muß

$$a^2-b^2+2iab=-1, \quad \text{d. h.} \quad a^2+1=b^2, \; ab=0$$

sein, woraus $b \neq 0$, $a=0$ und also $b^2=1$, d. h. $b=+1$ oder -1 folgt. Demnach gibt es im komplexen Bereiche nur zwei Zahlen, deren Quadrate gleich -1 sind, nämlich i und $-i$. Unter i wird also eine der beiden Wurzeln der quadratischen Gleichung $z^2=-1$ verstanden; die andere ist alsdann $-i$.

Wenn man den Funktionsbegriff auf den Bereich aller komplexen Zahlen ausdehnt, so kann man erkennen, daß sich nirgends die Notwendigkeit zu einer nochmaligen Erweiterung des Bereiches herausstellt, weshalb wir hiermit endgültig die Erweiterung des Zahlengebietes abschließen.

355. Geometrische Darstellung der komplexen Zahlen. Da die allgemeine komplexe Zahl $a+ib$ von *zwei* reellen Zahlen a und b abhängt, stellen wir sie durch einen Punkt der *Ebene* dar, nämlich durch denjenigen Punkt P, dessen rechtwinklige Koordinaten a und b sind. Man kann sie auch statt durch den Punkt P durch die von O nach P gerichtete *Strecke* OP vom Anfangspunkte O aus darstellen. Siehe Fig. 66. Man sagt auch, die Zahl $a+ib$ sei durch den *Vektor* OP dargestellt. Sobald die Zahl reell, also $b=0$ ist, kommen wir zur Darstellung der reellen Zahlen auf einer Geraden, der x-Achse, zurück, vgl. Nr. 3.

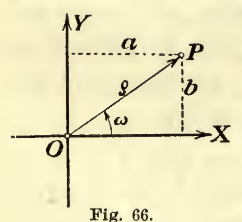


Fig. 66.

Die benutzte Ebene heißt die *Zahlenebene*, die Abszissenachse ihre *reelle Achse*, die Ordinatenachse ihre *imaginäre Achse*, obgleich sie an sich reell ist. Gemeint ist nur, daß sie der Träger der Bildpunkte aller rein-imaginären Zahlen sein soll, während die x-Achse der Träger der Bildpunkte aller reellen Zahlen ist. Der Bildpunkt der Zahl Eins, des *Modulus der Addition* (vgl. Nr. 1), liegt auf der reellen Achse und heißt der *Einheitspunkt*.

Die Strecke OP, deren Sinn der von O nach P ist, bildet gerade so wie die positive Tangente einer Kurve (siehe Nr. 169)

mit der positiven reellen Achse einen bis auf ganze Vielfache von 2π bestimmten Winkel, den wir ω nennen. Hat OP die *positiv* gemessene Länge ϱ, so ist:

(1) $$a = \varrho \cos \omega, \qquad b = \varrho \sin \omega.$$

folglich:

(2) $$a + ib = \varrho (\cos \omega + i \sin \omega).$$

Es gibt *nur eine* derartige Darstellung der Zahl $a + ib$, denn die Forderung (2) zerfällt in die beiden Forderungen (1) und ergibt:

(3) $$\varrho = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \cos \omega = \frac{a}{\varrho}, \quad \sin \omega = \frac{b}{\varrho},$$

wobei die Wurzel *positiv* ist. Nur wenn $a^2 + b^2 = 0$, also $a = b = 0$ ist, wird ω unbestimmt, während ϱ verschwindet. Also nur für die Zahl *Null* bleibt ω unbestimmt. Die stets positive Größe ϱ heißt der *absolute Betrag der komplexen Zahl.* Ist die Zahl reell, also $b = 0$, so kommt diese Definition auf die in Nr. 4 zurück. Deshalb darf der absolute Betrag ϱ einer komplexen Zahl $a + ib$ ebenfalls durch Einschluß der Zahl zwischen zwei Strichen bezeichnet werden:

$$\varrho = | a + ib | = | \sqrt{a^2 + b^2} | \cdot$$

Der Winkel ω heißt die *Amplitude* der komplexen Zahl; er ist, wie gesagt, nicht völlig bestimmt, weil noch ein beliebiges ganzes Vielfaches von 2π zu ihm addiert werden darf. Dagegen haben $\cos \omega$ und $\sin \omega$ bestimmte Werte. Der Faktor $\cos \omega + i \sin \omega$, mit dem man nach (2) den absoluten Betrag einer Zahl multiplizieren muß, um die Zahl selbst zu erhalten, hat den absoluten Betrag Eins.

Wir formulieren einige Ergebnisse in dem

Satz 1: Jede komplexe Zahl $a + ib$, die nicht gleich Null ist, läßt sich auf eine und nur eine Art darstellen in der Form $\varrho (\cos \omega + i \sin \omega)$, worin ϱ positiv ist. Der absolute Betrag ϱ einer komplexen Zahl wird dann und nur dann gleich Null, wenn die Zahl selbst gleich Null wird.

Der Ort der Bildpunkte aller Zahlen $a + ib$ mit demselben absoluten Betrage ϱ ist der *Kreis* um O mit dem Radius ϱ. Die Amplituden von *entgegengesetzt gleichen* komplexen Zahlen $a + ib$ und $-a - ib$ unterscheiden sich um ein ungerades

Vielfaches von π, während ihre absoluten Beträge übereinstimmen. Ihre Bildpunkte liegen so, daß O die Mitte zwischen ihnen ist. Zwei Zahlen von der Form $a + ib$ und $a - ib$ heißen *konjugiert komplex*; sie haben gleiche absolute Beträge, und die Summe ihrer Amplituden ist ein gerades Vielfaches von 2π. Ihre Bildpunkte liegen so, daß die reelle Achse die Mittelsenkrechte der Verbindenden ihrer Bildpunkte wird.

356. Geometrische Ausführung der Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division. Die beiden Zahlen $a_1 + ib_1$ und $a_2 + ib_2$ mögen die Summe $a + ib$ haben. Ferner seien P_1, P_2, P die Bildpunkte dieser drei Zahlen. Da $a = a_1 + a_2$ und $b = b_1 + b_2$ ist, so folgt, daß sich der Bildpunkt P der *Summe* durch die sogenannte *geometrische Addition der Vektoren* OP_1 und OP_2 ergibt, siehe Fig. 67: Wir tragen in P_1 (oder P_2) an OP_1 (oder OP_2) eine Strecke P_1P (oder P_2P) parallel, gleich und gleichsinnig mit der Strecke OP_2 (oder OP_1) an. Hiernach gewinnt man den Bildpunkt Q der *Differenz* von $a_1 + ib_1$ und $a_2 + ib_2$, indem man P_2 durch den in der Figur angegebenen Punkt P_2' ersetzt.

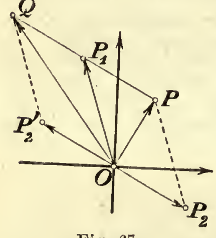


Fig. 67.

Sind ϱ_1 und ϱ_2 die absoluten Beträge und ω_1 und ω_2 die Amplituden von $a_1 + ib_1$ und $a_2 + ib_2$, d. h. ist:

$$a_1 + ib_1 = \varrho_1 (\cos\omega_1 + i \sin\omega_1), \quad a_2 + ib_2 = \varrho_2 (\cos\omega_2 + i \sin\omega_2),$$

so wird das Produkt beider Zahlen:

$$(1) \qquad (a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2) = \varrho_1\varrho_2 [\cos(\omega_1 + \omega_2) + i \sin(\omega_1 + \omega_2)].$$

Nach Satz 1 in voriger Nummer folgt also:

Satz 2: Der absolute Betrag eines Produktes ist gleich dem Produkte der absoluten Beträge der Faktoren.

Dies gilt, wie der Schluß von n auf $n + 1$ zeigt, für beliebig viele Faktoren. Der Satz 1 in Nr. 4 ist demnach auch im Bereiche aller komplexen Zahlen richtig.

Nach (1) ist ferner *die Amplitude des Produktes gleich der Summe der Amplituden der Faktoren,* wozu jedoch immer noch ein beliebiges ganzes Vielfaches von 2π addiert werden darf.

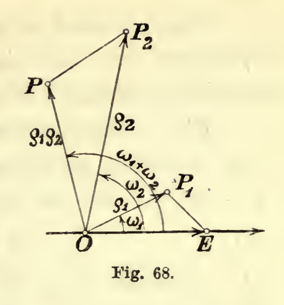


Fig. 68.

Sind P_1 und P_2 die Bildpunkte von $a_1 + ib_1$ und $a_2 + ib_2$, so ergibt sich nach (1) der Bildpunkt P ihres *Produktes* wie in Fig. 68, worin E den *Einheitspunkt* (vgl. Nr. 355) bedeutet: Wir konstruieren das zu dem Dreiecke OEP_1 (oder OEP_2) gleichsinnig ähnliche Dreieck OP_2P (oder OP_1P), so daß OE und OP_2 (oder OP_1) homologe Stücke sind.

Durch Umkehrung dieses Verfahrens findet man ohne Mühe die geometrische Ausführung der *Division.*

357. Absoluter Betrag einer Summe. Schon aus der geometrischen Konstruktion des Bildpunktes P der Summe zweier Zahlen, siehe Fig. 67 auf S. 560, folgt, daß der absolute Betrag der Summe nicht größer als die Summe der absoluten Beträge der Summanden ist.

Um dies auch rechnerisch zu beweisen, nehmen wir an, daß ϱ_1, ϱ_2 und ϱ die absoluten Beträge zweier Summanden und ihrer Summe seien, dagegen ω_1, ω_2 und ω die zugehörigen Amplituden. Aus:

$$\varrho(\cos\omega + i\sin\omega) = \varrho_1(\cos\omega_1 + i\sin\omega_1) + \varrho_2(\cos\omega_2 + i\sin\omega_2)$$

folgt dann:

$$\varrho\cos\omega = \varrho_1\cos\omega_1 + \varrho_2\cos\omega_2, \qquad \varrho\sin\omega = \varrho_1\sin\omega_1 + \varrho_2\sin\omega_2.$$

Hieraus geht durch Quadrieren und Addieren hervor:

$$\varrho^2 = \varrho_1{}^2 + \varrho_2{}^2 + 2\varrho_1\varrho_2\cos(\omega_1 - \omega_2),$$

also:

$$(\varrho_1 + \varrho_2)^2 - \varrho^2 = 2\varrho_1\varrho_2[1 - \cos(\omega_1 - \omega_2)].$$

Die rechte Seite ist stets positiv und nur dann gleich Null, wenn $\cos(\omega_1 - \omega_2) = 1$, d. h. $\omega_2 = \omega_1 + 2n\pi$ ist, wo n eine ganze Zahl bedeutet. Hieraus folgt zunächst für den Fall von nur zwei Summanden:

Satz 3: Der absolute Betrag einer Summe ist kleiner als die Summe der absoluten Beträge der Summanden oder höchstens ebenso groß. Es ist ihr dann und nur dann gleich, wenn alle Summanden dieselbe Amplitude — abgesehen von ganzen Vielfachen von 2π — haben.

Durch Schluß von n auf $n+1$ beweist man dasselbe für Produkte von beliebig vielen Faktoren. Vgl. Satz 2, Nr. 4, der ein spezieller Fall dieses Satzes ist.

Eine nützliche Bemerkung ist noch folgende: Ist $a+ib$ eine bestimmt gegebene Zahl, so liegen die Bilder aller Zahlen $u+iv$, für die der absolute Betrag der Differenz, nämlich:

$$(1) \qquad |(a+ib)-(u+iv)|<\sigma$$

ist, innerhalb desjenigen Kreises, dessen Mittelpunkt der Bildpunkt vor $a+ib$ und dessen Radius σ ist, siehe Fig. 69. Die Bildpunkte der Zahlen $u+iv$ liegen alsdann auch so, daß

$$(2) \qquad |a-u|<\sigma \text{ und } |b-v|<\sigma$$

wird, also innerhalb des in der Figur angegebenen Quadrates.

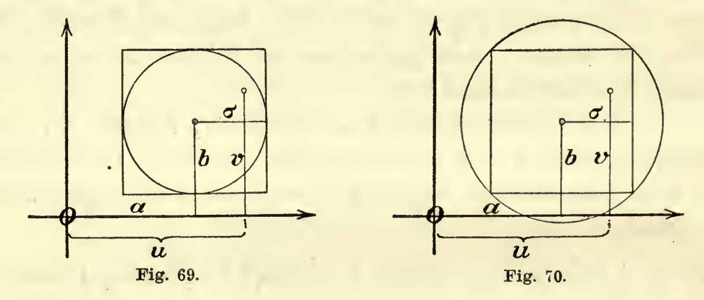


Fig. 69. Fig. 70.

Umgekehrt: Gelten die Ungleichungen (2), d. h. liegt der Bildpunkt von $u+iv$ innerhalb des Quadrates, so ist seine Entfernung von der Mitte kleiner als $\sigma\sqrt{2}$, also:

$$|(a+ib)-(u+iv)|<\sigma\sqrt{2},$$

wo die Wurzel natürlich positiv sein soll. Dies bedeutet, daß der Bildpunkt von $u+iv$ innerhalb des dem Quadrate *umschriebenen* Kreises liegt, siehe Fig. 70.

358. n^{te} Einheitswurzeln. Ist n eine *ganze positive Zahl,* so bedeutet $\sqrt[n]{1}$ eine Zahl, deren n^{te} Potenz gleich Eins ist. Zu diesen n^{ten} *Einheitswurzeln* gehört die Zahl Eins selbst, aber es gibt außerdem noch $n-1$ solche Zahlen. Denn nach Satz 2 in Nr. 356 muß zunächst der absolute Betrag einer solchen Zahl gleich Eins sein. Bedeutet ω ihre Amplitude, so ist mithin zu fordern:

$$(\cos\omega + i\sin\omega)^n = 1.$$

Da aber die Amplitude eines Produktes von zwei Zahlen nach Nr. 356 die Summe der Amplituden der Faktoren ist, so ergibt sich durch Schluß von n auf $n+1$ die sogenannte *Moivre'sche Formel* für ganzes positives n:

(1) $$(\cos\omega + i\sin\omega)^n = \cos n\omega + i\sin n\omega.$$

Also fordern wir:

$$\cos n\omega + i\sin n\omega = 1, \quad \text{d. h.} \ \cos n\omega = 1, \ \sin n\omega = 0.$$

Mithin ist, wenn k eine beliebige *ganze* Zahl bedeutet, $n\omega = 2k\pi$, d. h. $\omega = 2k\pi : n$. Da die Amplituden ω und $\omega + 2\pi$ dieselbe Zahl liefern, so gehen nur n wesentlich verschiedene Amplituden hervor, nämlich für $k = 0, 1, 2, \ldots n-1$. In dem Ausdrucke

(2) $$\cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n} \qquad (k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots n-1)$$

liegen also *alle* n^{ten} Einheitswurzeln vor. Ihre Bildpunkte liegen auf dem Kreise vom Radius Eins um den Nullpunkt und bilden dasjenige regelmäßige n-Eck, von dem der Einheitspunkt selbst eine Ecke ist.

Ist n eine *gerade* positive Zahl $2m$, so folgt, daß zu den $2m^{\text{ten}}$ Einheitswurzeln die reellen Werte $+1$ und -1 gehören und die übrigen $2m-2$ komplexen Werte in der Form

$$\cos\frac{\pm k\pi}{m} + i\sin\frac{\pm k\pi}{m} \qquad (k = 1,\ 2,\ \ldots m-1)$$

dargestellt werden können.

§ 2. Unendliche Reihen mit komplexen Gliedern.

359. Endlicher Grenzwert einer unbegrenzten Zahlenfolge. Es liege, nach irgend einer Vorschrift gebildet, eine unbegrenzte Folge von komplexen Zahlen vor:

$$c_0 = a_0 + ib_0, \quad c_1 = a_1 + ib_1, \ \cdots \ c_n = a_n + ib_n, \ \cdots.$$

Durch sinngemäße Ausdehnung der in Nr. 18 gegebenen Definition des endlichen Grenzwertes einer von x abhängigen Größe bei unbegrenzt wachsendem x gelangen wir hier, wo n an die Stelle von x tritt, zu der

Definition: Die Zahlen einer unbegrenzten Zahlenfolge $c_0, c_1, \cdots c_n, \cdots$ *haben einen bestimmten endlichen Grenzwert* $C = A + iB$, *wenn es stets, wie klein man auch eine positive Zahl* σ *wählen mag, einen Indexwert* n *derart gibt, daß der absolute Betrag der Differenz* $c_m - C$ *für jeden Index* $m \geqq n$ *kleiner als* σ *ist.*

Für die Bildpunkte der Zahlen $c_0, c_1, \ldots c_n, \ldots$ und C bedeutet dies nach den Schlußbemerkungen in Nr. 357: Wie klein man auch den Radius σ eines Kreises um den Bildpunkt von C wählen mag, stets soll es einen Index n derart geben, daß die Bildpunkte von $c_n, c_{n+1}, c_{n+2}, \ldots$ sämtlich innerhalb des Kreises liegen. Die Stelle C heißt alsdann die *Häufungsstelle* der Punktfolge. Aus den Schlußbemerkungen in Nr. 357 folgt ferner:

Satz 4: Wenn die Zahlen der unbegrenzten Zahlenfolge:

$$c_0 = a_0 + ib_0, \quad c_1 = a_1 + ib_1, \ldots c_n = a_n + ib_n, \ldots$$

einen bestimmten endlichen Grenzwert $C = A + iB$ *haben, so haben auch die Zahlen der beiden reellen Zahlenfolgen:*

$$a_0, a_1, \ldots a_n, \ldots \quad \text{und} \quad b_0, b_1, \ldots b_n, \ldots$$

die bestimmten endlichen Grenzwerte A *und* B. *Wenn umgekehrt die Zahlen dieser beiden Zahlenfolgen bestimmte endliche Grenzwerte* A *und* B *haben, so haben auch die Zahlen der vorgelegten Zahlenfolge den bestimmten endlichen Grenzwert* $A + iB$.

Man sagt auch so: Aus

$$\lim_{n=\infty} (a_n + ib_n) = A + iB \quad \text{folgt:} \quad \lim_{n=\infty} a_n = A, \ \lim_{n=\infty} b_n = B$$

und umgekehrt.

360. Konvergenz einer unendlichen Reihe. Es liege nun eine *unendliche Reihe*

$$w_0 + w_1 + w_2 + \cdots + w_n + \cdots$$

von komplexen Zahlen $w_n = u_n + iv_n$ vor. Alsdann sagen wir wie in Nr. 101, daß sie *konvergiere* und die Summe S habe, wenn die Summe der n ersten Glieder

$$S_n = w_0 + w_1 + w_2 + \cdots + w_{n-1}$$

bei unbegrenzt wachsendem Index n einen bestimmten endlichen Grenzwert S hat. Andernfalls heißt die Reihe *divergent.* Aus Satz 4 in voriger Nummer folgt nun sofort

Satz 5: Die unendliche Reihe

$$(u_0 + iv_0) + (u_1 + iv_1) + \cdots + (u_n + iv_n) + \cdots$$

konvergiert dann und nur dann, wenn die beiden Reihen mit reellen Gliedern

$$u_0 + u_1 + \cdots + u_n + \cdots \quad \textit{und} \quad v_0 + v_1 + \cdots + v_n + \cdots$$

konvergieren. Sind U und V die Summen dieser Reihen, so ist $U + iV$ die Summe der vorgelegten Reihe.

Daher gilt der Satz 2 in Nr. 102 auch jetzt, d. h.:

Satz 6: Die unendliche Reihe von komplexen Gliedern $w_0 + w_1 + \cdots + w_n + \cdots$ konvergiert dann und nur dann, wenn es, sobald eine positive Zahl τ beliebig klein vorgeschrieben wird, stets einen Indexwert n derart gibt, daß für jedes ganze positive p die Ungleichung besteht:

$$|w_n + w_{n+1} + \cdots + w_{n+p-1}| < \tau.$$

361. Unbedingte Konvergenz. Angenommen, es liege eine unendliche Reihe $w_0 + w_1 + \cdots + w_n + \cdots$ vor, von der wir nur das Eine wissen, daß die Reihe der absoluten Beträge $|w_0| + |w_1| + \cdots + |w_n| + \cdots$ konvergiert, d. h. die Reihe:

$$\sqrt{u_0^2 + v_0^2} + \sqrt{u_1^2 + v_1^2} + \cdots + \sqrt{u_n^2 + v_n^2} + \cdots,$$

in der alle Wurzeln positiv sind. Nach Satz 10 in Nr. 105 konvergieren dann auch die Reihen mit entsprechend kleineren positiven Gliedern:

$$|u_0| + |u_1| + \cdots + |u_n| + \cdots \quad \text{und} \quad |v_0| + |v_1| + \cdots + |v_n| + \cdots.$$

Die Reihen $u_0 + u_1 + \cdots + u_n + \cdots$ und $v_0 + v_1 + \cdots + v_n + \cdots$ konvergieren überdies nach Nr. 104 unbedingt. Nach Satz 5 in voriger Nummer konvergiert mithin auch die Reihe $w_0 + w_1 + \cdots + w_n + \cdots$. Daher gilt der Satz 8 von Nr. 104 auch jetzt:

Satz 7: Eine unendliche Reihe von komplexen Zahlen $w_0 + w_1 + \cdots + w_n + \cdots$ konvergiert, sobald die Reihe der absoluten Beträge $|w_0| + |w_1| + \cdots + |w_n| + \cdots$ konvergiert.

Ist dies der Fall, so heißt die Reihe $w_0 + w_1 + \cdots + w_n + \cdots$ *unbedingt konvergent.*

362. Sätze über unbedingt konvergente Reihen. Aus Satz 5 in Nr. 360 und aus Satz 16 in Nr. 109 folgt sofort, daß dieser Satz 16 auch im komplexen Zahlenbereiche gilt. Man erkennt ohne weiteres, daß jetzt auch alle Sätze 3 bis 7 von Nr. 103 gültig bleiben. Der Beweis des Satzes 10 in Nr. 105 gilt ferner offenbar auch dann, wenn die dort auftretende Reihe $u_0, u_1, u_2, \ldots$ komplexe Glieder hat, woraus die Richtigkeit der Sätze 11 bis 14 von Nr. 105 im Bereiche der komplexen Zahlen hervorgeht.

Blicken wir nun auf Nr. 110 zurück und verstehen wir unter den dort auftretenden Größen u, v, w komplexe Zahlen, so folgt zunächst aus dem dort bewiesenen Satze 17, daß die Reihe mit dem allgemeinen Gliede

$$|u_0|\,|v_n| + |u_1|\,|v_{n-1}| + \cdots + |u_{n-1}|\,|v_1| + |u_n|\,|v_0|$$

unbedingt konvergiert und zur Summe das Produkt der beiden Reihen

$$|u_0| + |u_1| + \cdots + |u_n| + \cdots \quad \text{und} \quad |v_0| + |v_1| + \cdots + |v_n| + \cdots$$

hat. Wenn S_n, S_n', S_n'' die in Nr. 110 angegebenen Bedeutungen haben, so ergibt sich, daß der damals unter (1) entwickelte Ausdruck von $S_n S_n' - S_n''$, sobald darin für die u und v ihre absoluten Beträge gesetzt werden, den Grenzwert Null hat. Der so hervorgehende Ausdruck ist aber nach Satz 2 in Nr. 356 und nach Satz 3 in Nr. 357 nicht kleiner als $|S_n S_n' - S_n''|$. Folglich hat auch $S_n S_n' - S_n''$ den Grenzwert Null. Die *unbedingte* Konvergenz der Reihe $w_0, w_1, \ldots w_n, \ldots$ wird gerade so wie damals bewiesen.

Wir können hiernach zusammenfassend sagen:

Satz 8: Die Sätze 3 bis 7 in Nr. 103, die Sätze 11 bis 14 in Nr. 105, Satz 16 in Nr. 109 und Satz 17 in Nr. 110 gelten auch für unendliche Reihen mit komplexen Gliedern.

§ 3. Analytische Funktionen.

363. Potenzreihen. Eine unendliche Reihe von der Form

$$c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots + c_n z^n + \cdots,$$

worin $c_0, c_1, c_2, \ldots c_n, \ldots$ irgend welche komplexe Konstanten

sind, während $z = x + iy$ eine komplexe *Veränderliche* bedeutet, heißt eine *Potenzreihe*, genauer eine Potenzreihe nach steigenden ganzen positiven Potenzen von z. Sie konvergiert offenbar für $z = 0$.

Nehmen wir nun an, sie konvergiere für einen gewissen von Null verschiedenen Wert $z = z_1$. Nach Satz 3 in Nr. 103 gibt es dann, wenn σ eine beliebig klein gewählte positive Zahl bedeutet, einen Index n derart, daß für jeden Index $m \geqq n$:

$$(1) \qquad |c_m z_1^m| < \sigma$$

ist. Verstehen wir unter z_2 irgend eine Zahl, deren absoluter Betrag *kleiner* als der von z_1 ist, so daß:

$$(2) \qquad \frac{|z_2|}{|z_1|} = \theta$$

einen positiven echten Bruch vorstellt, so folgt mit Rücksicht auf Satz 2 in Nr. 356:

$$(3) \qquad \begin{cases} |c_m z_2^m| + |c_{m+1} z_2^{m+1}| + \cdots + |c_{m+p-1} z_2^{m+p-1}| \\ \qquad < \theta^m \sigma (1 + \theta + \cdots + \theta^{p-1}) < \dfrac{\theta^m \sigma}{1-\theta}, \end{cases}$$

vgl. das Beispiel in Nr. 101. Der Wert rechts hat für $\lim m = \infty$ den Grenzwert Null. Nach der Schlußbemerkung in Nr. 104 und nach Satz 6 in Nr. 360 konvergiert mithin die Potenzreihe für z_2 unbedingt.

Wenn wir der Kürze halber die Bildpunkte von Zahlen z in der Zahlenebene einfach durch die Zahlen selbst bezeichnen, so hat sich also, weil $|z_2| < |z_1|$ vorausgesetzt wurde, folgendes ergeben:

Satz 9: Konvergiert die Potenzreihe $c_0 + c_1 z + \cdots + c_n z^n + \cdots$ *für einen Punkt* $z = z_1$, *so konvergiert sie unbedingt für alle Punkte* z_2, *die innerhalb desjenigen Kreises um den Nullpunkt liegen, der durch* z_1 *geht.*

Wenn die Potenzreihe für $z = z_2$ *divergiert,* so kann sie hiernach sicher nicht für einen Punkt $z = z_1$ außerhalb desjenigen Kreises mit dem Mittelpunkte O konvergieren, der durch z_2 geht. Mithin:

Satz 10: Divergiert die Potenzreihe $c_0 + c_1 z + \cdots + c_n z^n + \cdots$ *für einen Punkt* $z = z_2$, *so divergiert sie auch für alle Punkte* z_1,

die außerhalb desjenigen Kreises um den Nullpunkt liegen, der durch z_2 geht.

Die Gesamtheit aller Kreise mit dem Mittelpunkte O zerfällt folglich in zwei Klassen, in solche, innerhalb derer die Reihe überall unbedingt konvergiert, und in solche, außerhalb derer die Reihe überall divergiert. Jeder Kreis der zweiten Art ist größer als jeder der ersten Art. Demnach zerfällt auch die Gesamtheit der Zahlenwerte der Radien der Kreise in zwei Klassen, zwischen denen es nach Nr. 2 eine im allgemeine irrationale Grenze r gibt. Es ist wohl denkbar, daß der ersten Klasse von Kreisen nur der vom Radius Null angehört oder daß sie alle Kreise mit endlichen Radien umfaßt. Also finden wir

Satz 11: Liegt eine Potenzreihe $c_0 + c_1 z + \cdots + c_n z^n + \cdots$ vor, so gibt es eine positive Zahl r derart, daß die Reihe für alle Punkte z innerhalb des Kreises um den Nullpunkt mit dem Radius r unbedingt konvergiert und für alle Punkte z außerhalb dieses Kreises divergiert, so daß die Reihe für $|z| < r$ unbedingt konvergiert und für $|z| > r$ divergiert. Die Zahl r kann jedoch unter Umständen gleich Null sein oder jede endliche Grenze überschreiten.

Der erwähnte Kreis heißt der *Konvergenzkreis,* sein Radius r der *Konvergenzradius* der Potenzreihe. Der Satz sagt nichts über das Verhalten der Potenzreihe für die Punkte des Konvergenzkreises selbst aus; die Reihe kann dort konvergieren oder divergieren.

Wir können dem Satze 11 sofort eine allgemeinere Form geben, indem wir die allgemeinere Potenzreihe betrachten:

$$c_0 + c_1(z - z_0) + \cdots + c_n(z - z_0)^n + \cdots,$$

in der z_0 eine *bestimmte* komplexe Zahl $x_0 + iy_0$ bedeuten soll. Wenn wir nämlich $z - z_0 = \bar{z}$ setzen, so kommen wir auf eine Reihe $c_0 + c_1\bar{z} + \cdots + c_n\bar{z}^n + \cdots$ zurück, die nach Satz 11 einen Konvergenzradius r haben möge, so daß die Reihe unbedingt konvergiert oder divergiert, je nachdem $|\bar{z}| < r$ oder $> r$ ist. Aber alle Punkte z, für die $|\bar{z}| < r$, d. h. $|z - z_0| < r$ ist, liegen nach Nr. 356 innerhalb desjenigen Kreises vom Radius r, dessen Mitte der Punkt z_0 ist. Daher ergibt sich

Satz 12: Die Potenzreihe:

$$c_0 + c_1(z - z_0) + \cdots + c_n(z - z_0)^n + \cdots$$

konvergiert unbedingt für alle Punkte z innerhalb eines gewissen Kreis um den Punkt z_0 und divergiert für alle Punkte z außerhalb des Kreises. Der Kreisradius kann jedoch unter Umständen gleich Null sein oder jede endliche Grenze überschreiten.

Wieder heißt der Kreis der Konvergenzkreis und sein Radius der Konvergenzradius.

364. Gleichmäßige Konvergenz. Die Potenzreihe

$$(1) \qquad c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots + c_n z^n + \cdots$$

möge einen von Null verschiedenen Konvergenzradius haben, und es bedeute z_1 eine irgendwo *innerhalb* des Konvergenzkreises *bestimmt* gewählte Stelle. An dieser Stelle z_1 konvergiert die Reihe unbedingt, d. h. dort ist auch die Reihe der absoluten Beträge der Glieder konvergent. Aus Satz 2, Nr. 102, schließen wir somit: Wird eine beliebig kleine positive Zahl σ gewählt, so gibt es einen Indexwert n derart, daß für jedes ganze positive p:

$$|c_n z_1^n| + |c_{n+1} z_1^{n+1}| + \cdots + |c_{n+p-1} z_1^{n+p-1}| < \sigma$$

wird. Da alle Glieder der rechts stehenden Summe positiv sind, so ist also um so mehr für jede ganze positive Zahl $m \geqq n$ und für jedes ganze positive p:

$$(2) \qquad |c_m z_1^m| + |c_{m+1} z_1^{m+1}| + \cdots + |c_{m+p-1} z_1^{m+p-1}| < \sigma.$$

Innerhalb desjenigen Kreises mit dem Mittelpunkte O, der durch die Stelle z_1 geht und also mit dem Konvergenzkreise konzentrisch liegt, sei nun eine Stelle z ganz *beliebig* gewählt. Es sei mit anderen Worten z irgend eine solche komplexe Zahl, deren absoluter Betrag kleiner als der von z_1 ist. Die Reihe (1) konvergiert für diese Stelle z unbedingt.

Nach Satz 3, Nr. 357, und Satz 2, Nr. 356, ist nun:

$$\begin{aligned} &|c_m z^m + c_{m+1} z^{m+1} + \cdots + c_{m+p-1} z^{m+p-1}| \\ &\leqq |c_m|\,|z|^m + |c_{m+1}|\,|z|^{m+1} + \cdots + |c_{m+p-1}|\,|z|^{m+p-1}, \end{aligned}$$

daher wegen $|z| < |z_1|$ und mit Rücksicht auf (2):

$$|c_m z^m + c_{m+1} z^{m+1} + \cdots + c_{m+p-1} z^{m+p-1}| < \sigma.$$

Bedeutet $R_m(z)$ denjenigen *Rest* der Reihe (1), der hervorgeht, wenn ihre m ersten Glieder gestrichen werden:

$$R_m(z) = c_m z^m + c_{m+1} z^{m+1} + \cdots,$$

so liefert die letzte Ungleichung für $\lim p = \infty$:

$$|R_m(z)| < \sigma$$

und zwar für jeden Index $m \geqq n$. Dabei ist der Indexwert n ein und derselbe, wie auch z unter der Bedingung $|z| < |z_1|$ gewählt sein mag.

Es macht keine Mühe, das Ergebnis auf den Fall einer Potenzreihe von der Form:

$$(3) \qquad c_0 + c_1(z - z_0) + \cdots + c_n(z - z_0)^n + \cdots$$

zu übertragen, indem man $z - z_0$ statt z und $z_1 - z_0$ statt z_1 substituiert. Um es aber als Satz formulieren zu können, schicken wir eine Definition voran:

Definition der gleichmäßigen Konvergenz: Die Potenzreihe (3) *heißt innerhalb eines Bereiches der komplexen Veränderlichen z gleichmäßig konvergent, wenn es stets, wie klein auch eine positive Zahl σ gewählt sein mag, einen Index n derart gibt, daß für jedes z innerhalb des Bereiches und für jeden Index $m \geqq n$ der absolute Betrag des Restes:*

$$R_m = c_m(z - z_0)^m + c_{m+1}(z - z_0)^{m+1} + \cdots$$

kleiner als σ wird: $|R_m| < \sigma$.

Das Wort: *gleichmäßig* bezieht sich darauf, daß für *alle* Stellen z des Bereiches ein und derselbe Index n vorhanden sein soll derart, daß für $m \geqq n$ überall im Bereiche $|R_m|$ kleiner als *ein und dieselbe vorgeschriebene* Zahl σ wird.

Nun können wir sagen:

Satz 13: Eine Potenzreihe

$$c_0 + c_1(z - z_0) + \cdots + c_n(z - z_0)^n + \cdots$$

deren Konvergenzradius nicht gleich Null ist, konvergiert gleichmäßig innerhalb eines jeden solchen Bereiches von Stellen z, der vollständig im Innern des Konvergenzkreises liegt und nicht bis an den Konvergenzkreis heranreicht.

Denn wenn ein solcher Bereich gewählt wird, so läßt sich um ihn stets ein zum Konvergenzkreise konzentrischer Kreis

beschreiben, der ebenfalls innerhalb des Konvergenzkreises liegt. Wird alsdann z_1 auf dem konstruierten Kreise gewählt, so ist die gleichmäßige Konvergenz oben für alle diejenigen Werte von z bewiesen worden, die der Ungleichung

$$|z - z_0| < |z_1 - z_0|$$

genügen, d. h. für alle Stellen z innerhalb dieses Kreises, demnach insbesondere für alle Stellen des angenommenen Bereiches.

Die gleichmäßige Konvergenz ist dagegen nicht nachgewiesen worden, falls der angenommene Bereich der Stellen z bis an den Konvergenzkreis herantritt. In der Tat könnte man an Beispielen erkennen, daß der absolute Betrag des Restes über jeden Wert wachsen kann, wenn sich die Stelle z dem Konvergenzkreise ohne Ende nähert.

365. Funktionen, insbesondere analytische Funktionen. Indem wir den Begriff der Funktion in Nr. 6 auch auf den Bereich der komplexen Zahlen ausdehnen, nennen wir $w = u + iv$ eine *Funktion der n komplexen Veränderlichen* $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$, $\cdots z_n = x_n + iy_n$, wenn eine Vorschrift vorhanden ist, die jedem bestimmten Wertsysteme $z_1, z_2, \cdots z_n$, das innerhalb gewisser Variabilitätsbereiche von $z_1, z_2, \cdots z_n$ liegt, einen bestimmten Wert der Veränderlichen $w = u + iv$ zuordnet. Erst im zweiten Bande werden wir diesen sehr allgemeinen Funktionsbegriff zweckmäßig einschränken. Diejenigen Funktionen, die wir im folgenden besprechen, ordnen sich, wie sich alsdann zeigen wird, auch dem später einzuführenden engeren Funktionsbegriffe unter.

Wenn nun eine Potenzreihe:

$$w = c_0 + c_1 (z - z_0) + \cdots + c_n (z - z_0)^n + \cdots$$

vorliegt, wo $c_0, c_1, \cdots c_n, \cdots$ und z_0 komplexe Konstanten sind, während z eine komplexe Veränderliche bedeutet, so wissen wir, daß die Reihe für jede Stelle z im Innern des Konvergenzkreises eine bestimmte Summe $w = u + iv$ hat. Daher ist w eine Funktion von z, und zwar heißt eine solche durch eine Potenzreihe dargestellte Funktion eine *analytische Funktion von z.* Der Variabilitätsbereich von z ist hier das Innere des Konvergenzkreises. Es gibt Mittel, den Variabilitätsbereich

von z unter Umständen noch über den Konvergenzkreis auszudehnen; wir gehen jedoch darauf in diesem Bande noch nicht ein und beschränken uns auf das Innere des Konvergenzkreises.

366. Grenzwert einer analytischen Funktion. Indem wir den in § 3 des 1. Kapitels gegebenen Begriff des Grenzwertes sinngemäß verallgemeinern, sagen wir: Eine Funktion $w = f(z)$ von z hat an einer Stelle $z = c$ innerhalb des Variabilitätsbereiches einen *Grenzwert* $C = A + iB$, wenn es stets, wie klein man auch eine positive Zahl σ wählen mag eine positive Zahl h derart gibt, daß für alle Werte von z, für die $|z - c| < h$ ist, auch $|f(z) - C| < \sigma$ wird. Dies bedeutet bei der geometrischen Darstellung der komplexen Zahlen: Wie klein auch σ gewählt sein mag, stets muß es einen Radius h derart geben, daß die Werte von $f(z) - C$ für *alle* Stellen z im Innern des Kreises um die Stelle $z = c$ und mit dem Radius h absolut genommen kleiner als σ werden.

Wir wollen insbesondere die Grenzwerte der *analytischen* Funktionen untersuchen. Dabei schicken wir einen sehr speziellen Fall voraus, indem wir eine *ganze rationale Funktion* von z betrachten. Darunter verstehen wir in Analogie mit Nr. 6 eine Funktion von z, die aus positiven ganzen Potenzen von z und Konstanten durch Addition und Multiplikation gebildet worden ist und daher auf die Form:

$$(1) \qquad w = c_0 + c_1 z + \cdots + c_n z^n$$

gebracht werden kann, also auf die Form einer *endlichen* Potenzreihe. Sie hat für *jeden* Wert von z einen bestimmten Wert. Der Variabilitätsbereich ist somit unbegrenzt. Wenn $c_0 = a_0 + ib_0$, $c_1 = a_1 + ib_1, \cdots c_n = a_n + ib_n$ und $z = x + iy$ gesetzt wird, so können wir alle Multiplikationen und Additionen ausführen und den reellen Teil von dem rein imaginären sondern, so daß kommt:

$$(2) \qquad w = \varphi(x, y) + i\psi(x, y).$$

Augenscheinlich sind hier φ und ψ *ganze rationale reelle Funktionen n^{ten} Grades von x und y.* Nach Satz 17 in Nr. 23 sind sie für jedes reelle Wertepaar x, y stetig.

Wir behaupten, daß die ganze rationale Funktion w an der Stelle $z = c$ gerade denjenigen Wert C als Grenzwert hat, der sich als Wert von w aus (1) durch die Substitution $z = c$ ergibt, d. h. den Grenzwert:

$$C = c_0 + c_1 c + \cdots + c_n c^n. \tag{3}$$

Zum Beweise werde $c = a + ib$ gesetzt. Dann ist nach (2):

$$C = \varphi(a, b) + i\psi(a, b).$$

Bedeutet nun τ eine bestimmt gewählte beliebig kleine positive Zahl, so gibt es, da φ und ψ stetige Funktionen von x und y sind, eine positive Zahl h derart, daß für alle reellen x und y, die den Bedingungen:

$$-h < x - a < h, \quad -h < y - b < h \tag{4}$$

genügen, auch:

$$-\tau < \varphi(x, y) - \varphi(a, b) < \tau, \quad -\tau < \psi(x, y) - \psi(a, b) < \tau$$

wird. Also kommt (vgl. die Schlußbemerkungen in Nr. 357):

$$|\varphi(x, y) + i\psi(x, y) - [\varphi(a, b) + i\psi(a, b)]| < \tau\sqrt{2}, \tag{5}$$

wo $\sqrt{2}$ positiv ist. Die Voraussetzungen (4) sind insbesondere erfüllt, wenn:

$$|x + iy - (a + ib)| < h, \quad \text{d. h.} \quad |z - c| < h$$

ist. Indem wir $\tau\sqrt{2} = \sigma$ setzen, ergibt sich also unter dieser Voraussetzung aus (5):

$$|w - C| < \sigma.$$

Dies liefert den

Satz 14: Jede ganze rationale Funktion w von z hat an jeder Stelle z einen bestimmten endlichen Grenzwert; er ist gleich dem Werte, den die Funktion selbst an der betreffenden Stelle hat.

Wir betrachten schließlich irgend eine *analytische Funktion*

$$f(z) = c_0 + c_1(z - z_0) + \cdots + c_n(z - z_0)^n + \cdots \tag{6}$$

an irgend einer Stelle $z = c$ innerhalb ihres Konvergenzkreises, dessen Mittelpunkt die Stelle z_0 ist. Nach Satz 13 in Nr. 364 gibt es, sobald eine beliebig kleine positive Zahl τ gewählt worden ist, stets einen Index n derart, daß der absolute Betrag des Restes $R_n(z)$ für *alle* Stellen z im *Innern* des Konver-

genzkreises kleiner als τ wird. Verstehen wir nun unter $F(z)$ die ganze rationale Funktion:

$$F(z) = c_0 + c_1(z - z_0) + \cdots + c_{n-1}(z - z_0)^{n-1},$$

so wird $f(z) = F(z) + R_n(z)$. Nach Satz 14 hat $F(z)$ an der Stelle $z = c$ den Grenzwert $F(c)$, d. h. es gibt eine positive Zahl h derart, daß für $|z - c| < h$ auch $|F(z) - F(c)|$ kleiner als τ wird. Da $|R_n(z)|$ und $|R_n(c)|$ beide kleiner als τ sind, so ist unter der Bedingung $|z - c| < h$ mit Rücksicht auf Satz 3 in Nr. 357:

$$\begin{aligned} |f(z) - f(c)| &= |F(z) - F(c) + R_n(z) - R_n(c)| \\ &\leqq |F(z) - F(c)| + |R_n(z)| + |R_n(c)| < 3\tau. \end{aligned}$$

Bezeichnen wir 3τ mit σ, so sehen wir, daß die an die Spitze dieser Nummer gestellte Definition des Grenzwertes für $C = f(c)$ erfüllt ist. Wir haben also bewiesen:

Satz 15: Eine analytische Funktion von z

$$c_0 + c_1(z - z_0) + \cdots + c_n(z - z_0)^n + \cdots$$

hat an jeder Stelle z innerhalb des Konvergenzkreises um z_0 einen bestimmten endlichen Grenzwert; er ist gleich dem Werte, den die Funktion an der betreffenden Stelle hat.

367. Stetigkeit. Ist $w = f(z)$ eine Funktion der komplexen Veränderlichen z (vgl. Nr. 365), so sagen wir wie in Nr. 20, daß sie an einer Stelle $z = c$ innerhalb des Variabilitätsbereiches stetig sei, wenn sie dort einen bestimmten endlichen Grenzwert hat und dieser Grenzwert übereinstimmt mit demjenigen Werte $f(c)$, den die Funktion an der Stelle $z = c$ hat, in Formel:

$$\lim_{z=c} f(z) = f(c).$$

Aus unserem letzten Satze folgt dann sofort:

Satz 16: Eine analytische Funktion von z

$$c_0 + c_1(z - z_0) + \cdots + c_n(z - z_0)^n + \cdots$$

ist an jeder Stelle innerhalb des Konvergenzkreises stetig.

Außerdem ergibt sich wie Satz 4 in Nr. 21:

Satz 17: Ist eine analytische Funktion $f(z)$ an der Stelle $z = c$ innerhalb des Konvergenzkreises nicht gleich Null, so gibt

es stets einen Kreis von endlichem Radius um diese Stelle derart, daß die Funktion nirgends innerhalb dieses Kreises gleich Null wird.

368. Ableitung einer Funktion. Es sei z eine Stelle innerhalb des Variabilitätsbereiches der unabhängigen Veränderlichen z einer Funktion $w = f(z)$. Um diese Stelle als Mittelpunkt können wir dann einen Kreis mit einem Radius ϱ beschreiben, so daß alle Stellen im Innern dieses Kreises ebenfalls dem Variabilitätsbereiche angehören. Es sei — in Analogie mit Nr. 27 — eine solche Stelle mit $z + \Delta z$ bezeichnet, also Δz die Differenz des Wertes von z an dieser Stelle und des Wertes von z im Mittelpunkte, so daß $|\Delta z| < \varrho$ vorausgesetzt wird. Wir betrachten alsdann den Bruch:

$$\frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z},$$

der eine Funktion von z und Δz ist. Wir lassen nun ϱ nach Null streben; hat der Bruch für *alle* $|\Delta z| < \varrho$ im Falle $\lim \varrho = 0$ einen und denselben bestimmten endlichen Grenzwert, so heißt dieser Grenzwert die *Ableitung* $f'(z)$ oder der *Differentialquotient* $df : dz$ der Funktion $f(z)$ an der betrachteten Stelle:

$$f'(z) = \frac{df}{dz} = \lim_{\Delta z = 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}.$$

Betrachten wir, um diese Definition anzuwenden, zunächst die einfache ganze rationale Funktion:

$$f(z) = c_n (z - z_0)^n,$$

deren Variabilitätsbereich unbeschränkt ist. Hier kommt:

$$\frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = c_n \left[\frac{n}{1}(z - z_0)^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}(z - z_0)^{n-2} \Delta z + \cdots + \Delta z^{n-1}\right].$$

Da rechts eine Summe aus einer *endlichen* Anzahl von Gliedern steht, ist der Differentialquotient:

$$\lim_{\Delta z = 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = n\, c_n (z - z_0)^{n-1}.$$

Es bedarf wohl keiner ausführlichen Erörterung darüber, *daß die elementaren Regeln für die Differentiation einer Summe, einer Differenz, eines Produktes und eines Bruches auch im Bereiche der komplexen Zahlen gelten.*

Wir beabsichtigen nun zu beweisen, daß die analytische Funktion

$$c_0 + c_1(z - z_0) + c_2(z - z_0)^2 + \cdots + c_n(z - z_0)^n + \cdots$$

an jeder Stelle z im Innern des Konvergenzkreises eine Ableitung hat, und daß diese Ableitung überdies diejenige Funktion ist, die durch *gliedweise Differentiation* der Reihe hervorgeht, nämlich

$$c_1 + 2c_2(z - z_0) + \cdots + nc_n(z - z_0)^{n-1} + \cdots.$$

Hierbei muß beachtet werden, daß der Satz über die gliedweise Differentiation einer Summe in Nr. 34 nur für den Fall einer *endlichen* Anzahl von Summanden bewiesen worden ist. Daher zerfällt der Beweis in zwei Teile: Zuerst wollen wir zeigen, daß die durch die letzte Reihe dargestellte analytische Funktion denselben Konvergenzkreis wie die gegebene hat, und dann, daß sie die Ableitung von ihr ist.

369. Konvergenzkreis der durch gliedweise Differentiation einer Potenzreihe hervorgehenden Potenzreihe. Wir betrachten die Reihe:

$$(1)\quad c_0 + c_1(z - z_0) + c_2(z - z_0)^2 + \cdots + c_n(z - z_0)^n + \cdots$$

und wählen eine Stelle z_1 im Innern des Konvergenzkreises, dessen Mitte z_0 ist. Es gibt dann — vgl. (1) in Nr. 363 — zu jeder beliebig kleinen positiven Zahl σ einen Index n derart, daß $|c_m(z_1 - z_0)^m| < \sigma$ für $m \geqq n$ ist. Ferner sei z im Innern des Kreises um z_0 und durch z_1 gewählt, so daß $|z - z_0|$ die Form $\theta\,|z_1 - z_0|$ hat, wo θ ein positiver echter Bruch ist. Analog der Formel (3) in Nr. 363 wird nun:

$$|nc_n(z - z_0)^{n-1}| + \cdots + |(n + p - 1)c_{n+p-1}(z - z_0)^{n+p-2}|$$
$$< n\theta^{n-1}|c_n(z_1 - z_0)^{n-1}| + \cdots + (n + p - 1)\theta^{n+p-2}|c_{n+p-1}(z_1 - z_0)^{n+p-2}|$$
$$< \frac{\sigma}{|z_1 - z_0|}\left[n\theta^{n-1} + \cdots + (n + p - 1)\theta^{n+p-2}\right].$$

Nach der binomischen Formel (4) in Nr. 125 gilt aber, weil θ einen positiven echten Bruch bedeutet, die konvergente Entwicklung:

$$\frac{1}{(1 - \theta)^2} = 1 + 2\theta + 3\theta^2 + \cdots + n\theta^{n-1} + \cdots;$$

daher muß sein:

$$\lim_{n=\infty} [n\theta^{n-1} + \cdots + (n+p-1)\theta^{n+p-2}] = 0.$$

Mithin lehrt die Ungleichung nach Satz 6 und 7 in Nr. 360, 361, daß die Reihe

$$(2) \qquad c_1 + 2c_2(z-z_0) + \cdots + nc_n(z-z_0)^{n-1} + \cdots$$

an der Stelle z unbedingt konvergiert. Da z im Innern des Kreises um z_0 und durch z_1 und ferner z_1 irgendwo im Innern des Konvergenzkreises der Reihe (1) gewählt war, so konvergiert also die Reihe (2) überall im Innern des Konvergenzkreises der Reihe (1) unbedingt.

Aber auch das Umgekehrte gilt: Es sei nämlich jetzt z_1 eine Stelle im Innern des Konvergenzkreises der Reihe (2), dessen Mitte ja auch z_0 ist. Alsdann gibt es zu jeder beliebig kleinen positiven Zahl σ einen Index n derart, daß $|mc_m(z_1-z_0)^{m-1}|$ für jedes $m \geqq n$ kleiner als σ wird. Ferner liege z im Innern des Kreises um z_0 und durch z_1, so daß $|z-z_0|$ die Form $\theta|z_1-z_0|$ hat, wo θ einen positiven echten Bruch bedeutet. Dann kommt:

$$\begin{aligned} &|c_n(z-z_0)^n| + \cdots + |c_{n+p-1}(z-z_0)^{n+p-1}| \\ < \theta^n &|c_n(z_1-z_0)^n| + \cdots + \theta^{n+p-1}|c_{n+p-1}(z_1-z_0)^{n+p-1}| \\ &< |z_1-z_0| \frac{\sigma}{n}[\theta^n + \cdots + \theta^{n+p-1}]. \end{aligned}$$

Der Inhalt der letzten Klammer hat, da θ ein echter Bruch ist, den Grenzwert Null für $\lim n = \infty$; also lassen sich dieselben Schlüsse wie oben machen.

Aus beiden Betrachtungen folgt der

Satz 18: Die beiden Potenzreihen

$$c_0 + c_1(z-z_0) + c_2(z-z_0)^2 + \cdots + c_n(z-z_0)^n + \cdots$$

und

$$c_1 + 2c_2(z-z_0) + \cdots + nc_n(z-z_0)^{n-1} + \cdots$$

haben denselben Konvergenzkreis.

Da die zweite Reihe durch gliedweise Differentiation aus der ersten hervorgegangen ist, so folgt, daß auch die Reihen, die fernerhin durch gliedweise Differentiation gewonnen werden können, denselben Konvergenzkreis haben.

370. Ableitung einer analytischen Funktion. Wir wählen z irgendwo im Innern des Konvergenzkreises der Reihe:

$$(1)\quad f(z) = c_0 + c_1(z - z_0) + c_2(z - z_0)^2 + \cdots + c_n(z - z_0)^n + \cdots$$

und nehmen $|\varDelta z|$ so klein an, daß auch $z + \varDelta z$ im Innern des Konvergenzkreises liegt. Dann ist auch die Reihe:

$$f(z + \varDelta z) = c_0 + c_1(z + \varDelta z - z_0) + c_2(z + \varDelta z - z_0)^2 + \cdots + c_n(z + \varDelta z - z_0)^n + \cdots$$

unbedingt konvergent. Dasselbe gilt nach Satz 18 der vorigen Nummer von der Reihe, die durch gliedweise Differentiation von (1) hervorgeht, nämlich von:

$$g(z) = c_1 + 2c_2(z - z_0) + \cdots + nc_n(z - z_0)^{n-1} + \cdots$$

Nach Satz 7 in Nr. 103 ist daher auch die Reihe:

$$(2)\begin{cases} \dfrac{f(z+\varDelta z)-f(z)}{\varDelta z} - g(z) = c_2\left[\dfrac{(z-z_0+\varDelta z)^2-(z-z_0)^2}{\varDelta z} - 2(z-z_0)\right] + \cdots \\ \qquad + c_n\left[\dfrac{(z-z_0+\varDelta z)^n-(z-z_0)^n}{\varDelta z} - n(z-z_0)^{n-1}\right] + \cdots \end{cases}$$

unbedingt konvergent. Wird $z - z_0$ mit $\bar{z}$ bezeichnet, so hat das $(n-1)^{\text{te}}$ Glied dieser Reihe den Wert:

$$(3)\begin{cases} \dfrac{n(n-1)}{2} c_n \varDelta z \Big[\bar{z}^{n-2} + \dfrac{n-2}{3}\bar{z}^{n-3}\varDelta z + \\ \qquad + \dfrac{(n-2)(n-3)}{3 \cdot 4}\bar{z}^{n-4}\varDelta z^2 + \cdots + \dfrac{(n-2)\cdots 2 \cdot 1}{3 \cdot 4 \cdots n}\varDelta z^{n-2}\Big], \end{cases}$$

und sein absoluter Betrag ist nach Satz 3 in Nr. 357 nicht größer als der Ausdruck, der sich ergibt, wenn darin alle komplexen Zahlen durch ihre absoluten Beträge ersetzt werden. Der so entstehende Ausdruck ist ferner kleiner als derjenige, der sich ergibt, wenn die Nenner $3, 3 \cdot 4, \cdots$ durch $1, 1 \cdot 2$ usw. ersetzt werden. Dann aber wird der Inhalt der eckigen Klammer die $(n-2)^{\text{te}}$ Potenz von $|\bar{z}| + |\varDelta z|$. Der absolute Betrag des Ausdruckes (3) ist mithin kleiner als:

$$\frac{n(n-1)}{2}|c_n|\,|\varDelta z|\,[|\bar{z}| + |\varDelta z|]^{n-2}.$$

Wir können nun $|\varDelta z|$ so klein wählen, daß $|\bar{z}| + |\varDelta z|$ oder also $|z - z_0| + |\varDelta z|$ einen Wert ϱ hat, der kleiner als der Konvergenzradius der Reihe (1) ist. Alsdann sind die

absoluten Beträge der Glieder der Reihe (2) kleiner als die entsprechenden Glieder der Reihe:

(4) $\frac{1}{2}|\varDelta z|[2\cdot 1|c_2| + 3\cdot 2|c_3|\varrho + \cdots + n(n-1)|c_n|\varrho^{n-2} + \cdots]$.

Wir wissen aber, daß die Reihe, die durch *zweimalige* gliedweise Differentiation von (1) hervorgeht, innerhalb des Konvergenzkreises der Reihe (1) unbedingt konvergiert, nach der Schlußbemerkung der vorigen Nummmer, d. h. daß die Reihe:

$$2\cdot 1|c_2| + 3\cdot 2|c_3||z-z_0| + \cdots + n(n-1)|c_n||z-z_0|^{n-2} + \cdots$$

konvergiert, wenn $|z-z_0|$ kleiner als der Konvergenzradius ist. Da nun ϱ kleiner als dieser Radius gewählt worden war, so folgt, daß die in (4) in der eckigen Klammer stehende Reihe konvergiert. Ihre Summe, die positiv ist, sei gleich a.

Der absolute Betrag der Summe S_{n-1} der $n-1$ ersten Glieder der Reihe (2) ist nach Satz 3 in Nr. 357 nicht größer als die Summe der absoluten Beträge dieser Glieder, daher kleiner als die Summe der $n-1$ ersten Glieder der Reihe (4). Diese aber ist nicht größer als $\frac{1}{2}|\varDelta z|a$. Also wird auch:

$$\lim_{n=\infty}|S_{n-1}| < \frac{1}{2}|\varDelta z|a.$$

Aus (2) folgt somit:

$$\left|\frac{f(z+\varDelta z)-f(z)}{\varDelta z} - g(z)\right| < \frac{1}{2}|\varDelta z|a,$$

und hieraus ergibt sich beim Grenzübergange für $\lim \varDelta z = 0$:

$$\left|\lim_{\varDelta z=0}\frac{f(z+\varDelta z)-f(z)}{\varDelta z} - g(z)\right| = 0.$$

Die zwischen den Strichen stehende komplexe Zahl hat also den absoluten Betrag Null und ist daher selbst gleich Null. Somit geht hervor:

$$\lim_{\varDelta z=0}\frac{f(z+\varDelta z)-f(z)}{\varDelta z} = g(z).$$

Blicken wir auf die Bedeutung von $g(z)$ zurück, so finden wir den

Satz 19: Die Ableitung der analytischen Funktion:

$$f(z) = c_0 + c_1(z-z_0) + c_2(z-z_0)^2 + \cdots + c_n(z-z_0)^n + \cdots$$

ist an jeder Stelle innerhalb des Konvergenzkreises diejenige Funktion, die durch gliedweise Differentiation der Reihe hervorgeht, nämlich die Funktion:

$$f'(z) = c_1 + 2c_2(z - z_0) + \cdots + nc_n(z - z_0)^{n-1} + \cdots.$$

Hiernach gibt wiederholte gliedweise Differentiation der Reihe ohne weiteres auch die *Ableitungen höherer Ordnung von* $f(z)$.

371. Übereinstimmung zweier Potenzreihen. Wir betrachten zunächst eine Potenzreihe, deren Konvergenzkreis den Nullpunkt O zur Mitte hat:

$$(1) \qquad f(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots + c_n z^n + \cdots.$$

Es werde angenommen, daß *erstens* ihr Konvergenzradius nicht gleich Null sei und daß *zweitens* $f(z)$ für *alle* innerhalb des Konvergenzkreises gelegenen *reellen* Stellen z den Wert *Null* habe. Da $z = 0$ zu diesen Stellen gehört, so ist $c_0 = 0$. Nun wird die Funktion:

$$(2) \qquad \frac{f(z)}{z} = c_1 + c_2 z + \cdots + c_n z^{n-1} + \cdots$$

gleich Null für alle reellen Werte von z innerhalb des Konvergenzkreises, wenn zunächst von dem Werte $z = 0$ selbst abgesehen wird. Daß die Reihe (2) übrigens denselben Konvergenzkreis wie die Reihe (1) hat, erkennt man sofort nach Satz 6 in Nr. 360. Die Funktion (2) ist also überall innerhalb des Konvergenzkreises stetig, nach Satz 16 in Nr. 367. Wäre sie nun für $z = 0$ nicht gleich Null, so dürfte sie es auch nach Satz 17 in Nr. 367 nicht für ein beliebig kleines reelles z sein. Da dies aber doch der Fall ist, muß die Funktion (2) für $z = 0$ ebenfalls den Wert Null haben. Es ist mithin auch $c_1 = 0$. Wenn wir nun die Funktion $f(z) : z^2$ betrachten und entsprechend weiter schließen, finden wir ebenso $c_2 = 0$, usw.

Wird z durch $z - z_0$ ersetzt, so ergibt sich allgemeiner der

Satz 20: Wenn der Konvergenzradius der Potenzreihe:

$$c_0 + c_1(z - z_0) + \cdots + c_n(z - z_0)^n + \cdots$$

nicht gleich Null ist, die Reihe aber an allen denjenigen Stellen

z innerhalb des Konvergenzkreises, für die $z - z_0$ reell ist, den Wert Null hat, so sind alle ihre Koeffizienten gleich Null.

Wenn nun zwei Potenzreihen denselben Mittelpunkt z_0 für ihre Konvergenzkreise haben, so hat ihre *Differenz* nach Satz 6 in Nr. 103 als Konvergenzkreis den kleineren der beiden Kreise, so daß aus dem Vorhergehenden leicht zu folgern ist:

Satz 21: Stimmen die Werte zweier Potenzreihen:

$$c_0 + c_1(z - z_0) + \cdots \quad \textit{und} \quad \gamma_0 + \gamma_1(z - z_0) + \cdots,$$

deren Konvergenzkreise dieselbe Mitte z_0 haben und deren Konvergenzradien nicht gleich Null sind, an allen denjenigen Stellen z in dem kleineren der beiden Konvergenzkreise überein, für die $z - z_0$ reell ist, so sind sie überhaupt miteinander identisch.

372. Die Taylorsche Reihe. Die analytische Funktion:

$$f(z) = c_0 + c_1(z - z_0) + c_2(z - z_0)^2 + \cdots + c_n(z - z_0)^n + \cdots$$

hat innerhalb des Konvergenzkreises nach Nr. 370 die Ableitungen:

$$f'(z) = 1 \cdot c_1 + 2 \cdot c_2(z - z_0) + \cdots + nc_n(z - z_0)^{n-1} + \cdots,$$
$$f''(z) = 1 \cdot 2 \cdot c_2 + \cdots + n(n-1)c_n(z - z_0)^{n-2} + \cdots,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

so daß:

$$f(z_0) = c_0, \quad f'(z_0) = 1 \cdot c_1, \quad f''(z_0) = 1 \cdot 2 \cdot c_2, \ldots,$$

also:

$$c_0 = f(z_0), \quad c_1 = \frac{1}{1!}f'(z_0), \quad c_2 = \frac{1}{2!}f''(z_0), \ldots$$

wird. Setzt man diese Werte in die Reihe $f(z)$ ein, so kommt:

$$f(z) = f(z_0) + \frac{z - z_0}{1!}f'(z_0) + \frac{(z - z_0)^2}{2!}f''(z_0) + \cdots$$
$$+ \frac{(z - z_0)^n}{n!}f^{(n)}(z_0) + \cdots,$$

und *dies ist nichts anderes als eine Taylorsche Reihe im Gebiete der komplexen Veränderlichen*, vgl. Nr. 112. Im Falle $z_0 = 0$ geht insbesondere die *Maclaurinsche Reihe* hervor.

373. Die Funktionen e^z, $\sin z$ und $\cos z$. Nach Nr. 117 können wir die Funktion e^z für jedes reelle z durch die unendliche Reihe:

(1) $$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots$$

definieren. Wir behalten diese Definition auch im Bereiche einer komplexen Veränderlichen bei. Es ist sofort einzusehen, daß die Reihe überall konvergiert; denn weil sie für jede reelle Zahl z konvergiert, ist die Behauptung eine unmittelbare Folge des Satzes 9 in Nr. 363. Ganz ebenso ergibt sich, daß die Reihen in Nr. 119:

(2) $$\sin z = \frac{z}{1!} - \frac{z^3}{3!} + \cdots, \quad \cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \cdots$$

auch für jeden komplexen Wert von z unbedingt konvergent sind. Wir können daher $\sin z$ und $\cos z$ für den Fall einer komplexen Zahl z durch diese Reihen definieren. Die so gewonnenen analytischen Funktionen e^z, $\sin z$ und $\cos z$ stimmen, falls z reell ist, mit den reellen Funktionen, die wir früher betrachteten, überein.

Im Bereiche der reellen Veränderlichen bestehen zwischen diesen Funktionen gewisse Beziehungen, wie z. B. $e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{z_1 + z_2}$ und es fragt sich, ob sie auch im Bereiche der komplexen Veränderlichen gelten. Daß dies in der Tat der Fall ist, erkennen wir so: Nach (1) bilden wir die Reihen für e^{z_1} und e^{z_2} und multiplizieren sie nach Satz 17 in Nr. 110 miteinander; alsdann ergibt sich sofort, daß das $(n+1)^{\text{te}}$ Glied der Reihe, die das Produkt darstellt, nichts anderes als $(z_1 + z_2)^n : n!$, also das $(n+1)^{\text{te}}$ Glied derjenigen Reihe ist, die aus (1) hervorgeht, wenn darin z durch $z_1 + z_2$ ersetzt wird. Folglich ist stets:

(3) $$e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{z_1 + z_2}.$$

In entsprechender Weise zeigt man, daß im Bereiche der komplexen Veränderlichen auch die bekannten goniometrischen Formeln für die Funktionen (2) gelten, wie z. B.:

$$\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2,$$
$$\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2$$

usw. Setzt man hierin für z_1 und z_2 insbesondere z und 2π so kommt:

(4) $$\sin(z + 2\pi) = \sin z, \quad \cos(z + 2\pi) = \cos z,$$

d. h. die Funktionen $\sin z$ und $\cos z$ haben auch im Bereiche

der komplexen Veränderlichen die *Periode* 2π. Setzt man dagegen $z_2 = -z_1$, so gibt die zweite Gleichung noch $\sin^2 z_1 + \cos^2 z_1 = 1$. Aus Satz 19 in Nr. 370 folgt, daß e^z, $\sin z$ und $\cos z$ auch jetzt die Ableitungen e^z, $\cos z$ und $-\sin z$ haben.

Wenn wir z in (1) durch iz oder $-iz$ ersetzen, so kommt mit Rücksicht auf (2):

$$\cos z + i \sin z = e^{iz}, \quad \cos z - i \sin z = e^{-iz}, \tag{5}$$

woraus durch Addition und Subtraktion folgt:

$$\cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}), \quad \sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}). \tag{6}$$

Aus den Gleichungen (5) folgt im übrigen leicht ein neuer Beweis der in Nr. 358 gefundenen *Moivreschen Formel.* Die erste Gleichung (5) zeigt ferner mit Rücksicht auf (4), daß $e^{i(z+2\pi)}$ gleich e^{iz} ist. Ersetzen wir hierin z durch $-iz$, so kommt:

$$e^{z+2i\pi} = e^z, \tag{7}$$

d. h. *die Exponentialfunktion* e^z *hat die rein imaginäre Periode* $2i\pi$.

Aus (2) in Nr. 355 und nach der ersten Formel (5) ergibt sich, *daß jede komplexe Zahl, deren absoluter Betrag gleich* ϱ *und deren Amplitude gleich* ω *ist, in der Form* $\varrho e^{i\omega}$ *dargestellt werden kann.*

Man kann leicht erkennen, für welche Werte von z die Funktionen $\sin z$ und $\cos z$ gleich Null sind. Zunächst ist nämlich:

$$\sin(x + iy) = \sin x \cos iy + \cos x \sin iy.$$

Nach (6) kann hierin gesetzt werden:

$$\cos iy = \frac{1}{2}(e^y + e^{-y}), \quad \sin iy = \frac{i}{2}(e^y - e^{-y}). \tag{8}$$

Die Forderung $\sin(x + iy) = 0$ kommt also auf diese hinaus:

$$(e^y + e^{-y}) \sin x + i(e^y - e^{-y}) \cos x = 0.$$

Da hier x und y reell sind, so muß einzeln:

$$(e^y + e^{-y}) \sin x = 0, \quad (e^y - e^{-y}) \cos x = 0$$

sein. Weil aber $e^y + e^{-y}$ nie gleich Null wird, folgt $\sin x = 0$ und $e^y = e^{-y}$, d. h. $x = n\pi$, wo n eine ganze Zahl bedeutet,

und $e^{2y} = 1$, d. h. $y = 0$. *Mithin wird* $\sin z$ *nur für die reellen Werte* $z = n\pi$ *gleich Null.* Ganz ebenso ergibt sich, *daß* $\cos z$ *nur für die reellen Werte* $z = (n + \frac{1}{2})\pi$ *gleich Null wird.*

Soll $e^z = 0$ sein, so schreiben wir dafür $e^{x+iy} = 0$, d. h. $e^x \cdot e^{iy} = 0$. Da e^x reell und deshalb nie gleich Null wird, so bleibt $e^{iy} = 0$. Nach der ersten Formel (5) muß also zugleich $\cos y = 0$ und $\sin y = 0$ sein, was jedoch nie der Fall ist. *Also wird* e^z *nie gleich Null.*

Da jetzt e^z für beliebige komplexe Werte von z definiert ist, sind auch die in Nr. 117 eingeführten *hyperbolischen Funktionen* $\mathfrak{Sin}\, x$ und $\mathfrak{Cos}\, x$ wohl definiert, falls x durch irgend eine komplexe Zahl z ersetzt wird. Es kommt:

$$(9) \qquad \mathfrak{Sin}\, z = \tfrac{1}{2}(e^z - e^{-z}), \qquad \mathfrak{Cos}\, z = \tfrac{1}{2}(e^z + e^{-z}),$$

so daß sich statt (6) schreiben läßt:

$$(10) \qquad \cos z = \mathfrak{Cos}\, iz, \qquad \sin z = \frac{1}{i}\, \mathfrak{Sin}\, iz.$$

374. Die Binomialreihe. Wir haben in Nr. 125 gesehen, daß die Binomialreihe

$$(1) \qquad 1 + \frac{m}{1!} z + \frac{m(m-1)}{2!} z^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!} z^3 + \cdots$$

für reelles z konvergiert, sobald $|z| < 1$ ist, und divergiert, sobald $|z| > 1$ ist. Aus Satz 9 und 10 in Nr. 363 folgt also sofort: *Die Potenzreihe* (1) *hat im Gebiete der komplexen Veränderlichen den Konvergenzradius Eins.*

Wir wissen ferner, daß die Reihe, falls z reell und $|z| < 1$ ist, den Wert $(1+z)^m$ hat. Was für eine Bedeutung aber $(1+z)^m$ hat, wenn z komplex gewählt wird, ist nur für *ganzes positives* m definiert, nämlich dann bedeutet $(1+z)^m$ das Produkt von m Faktoren $1 + z$. Da dann die Binomialformel nach dem $(m+1)^{\text{ten}}$ Gliede abbricht, so stellt sie auch im komplexen Gebiete $(1+z)^m$ dar. Ist jedoch m irgend eine reelle Zahl, so *definieren* wir $(1+z)^m$ durch die Formel:

$$(2) \quad (1+z)^m = 1 + \frac{m}{1!} z + \frac{m(m-1)}{2!} z^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!} z^3 + \cdots$$

unter der Annahme $|z| < 1$. Aber wir haben dann zu beweisen, daß diese Funktion $(1+z)^m$ in der Tat die Gesetze der Potenzrechnung erfüllt. Dies ist leicht darzutun. Bilden

wir nämlich nach (2) auch $(1+z)^n$ und multiplizieren wir alsdann beide Potenzreihen miteinander nach Satz 17 in Nr. 110, so geht gerade diejenige Reihe hervor, die sich aus (2) für $(1+z)^{m+n}$ ergeben würde. Also kommt in der Tat:

$$(1+z)^m (1+z)^n = (1+z)^{m+n}.$$

Indem wir $(1+z)^m$ gerade p-mal mit sich multiplizieren, wo p eine ganze positive Zahl bedeute, ergibt sich hieraus:

$$[(1+z)^m]^p = (1+z)^{mp}.$$

Also auch dieses Gesetz der Potenzrechnung gilt hier, sobald p eine ganze positive Zahl ist. Vorausgesetzt wird immer $|z| < 1$.

In einer berühmten Abhandlung hat zuerst *Abel* die Binomialreihe für den Fall komplexer Werte von z (und auch komplexer Werte von m) exakt untersucht. Wir kommen im zweiten Bande gelegentlich auf die Binomialreihe zurück.

§ 4. Einige spezielle Funktionen.

375. Tangens und Kotangens. Diese Funktionen definieren wir im Bereiche der komplexen Veränderlichen als die Brüche $\sin z : \cos z$ und $\cos z : \sin z$, die zeigen, daß $\operatorname{tg} z$ und $\operatorname{ctg} z$ überall stetig sind, abgesehen von denjenigen Stellen, wo $\cos z$ bzw. $\sin z$ gleich Null ist (vgl. Nr. 373).

Durch Anwendung der Regel für die Differentiation eines Bruches, vgl. Nr. 368, ergibt sich sofort, daß $\operatorname{tg} z$ und $\operatorname{ctg} z$ auch jetzt die Ableitungen $1 : \cos^2 z$ und $-1 : \sin^2 z$ haben.

Nach (6) in Nr. 373 ist:

$$(1)\qquad \operatorname{tg} z = \frac{1}{i}\,\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{e^{iz}+e^{-iz}},\qquad \operatorname{ctg} z = i\,\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{e^{iz}-e^{-iz}}.$$

Auch die in Nr. 117 eingeführte *hyperbolische Funktion* $\mathfrak{Tg}\,x$ läßt sich jetzt auf den komplexen Bereich ausdehnen. Die Funktion:

$$(2)\qquad \mathfrak{Tg}\,z = \frac{\mathfrak{Sin}\,z}{\mathfrak{Cof}\,z} = \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}}$$

ist überall stetig, abgesehen von denjenigen Stellen, an denen $\mathfrak{Cof}\,z$ verschwindet. Da nun nach (10) in Nr. 373:

$$\mathfrak{Cof}\, z = \cos(-iz)$$

wird und $\cos z$ nur für die Werte $(n + \frac{1}{2})\pi$ verschwindet, so folgt, daß bei $\mathfrak{Tg}\, z$ von den Stellen:

$$z = i(n + \tfrac{1}{2})\pi$$

abgesehen werden muß. Hierbei bedeutet n eine beliebige ganze Zahl.

Nach (1) und (2) können wir schreiben:

$$\text{(3)} \qquad \operatorname{tg} z = \frac{1}{i}\, \mathfrak{Tg}\, iz \quad \text{oder} \quad \mathfrak{Tg}\, z = -i \operatorname{tg} iz.$$

376. Der Logarithmus. Nachdem wir e^z in Nr. 373 auch im Bereiche der komplexen Veränderlichen definiert haben, können wir daraus durch *Inversion* wie in Nr. 11 die Definition des *natürlichen Logarithmus* von z gewinnen. Wir wollen zur Unterscheidung von $\ln z$ im Falle einer reellen Veränderlichen z diese Funktion mit $\operatorname{Ln} z$ bezeichnen, sobald z eine komplexe Größe ist, definieren daher:

Die Größe $w = u + iv$ soll der natürliche Logarithmus von z heißen, also $\operatorname{Ln} z$, wenn $e^w = z$ ist.

Bedeutet ϱ den absoluten Betrag und ω die Amplitude des *Numerus* z, so ist $z = \varrho(\cos\omega + i \sin\omega)$. Da nach (5) in Nr. 373 für e^{iv} der Wert $\cos v + i \sin v$ gesetzt werden kann, so fordern wir:

$$e^{u+iv} = e^u e^{iv} = e^u(\cos v + i \sin v) = \varrho(\cos\omega + i \sin\omega).$$

Weil u, v, ϱ, ω reell sind und e^u und ϱ positive Zahlen bedeuten, folgt einzeln:

$$e^u = \varrho, \quad \cos v = \cos\omega, \quad \sin v = \sin\omega.$$

Demnach ist $u = \ln\varrho$ und $v = \omega + 2k\pi$, wo k eine ganze Zahl vorstellt. Also ist $u + iv$ oder der natürliche Logarithmus von z definiert durch:

$$\text{(1)} \qquad \operatorname{Ln} z = \ln\varrho + i(\omega + 2k\pi),$$

wenn ϱ den absoluten Betrag und ω die Amplitude des Numerus z bedeutet. Die Funktion $\operatorname{Ln} z$ wird erst eindeutig, wenn wir insbesondere $k = 0$ setzen und die Amplitude ω des Numerus z, wie es ja geschehen darf, auf den Bereich von $-\pi$ bis $+\pi$ beschränken. Der so hervorgehende Wert:

$$\text{(2)} \qquad \operatorname{Ln} z = \ln\varrho + i\omega$$

heißt der *Hauptwert* des natürlichen Logarithmus. Ist der Numerus z reell und positiv, also gleich ϱ selbst, während $\omega = 0$ wird, so stimmt der Hauptwert mit dem natürlichen Logarithmus in der alten Definition überein. Weil $\ln \varrho$ eine stetige Funktion der positiven Zahl ϱ ist, wird auch $\operatorname{Ln} z$ eine *stetige* Funktion von z, *abgesehen von* $z = 0$, sobald man überdies von der additiven Konstanten $2ik\pi$ in (1) absieht. Insbesondere ist der *Hauptwert* (2) des Logarithmus eine stetige Funktion für alle Stellen z, abgesehen von den Stellen der negativen reellen Achse, weil die Amplitude ω wegen der Beschränkung auf den Bereich von $-\pi$ bis $+\pi$ um 2π wächst oder abnimmt, sobald die Stelle z die negative reelle Achse überschreitet.

Sind ϱ_1, ϱ_2 und ω_1, ω_2 die absoluten Beträge und Amplituden zweier Zahlen z_1 und z_2, so ist nach (1):

$$\operatorname{Ln} z_1 + \operatorname{Ln} z_2 = \ln(\varrho_1 \varrho_2) + i[\omega_1 + \omega_2 + 2(k_1 + k_2)\pi].$$

Andererseits hat $z_1 z_2$ nach Nr. 356 den absoluten Betrag $\varrho_1 \varrho_2$ und die Amplitude $\omega_1 + \omega_2$, so daß folgt:

$$\operatorname{Ln}(z_1 z_2) = \operatorname{Ln} z_1 + \operatorname{Ln} z_2 + 2ik'\pi, \tag{3}$$

wo k' eine ganze Zahl ist. Der Satz über den *Logarithmus eines Produktes* gilt also auch jetzt, wenn man von den additiven ganzen Vielfachen von $2i\pi$ absieht. Ebenso der Satz über den *Logarithmus eines Bruches.*

Wir wollen nun beweisen, daß $\operatorname{Ln} z$ eine bestimmte endliche Ableitung hat. Zu diesem Zwecke betrachten wir die Werte des Logarithmus für zwei Numeri z und $z + \Delta z$ und bilden nach Nr. 368 den Bruch:

$$\frac{\operatorname{Ln}(z + \Delta z) - \operatorname{Ln} z}{\Delta z} \quad \text{oder} \quad \frac{\operatorname{Ln}\left(1 + \frac{\Delta z}{z}\right)}{\Delta z}.$$

Da Δz zur Grenze Null und der Zähler auch zur Grenze Null übergehen soll, so nehmen wir bei der Definition der Logarithmen von $z + \Delta z$ und von z durch (1) beide Male *dieselbe ganze Zahl* k an, so daß als Zähler des letzten Bruches der Hauptwert des Logarithmus zu benutzen ist. Setzen wir $\Delta z : z = \zeta$, so wird nun:

$$\lim_{\Delta z = 0} \frac{\operatorname{Ln}(z + \Delta z) - \operatorname{Ln} z}{\Delta z} = \frac{1}{z} \lim_{\zeta = 0} \frac{\operatorname{Ln}(1 + \zeta)}{\zeta}.$$

Es seien σ und τ die absoluten Beträge, dagegen φ und ψ die Amplituden von ζ und $1+\zeta$. Dann kommt nach (2):

$$\operatorname{Ln}(1+\zeta) = \ln \tau + i\psi, \text{ wobei } \zeta = \sigma(\cos\varphi + i \sin\varphi)$$

ist. Da ζ zur Grenze Null übergehen soll, muß σ auch zu Null werden. Folglich haben wir:

$$(4)\quad \lim_{\Delta z=0} \frac{\operatorname{Ln}(z+\Delta z) - \operatorname{Ln} z}{\Delta z} = \frac{1}{z(\cos\varphi + i\sin\varphi)} \left(\lim_{\sigma=0} \frac{\ln \tau}{\sigma} + i \lim_{\sigma=0} \frac{\psi}{\sigma} \right).$$

Nun ist aber:

$$\tau \cos\psi = 1 + \sigma\cos\varphi, \quad \tau\sin\psi = \sigma\sin\varphi,$$

also:

$$\tau = \sqrt{1 + 2\sigma\cos\varphi + \sigma^2}, \quad \psi = \operatorname{arc\,tg} \frac{\sigma\sin\varphi}{1+\sigma\cos\varphi},$$

wo die Wurzel das Pluszeichen hat und ψ zwischen $-\pi$ und $+\pi$ liegt. Nach Satz 25 in Nr. 129 ist folglich:

$$\lim_{\sigma=0} \frac{\ln\tau}{\sigma} = \tfrac{1}{2} \lim_{\sigma=0} \frac{\ln(1+2\sigma\cos\varphi+\sigma^2)}{\sigma} = \cos\varphi,$$

$$\lim_{\sigma=0} \frac{\psi}{\sigma} = \lim_{\sigma=0} \frac{1}{\sigma} \operatorname{arc\,tg} \frac{\sigma\sin\varphi}{1+\sigma\cos\varphi} = \sin\varphi.$$

Mithin gibt (4):

$$\lim_{\Delta z=0} \frac{\operatorname{Ln}(z+\Delta z) - \operatorname{Ln} z}{\Delta z} = \frac{1}{z}.$$

Daher hat $\operatorname{Ln} z$ *an jeder Stelle außer* $z = 0$ *die Ableitung* $1:z$. Hierbei ist jedoch vorausgesetzt, daß bei der Bildung des Differenzenquotienten für zwei benachbarte Stellen z und $z+\Delta z$ die beiden Amplituden $\omega + 2k\pi$ in (1) so gewählt seien, daß sie für $\lim \Delta z = 0$ zusammenfallen.

377. Die zyklometrischen Funktionen. Diese Funktionen definieren wir wie in Nr. 12 auch im Bereiche der komplexen Veränderlichen als die inversen der goniometrischen Funktionen. Wenn wir sie zur Unterscheidung von den früheren mit großem Anfangsbuchstaben schreiben, so soll also z. B. $\operatorname{Arc\,sin} z$ eine solche komplexe Zahl w sein, für die $\sin w = z$ ist. Wie in Nr. 12 zeigt sich, daß die zyklometrischen Funktionen erst durch Einschränkung auf passende Bereiche einwertig gemacht werden. Wir wollen im Einzelnen hierauf nicht eingehen und nur auf einen Zusammenhang zwischen dem

Logarithmus und dem Arkustangens aufmerksam machen. Nach (1) in Nr. 375 ist:

$$e^{2iz} = \frac{1 + i \operatorname{tg} z}{1 - i \operatorname{tg} z}.$$

Setzen wir $\operatorname{tg} z = w$, also $z = \operatorname{Arc} \operatorname{tg} w$, so ergibt sich durch Logarithmieren:

$$(1) \qquad \operatorname{Arc} \operatorname{tg} w = \frac{1}{2i} \operatorname{Ln} \frac{1 + iw}{1 - iw}.$$

Wenn wir hierin $w = i(1 - z) : (1 + z)$ einführen, so kommt

$$(2) \qquad \operatorname{Ln} z = 2i \operatorname{Arc} \operatorname{tg} \frac{i(1 - z)}{1 + z}.$$

Der Arkustangens bzw. Logarithmus einer *reellen* Zahl z läßt sich hiernach insbesondere durch den Logarithmus bzw. Arkustangens einer komplexen Zahl darstellen.

378. Folgerungen aus dem Fundamentalsatze der Algebra. Ist $f(z)$ eine *ganze rationale Funktion* n^{ten} *Grades* von z, also nach Nr. 366 von der Form:

$$(1) \qquad f(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots + c_n z^n,$$

so gilt nach *Gauß* der Satz, daß es wenigstens einen Wert von z gibt, für den die Funktion $f(z)$ gleich Null wird, vorausgesetzt, daß $n > 0$ ist. Dieser *Fundamentalsatz der Algebra* soll erst im zweiten Bande gelegentlich bewiesen werden; wir sind aber genötigt, ihn schon vorher öfters anzuwenden.

Ist z_1 ein Wert von z, für den die Funktion verschwindet, so läßt sich ein einfacher Schluß ziehen: Da $z = (z - z_1) + z_1$ ist, so können wir $f(z)$ durch Umrechnen auf eine solche Form bringen:

$$f(z) = \gamma_0 + \gamma_1 (z - z_1) + \gamma_2 (z - z_1)^2 + \cdots + \gamma_n (z - z_1)^n.$$

Wegen $f(z_1) = 0$ muß nun $\gamma_0 = 0$ sein, so daß sich $z - z_1$ herausheben läßt:

$$f(z) = (z - z_1)[\gamma_1 + \gamma_2 (z - z_1) + \cdots + \gamma_n (z - z_1)^{n-1}].$$

Man sieht also, daß, sobald z_1 eine sogenannte *Nullstelle* der ganzen rationalen Funktion $f(z)$ vom n^{ten} Grade ist, d. h. sobald $f(z_1)$ verschwindet, die Funktion als Produkt von $z - z_1$ mit einer ganzen rationalen Funktion $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades darstellbar ist. Die ganze rationale Funktion $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades

hat nun, wenn $n > 1$ ist, nach dem Fundamentalsatze ebenfalls mindestens eine Nullstelle z_2 und läßt sich folglich analog behandeln, usw. Schließlich ergibt sich, *daß die ganze rationale Funktion n^{ten} Grades von z die allgemeine Form hat:*

$$f(z) = c_n(z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_n).$$

Da ein Produkt nur dann gleich Null ist, wenn einer der Faktoren verschwindet, siehe Nr. 354, so *hat $f(z)$ gerade und nur die Nullstellen $z_1, z_2, \cdots z_n$.* Sie können aber teilweise oder ganz zusammenfallen. Ist z. B. $z_1 = z_2 = \cdots = z_m$, sind aber alle anderen Nullstellen von z_1 verschieden, so heißt z_1 eine *m-fache Nullstelle der Funktion $f(z)$* oder eine *m-fache Wurzel der Gleichung $f(z) = 0$.* Alsdann ist $f(z)$ darstellbar in der Form:

$$f(z) = (z - z_1)^m \varphi(z),$$

wo $\varphi(z)$ eine solche ganze rationale Funktion $(n-m)^{ten}$ Grades bedeutet, die für $z = z_1$ *nicht* verschwindet. Hieraus folgt (vgl. Nr. 368):

$$\begin{aligned} f'(z) &= m(z - z_1)^{m-1}\varphi(z) + (z - z_1)^m \varphi'(z) \\ &= (z - z_1)^{m-1}[m\varphi(z) + (z - z_1)\varphi'(z)]. \end{aligned}$$

Der Inhalt der eckigen Klammer reduziert sich für $z = z_1$ auf $m\varphi(z_1) \neq 0$. *Also hat $f'(z)$ die gerade $(m-1)$-fache Nullstelle z_1.* Ebenso folgt, daß z_1 für $f''(z)$ eine gerade $(m-2)$-fache Nullstelle ist, usw.

Satz 22: Ist z_1 eine gerade m-fache Nullstelle einer ganzen rationalen Funktion $f(z)$, so ist z_1 eine gerade $(m-1)$-fache Nullstelle von $f'(z)$, eine gerade $(m-2)$-fache Nullstelle von $f''(z)$ usw., eine einfache Nullstelle von $f^{(m-1)}(z)$, dagegen keine Nullstelle von $f^{(m)}(z)$.

Wenn insbesondere alle Koeffizienten $c_0, c_1, c_2, \cdots c_n$ der ganzen rationalen Funktion (1) *reell* sind, so wollen wir uns vorstellen, es sei darin $z = x + iy$ eingesetzt und alles ausmultipliziert worden. Wenn dann die reellen Glieder von den rein imaginären Gliedern getrennt werden, möge sich ergeben:

$$f(x + iy) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y). \tag{2}$$

Es leuchtet, da $i^2 = -1$ ist, sofort ein, daß auch die Formel:

$$f(x - iy) = \varphi(x, y) - i\psi(x, y) \tag{3}$$

gilt. Ist nun insbesondere $z_1 = x_1 + iy_1$ eine Nullstelle von $f(z)$, so sind nach (2) einzeln $\varphi(x_1, y_1)$ und $\psi(x_1, y_1)$ gleich Null. Demnach wird auch die rechte Seite von (3) gleich Null für $x = x_1$ und $y = y_1$, daher $f(x_1 - iy_1) = 0$. Also ergibt sich (vgl. Nr. 355):

Satz 23: Sind die Koeffizienten $c_0, c_1, c_2, \dots c_n$ der ganzen rationalen Funktion

$$f(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots + c_n z^n$$

sämtlich reell und ist $x_1 + iy_1$ eine Nullstelle der Funktion, so ist auch die zu $x_1 + iy_1$ konjugiert komplexe Zahl $x_1 - iy_1$ eine Nullstelle der Funktion.

Dieser Satz gilt nun auch für mehrfache Nullstellen von $f(z)$. Es sei nämlich $x_1 + iy_1$ eine gerade m-fache Nullstelle von $f(z)$; die Koeffizienten von $f(z)$ seien wieder sämtlich reell. Nach unserem Satze ist alsdann auch $x_1 - iy_1$ eine Nullstelle. Also muß $f(z)$ durch das Produkt

$$(z - x_1 - iy_1)(z - x_1 + iy_1) \quad \text{oder} \quad (z - x_1)^2 + y_1^2$$

ohne Rest teilbar sein. Da dies Produkt *reell* ist, so bleibt nach der Division eine ganze rationale Funktion mit *lauter reellen* Koeffizienten übrig, deren Grad um zwei Einheiten kleiner als der von $f(z)$ ist. Diese Funktion hat nach Voraussetzung die gerade $(m - 1)$-fache Nullstelle $x_1 + iy_1$. Dasselbe Beweisverfahren lehrt, daß sie folglich abermals durch $(z - x_1)^2 + y_1^2$ teilbar ist, usw. So ergibt sich schließlich:

Satz 24: Sind die Koeffizienten einer ganzen rationalen Funktion von z sämtlich reell und ist $x_1 + iy_1$ eine gerade m-fache Nullstelle der Funktion, so ist auch die konjugiert komplexe Zahl $x_1 - iy_1$ eine gerade m-fache Nullstelle der Funktion.

379. Gebrochene rationale Funktionen. Darunter werden, indem man den in Nr. 6 aufgestellten Begriff auf den komplexen Bereich ausdehnt, Brüche $F(z) : f(z)$ aus ganzen rationalen Funktionen verstanden.

Ist z_1 eine gemeinsame Nullstelle von $F(z)$ und $f(z)$, so läßt sich $z - z_1$ nach Nr. 378 sowohl vom Zähler als auch vom Nenner absondern und daher fortheben. Dies gilt bezüglich aller gemeinsamen Nullstellen. *Das Fortheben kann auch dann ausgeführt werden, wenn man die gemeinsamen Null-*

stellen nicht kennt. Denn wenn zunächst F von mindestens so hohem Grade wie f ist, so liefert die *Partialdivision* $F:f$ eine ganze rationale Funktion h_1 und einen Rest:

$$F:f = h_1 + f_1 : f,$$

wo auch f_1 eine ganze rationale Funktion bedeutet. Ist F dagegen von niedrigerem Grade als f, so gilt dieselbe Formel, wenn nur $h_1 = 0$ und $f_1 = F$ gesetzt wird. In *jedem* Falle ist nun f_1 von niedrigerem Grade als f, so daß die Partialdivision des reziproken Bruches $f:f_1$ etwa liefert:

$$f:f_1 = h_2 + f_2 : f_1,$$

wo h_2 und f_2 ganze rationale Funktionen sind und f_2 von niedrigerem Grade als f_1 ist. Wir dividieren nun $f_1 : f_2$ usw. Schließlich muß, da der Grad des Restes immer kleiner wird, die Division einmal aufgehen. Dies sei etwa bei der m^{ten} Partialdivision der Fall, so daß sie gibt:

$$f_{m-2} : f_{m-1} = h_m.$$

Multiplizieren wir die m Formeln bzw. mit $f, f_1, \ldots f_{m-1}$, so kommt:

$$(1) \qquad \begin{cases} F = h_1 f + f_1, \\ f = h_2 f_1 + f_2, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ f_{m-3} = h_{m-1} f_{m-2} + f_{m-1}, \\ f_{m-2} = h_m f_{m-1}. \end{cases}$$

Ist nun z_1 eine Nullstelle von f_{m-1}, so zeigt die letzte Formel, daß z_1 auch eine Nullstelle von f_{m-2} ist, die vorletzte Formel also, daß z_1 auch eine Nullstelle von f_{m-3} ist, usw. Schließlich ergibt sich, daß z_1 eine Nullstelle von f und F ist. Jede Nullstelle von f_{m-1} ist mithin eine gemeinsame Nullstelle von f und F. Daher sind f und F durch f_{m-1} ohne Rest teilbar. Es mögen sich durch die Teilung die ganzen rationalen Funktionen g und G ergeben, so daß $F:f = G:g$ wird.

Wir behaupten nun, daß G und g keine gemeinsame Nullstelle mehr haben. In der Tat, sonst müßten F und f einen gemeinsamen Faktor φ haben, der eine ganze Funktion von höherem Grade als f_{m-1} wäre, aber f_{m-1} als Faktor enthielte. Nach der ersten Formel (1) wäre φ auch ein Faktor von f_1, nach der zweiten also auch ein Faktor von f_2, usw. Schließlich

würde sich ergeben, daß φ auch ein Faktor von f_{m-1} wäre, während doch f_{m-1} ein Faktor von φ sein sollte. Also muß φ notwendig dieselbe Funktion wie f_{m-1} sein, höchstens noch mit einer unwesentlichen Konstanten multipliziert.

Demnach gilt der

Satz 25: Jede gebrochene rationale Funktion läßt sich durch fortgesetzte Ausführung von Partialdivisionen auf eine solche Form bringen, in der Zähler und Nenner keine gemeinsame Nullstelle haben.

Alsdann sagt man, daß Zähler und Nenner *relativ prim* sind.

Wenn die gebrochene rationale Funktion schon in einer solchen Form $F(z):f(z)$ vorliegt, in der Zähler und Nenner relativ prime ganze rationale Funktionen sind, so ist sie, da sich F und f überall stetig verhalten, überall mit Ausnahme der Nullstellen des Nenners stetig. Diese Nullstellen des Nenners sind ihre *Unendlichkeitsstellen*, dagegen die Nullstellen des Zählers ihre *Nullstellen*.

380. Entwicklung einer gebrochenen rationalen Funktion. Es sei $F(z):f(z)$ eine gebrochene rationale Funktion, ferner seien F und f relativ prim und $z_1, z_2, \ldots z_n$ alle Nullstellen des Nenners. Alsdann läßt sich die Funktion in der Form darstellen:

$$\frac{F(z)}{f(z)} = \frac{F(z)}{a(z-z_1)(z-z_2)\cdots(z-z_n)}. \tag{1}$$

Sobald nun $z_1 \neq 0$ ist, können wir $z:z_1 = t$ setzen und den Bruch $1:(z-z_1)$ oder $-1:z_1(1-t)$ nach Potenzen von t entwickeln, denn für $|t| < 1$ ist nach Satz 1, Nr. 101:

$$\frac{1}{1-t} = 1 + t + t^2 + \cdots,$$

also auch:

$$\frac{1}{z-z_1} = -\frac{1}{z_1}(1 + t + t^2 + \cdots)$$

oder, wenn wieder t durch $z:z_1$ ersetzt wird, für $|z:z_1| < 1$:

$$\frac{1}{z-z_1} = -\frac{1}{z_1}\left(1 + \frac{z}{z_1} + \frac{z^2}{z_1{}^2} + \cdots\right).$$

Ist auch $|z:z_2| < 1$ usw., so gelten ebensolche Entwicklungen für $1:(z-z_2)$ usw. Da alle diese n Reihen nach Satz 17 in Nr. 110 miteinander multipliziert werden können, so ergibt sich nach (1) eine Darstellung der gebrochenen Funktion in der Form:

(2) $$\frac{F(z)}{f(z)} = F(z)\,(a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots)$$

unter den Bedingungen $|z : z_1| < 1$, $|z : z_2| < 1$ usw. Diese Bedingungen besagen, *daß die Darstellung* (2) *innerhalb desjenigen Kreises um den Nullpunkt O gilt, der durch die nächstgelegene Nullstelle des Nenners geht.* Da $F(z)$ selbst eine ganze rationale Funktion ist, so kann die rechte Seite von (2) ausmultipliziert werden, wodurch sich ergibt, daß die rationale gebrochene Funktion in der Form:

(3) $$\frac{F(z)}{f(z)} = b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \cdots$$

innerhalb des angegebenen Kreises als *analytische* Funktion von z darstellbar ist. Daß jener Kreis der *Konvergenzkreis* ist, die Reihe also darüber hinaus gewiß nicht die Funktion darstellen kann, folgt daraus, daß die gebrochene Funktion an der dem Nullpunkte am nächsten gelegenen Nullstelle des Nenners unendlich groß wird.

Die Darstellung (3) ist nach Nr. 372 nichts anderes als die *Maclaurinsche Entwicklung der gebrochenen rationalen Funktion.* Ihre Koeffizienten bestimmen sich also in der bekannten Weise; es ist nämlich, wenn wir $F(z) : f(z)$ mit $\Phi(z)$ bezeichnen:

(4) $$b_0 = \Phi(0), \quad b_1 = \frac{1}{1!}\left[\frac{d\Phi(z)}{dz}\right]_{z=0}, \quad b_2 = \frac{1}{2!}\left[\frac{d^2\Phi(z)}{dz^2}\right]_{z=0}, \cdots$$

Wir sahen ausdrücklich von dem Falle ab, wo der Nenner den Nullpunkt selbst zur Nullstelle hat. Ist nun etwa $z = 0$ eine m-fache Nullstelle des Nenners, so wird die mit z^m multiplizierte gebrochene Funktion $\Phi(z)$ frei von dieser Unendlichkeitsstelle. Also läßt sich $z^m \Phi(z)$ in der Form (3) entwickeln, so daß sich für $\Phi(z)$ selbst eine Darstellung ergibt von der Form:

(5) $$\Phi(z) = \frac{1}{z^m}(c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots),$$

wobei der Konvergenzkreis der Reihe wieder derjenige Kreis um den Nullpunkt ist, der durch die nächste, von $z = 0$ verschiedene Nullstelle des Nenners geht. Die Darstellung (5) gilt alsdann innerhalb des angegebenen Kreises *mit Ausnahme seines Mittelpunktes.*

Zwölftes Kapitel.

Theorie der Partialbruchzerlegung.

---

§ 1. Existenz der Partialbruchzerlegung.

381. Vorbemerkung. Die Zerlegung der gebrochenen rationalen Funktionen in gewisse Summen von einfacheren gebrochenen rationalen Funktionen ist für die Analysis von großer Bedeutung. Wir werden sie besonders in der Integralrechnung anzuwenden Gelegenheit haben. Daher soll ihre Theorie, die man die Theorie der *Partialbruchzerlegung* nennt, hier entwickelt werden.

Die unabhängige Veränderliche werden wir jetzt wieder mit x statt mit z bezeichnen; sie darf aber auch komplex sein. Nach Nr. 379 können wir annehmen, die vorgelegte gebrochene rationale Funktion $F(x):f(x)$ sei schon in einer solchen Form gegeben, in der die beiden ganzen rationalen Funktionen $F(x)$ und $f(x)$ *relativ prim* sind.

Wir werden zuerst beweisen, daß sich $F(x):f(x)$ als eine Summe darstellen läßt, deren Summanden Brüche mit konstanten Zählern sind, während die Nenner ganze positive Potenzen von ganzen linearen Funktionen sind. Dazu tritt, falls $F(x)$ von höherem Grade als $f(x)$ ist, eine additive ganze Funktion. Alsdann werden wir zeigen, daß es nur eine solche Zerlegung gibt, und schließlich die Wege zur wirklichen zahlenmäßigen Berechnung der Zerlegung erörtern.

382. Der grundlegende Satz. Der Satz, der die Grundlage für alles folgende bildet, lautet:

Satz 1: Sind $f(x)$ und $F(x)$ ganze rationale Funktionen und ist a eine gerade α-fache Nullstelle von $f(x)$, dagegen keine Nullstelle von $F(x)$, so läßt sich die gebrochene rationale Funktion $F(x):f(x)$ in dieser Art zerlegen:

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{A}{(x-a)^\alpha} + \frac{F_1(x)}{(x-a)^{\alpha-1} f_1(x)}.$$

Dabei bedeutet A eine von Null verschiedene Konstante, während $F_1(x)$ eine ganze rationale Funktion von um Eins niedrigerem Grade als $F(x)$ ist und $f_1(x)$ diejenige ganze rationale Funktion vorstellt, die durch die Division $f(x):(x-a)^\alpha$ hervorgeht.

Gibt nämlich die Division $f(x):(x-a)^\alpha$ die Funktion $f_1(x)$, so daß $f_1(x)$ die Nullstelle a *nicht* hat, also $f_1(a) \neq 0$ ist, so besteht für jeden Wert von x und A die Identität:

$$(1) \qquad \frac{F(x)}{f(x)} = \frac{F(x)}{(x-a)^\alpha f_1(x)} = \frac{A}{(x-a)^\alpha} + \frac{F(x) - A f_1(x)}{(x-a)^\alpha f_1(x)}.$$

Wir wählen nun eine Konstante A so, daß $F(x) - Af_1(x)$ die Nullstelle a bekommt, d. h. wir setzen:

$$(2) \qquad A = \frac{F(a)}{f_1(a)}.$$

Wegen $f_1(a) \neq 0$ ist A endlich; da $F(x)$ die Nullstelle a nicht hat, ist auch $F(a) \neq 0$, also $A \neq 0$. Weil jetzt $F(x) - Af_1(x)$ die Nullstelle a hat, geht die Division dieser Funktion mit $x - a$ nach Nr. 378 auf. Sie ergebe $F_1(x)$. Dann wird $F(x) - Af_1(x)$ gleich $(x-a)F_1(x)$. Setzen wir diesen Wert in den letzten Bruch in (1) ein, so hebt sich der Faktor $x-a$ einmal fort, und es geht die Formel des Satzes hervor.

383. Form der Partialbruchzerlegung. Wir beweisen nun den

Satz 2: Bedeutet $f(x)$ die Funktion:

$$f(x) = (x-a)^\alpha (x-b)^\beta \cdots (x-l)^\lambda,$$

in der $a, b, \ldots l$ voneinander verschiedene Konstanten und $\alpha, \beta, \ldots \lambda$ ganze positive Zahlen sind, und ist $F(x)$ eine solche ganze rationale Funktion, die $a, b, \ldots l$ nicht zu Nullstellen hat, so läßt sich die gebrochene rationale Funktion $F(x):f(x)$ in folgender Weise zerlegen:

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{A}{(x-a)^\alpha} + \frac{A_1}{(x-a)^{\alpha-1}} + \cdots + \frac{A_{\alpha-1}}{x-a}$$
$$+ \frac{B}{(x-b)^\beta} + \frac{B_1}{(x-b)^{\beta-1}} + \cdots + \frac{B_{\beta-1}}{x-b}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+ \frac{L}{(x-l)^\lambda} + \frac{L_1}{(x-l)^{\lambda-1}} + \cdots + \frac{L_{\lambda-1}}{x-l} + G(x).$$

Dabei bedeuten $A, A_1, \ldots A_{\alpha-1}, B, B_1, \ldots B_{\beta-1}, \ldots L, L_1, \ldots L_{\lambda-1}$ Konstanten, von denen $A, B, \ldots L$ sämtlich von Null verschieden sind, während $G(x)$ eine ganze rationale Funktion ist.

Setzen wir nämlich wie in voriger Nummer $f(x):(x-a)^\alpha = f_1(x)$, so ist nach Satz 1:

$$\text{(1)} \qquad \frac{F(x)}{(x-a)^\alpha f_1(x)} = \frac{A}{(x-a)^\alpha} + \frac{F_1(x)}{(x-a)^{\alpha-1} f_1(x)} \qquad (A \neq 0).$$

Es kann nun sein, daß $F_1(x)$ die Nullstelle a hat, so daß sich der Faktor $x-a$ im letzten Bruche noch einmal oder mehrere Male heben läßt. Ist es zunächst nicht der Fall, so kommt nach Satz 1 abermals:

$$\frac{F_1(x)}{(x-a)^{\alpha-1} f_1(x)} = \frac{A_1}{(x-a)^{\alpha-1}} + \frac{F_2(x)}{(x-a)^{\alpha-2} f_1(x)},$$

wo die Konstante $A_1 \neq 0$ ist. Hat dagegen $F_1(x)$ die Nullstelle a, so ergibt das Fortheben von $x-a$ aus dem letzten Bruche (1) dieselbe Formel, aber für $A_1 = 0$. Dieselben Schlüsse wiederholen sich, so daß wir erhalten:

$$\frac{F_2(x)}{(x-a)^{\alpha-2} f_1(x)} = \frac{A_2}{(x-a)^{\alpha-2}} + \frac{F_3(x)}{(x-a)^{\alpha-3} f_1(x)},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{F_{\alpha-1}(x)}{(x-a) f_1(x)} = \frac{A_{\alpha-1}}{x-a} + \frac{F_\alpha(x)}{f_1(x)}.$$

Hier bedeuten $F_1(x), F_2(x), \ldots F_\alpha(x)$ ganze rationale Funktionen, die im Grade um $1, 2, \ldots \alpha$ niedriger als $F(x)$ sind. Addition aller Gleichungen liefert:

$$\text{(2)} \qquad \frac{F(x)}{(x-a)^\alpha f_1(x)} = \frac{A}{(x-a)^\alpha} + \frac{A_1}{(x-a)^{\alpha-1}} + \cdots + \frac{A_{\alpha-1}}{x-a} + \frac{F_\alpha(x)}{f_1(x)},$$

wobei $A \neq 0$ ist. Der letzte Summand stellt eine gebrochene rationale Funktion vor, deren Nenner $f_1(x)$ die Nullstelle a

nicht mehr hat. Der Nenner hat aber nach Voraussetzung, da $f(x) = (x - a)^\alpha f_1(x)$ ist, die β-fache Nullstelle b und läßt sich deshalb in der Form $f_1(x) = (x - b)^\beta f_2(x)$ darstellen. Daher können wir auf den letzten Summanden in (2), der die Form

$$\frac{F_\alpha(x)}{(x - b)^\beta f_2(x)}$$

annimmt, dieselbe Betrachtung anwenden, usw. Dabei ist dann $f_3(x)$ das Ergebnis der Division von $f_2(x)$ mit $(x - c)^\gamma$ usw. Sind alle Nullstellen von $f(x)$ aufgebraucht, so bleibt als Nenner des letzten Summanden eine *Konstante* übrig, so daß in der Tat die Formel, wie es im Satze 2 angegeben ist, mit einer ganzen Funktion $G(x)$ endet.

Wegen der Anwendungen des Satzes 2 sei hervorgehoben, daß wir darin die Partialbruchzerlegung von $F(x) : f(x)$ für den Fall ausgeführt haben, wo die höchste Potenz von x in $f(x)$ gerade den Koeffizienten Eins hat. Diese Beschränkung läßt sich in jedem Falle leicht erreichen.

384. Nur eine Art der Partialbruchzerlegung. Nehmen wir unter denselben Voraussetzungen an, daß es noch eine zweite Partialbruchzerlegung wie die in Satz 2 gebe, so wollen wir die in ihr auftretenden Konstanten von denen in der Formel des Satzes durch angefügte Akzente unterscheiden und $G(x)$ durch $H(x)$ ersetzen. Dann muß, wenn wir nur das erste und letzte Glied andeuten, für alle Werte von x sein:

$$(1) \qquad \frac{A}{(x-a)^\alpha} + \cdots + G(x) = \frac{A'}{(x-a)^{\alpha'}} + \cdots + H(x).$$

Sind nun α und α' verschieden, ist also etwa $\alpha > \alpha'$, so setzen wir alle Glieder der Gleichung mit Ausnahme des ersten auf die rechte Seite und bringen alle Glieder rechts auf ihren gemeinsamen Hauptnenner. Da $x - a$ links in nicht höherer als der α^{ten} Potenz auftritt und $\alpha' < \alpha$ ist, ergibt sich so eine Formel:

$$\frac{A}{(x-a)^\alpha} = \frac{\varphi(x)}{(x-a)^{\alpha-1}\psi(x)}, \quad \text{d. h.} \quad A = \frac{(x-a)\,\varphi(x)}{\psi(x)},$$

wo $\varphi(x)$ und $\psi(x')$ ganze Funktionen sind und $\psi(x)$ *nicht* die Nullstelle a hat. Da aber A eine Konstante ist, so folgt,

wenn wir z. B. $x = a$ annehmen, daß $A = 0$ sein muß. Nach Satz 2 in Nr. 383 ist jedoch $A \neq 0$. Die Voraussetzung $\alpha > \alpha'$ war also falsch. Ebenso würde die Voraussetzung $\alpha' > \alpha$ die falsche Folgerung $A' = 0$ ergeben. Mithin ist $\alpha = \alpha'$. Wenn wir nun (1) mit $(x - a)^\alpha$ multiplizieren und dann $x = a$ setzen, so kommt $A = A'$. In (1) sind also die ersten Glieder rechts und links einander gleich. Sie können folglich gestrichen werden. Weil nun $A_1, A_2, \cdots$ und $A_1', A_2', \cdots$ vielleicht gleich Null sein können, wird die übrig bleibende Gleichung die Form haben:

$$\frac{A_i}{(x-a)^{\alpha-i}} + \cdots + G(x) = \frac{A_j'}{(x-a)^{\alpha-j}} + \cdots + H(x),$$

wo $A_i \neq 0$ und $A_j' \neq 0$ ist. Wir beweisen dann ebenso, daß $\alpha - i = \alpha - j$ und $A_i = A_j'$ ist, usw. Also müssen in (1) alle mit $x - a$ behafteten Glieder links und rechts übereinstimmen. Dasselbe gilt von den mit $x - b$ behafteten, usw. Schließlich bleibt $G(x) = H(x)$ übrig.

Somit ist bewiesen:

Satz 3: Wenn $a, b, \cdots l$ die voneinander verschiedenen Nullstellen der ganzen rationalen Funktion $f(x)$ sind und $F(x)$ eine solche ganze rationale Funktion ist, die $a, b, \cdots l$ nicht zu Nullstellen hat, so gibt es nur eine Partialbruchzerlegung von $F(x):f(x)$ als Summe aus einer ganzen Funktion $G(x)$ und solchen Brüchen, deren Zähler Konstanten und deren Nenner ganze positive Potenzen von $x - a, x - b, \cdots x - l$ sind.

Außerdem lehrt die Zerlegung in Satz 2 der vorigen Nummer:

Satz 4: Die ganze Funktion $G(x)$, die bei der in Satz 2 der Nr. 383 angegebenen Partialbruchzerlegung von $F(x):f(x)$ übrig bleibt, ist dieselbe, die sich bei der Partialdivision von $F(x)$ durch $f(x)$ als ganze Funktion, abgesehen von dem Reste, ergibt.

§ 2. Ausführung der Partialbruchzerlegung.

385. Zerlegung für den Fall lauter einfacher Nullstellen. Wir behalten die früheren Bezeichnungen bei, nehmen aber jetzt an, $f(x)$ habe nur *einfache* Nullstellen $a, b, \cdots l$,

so daß $\alpha = \beta = \cdots = \lambda = 1$ ist. Dann gibt Satz 2 in Nr. 383 eine Zerlegung von der Form:

$$(1) \qquad \frac{F(x)}{f(x)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \cdots + \frac{L}{x-l} + G(x),$$

wobei $A, B, \cdots L$ von Null verschiedene Konstanten sind und $G(x)$ eine ganze rationale Funktion bedeutet. Nach dem letzten Satze wird $G(x)$ durch Ausführung der Partialdivision $F(x):f(x)$ gewonnen. Ist $F(x)$ von niedrigerem Grade als $f(x)$, so wird also $G(x)$ gleich Null.

Es handelt sich jetzt nur noch darum, zu zeigen, wie man die Konstanten $A, B, \cdots L$ zu berechnen vermag.

Nach (2) in Nr. 382 haben wir:

$$A = \frac{F(a)}{f_1(a)},$$

wenn $f_1(x) = f(x) : (x-a)$ ist. Da dann $f(x) = (x-a)f_1(x)$ wird, ergibt sich durch Differentiation:

$$f'(x) = f_1(x) + (x-a)f_1'(x),$$

also für $x = a$:

$$f'(a) = f_1(a).$$

Mithin ist $A = F(a) : f'(a)$. So ergibt sich überhaupt:

$$(2) \qquad A = \frac{F(a)}{f'(a)}, \quad B = \frac{F(b)}{f'(b)}, \cdots L = \frac{F(l)}{f'(l)}.$$

Hiermit sind $A, B, \cdots L$ berechnet. Setzen wir diese Werte in (1) ein, so folgt für alle Werte von x:

$$(3) \quad \frac{F(x)}{f(x)} = \frac{F(a)}{f'(a)(x-a)} + \frac{F(b)}{f'(b)(x-b)} + \cdots + \frac{F(l)}{f'(l)(x-l)} + G(x).$$

Praktischer ist aber die folgende Art der Berechnung: Ist $F(x)$ von mindestens ebenso hohem Grade wie $f(x)$, so sondere man zunächst durch Ausführung der Partialdivision:

$$\frac{F(x)}{f(x)} = G(x) + \frac{\Phi(x)}{f(x)}$$

die ganze rationale Funktion $G(x)$ ab, so daß $\Phi(x)$ eine ganze rationale Funktion von niedrigerem Grade als $f(x)$ wird. Nunmehr handelt es sich nur noch um die Bestimmung der Koeffizienten $A, B, \cdots L$ der Zerlegung:

$$\frac{\Phi(x)}{f(x)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \cdots + \frac{L}{x-l}.$$

Man multipliziert die Gleichung mit $x - a$, wodurch der in $f(x)$ auftretende Faktor $x - a$ fortfällt, und setzt alsdann $x = a$. Dadurch geht sofort der Wert von A hervor. Entsprechend ergeben sich die Werte von $B, \cdots L$.

386. Eine Folgerung. Wir bleiben bei der Betrachtung der letzten Nummer und nehmen an, daß die ganze Funktion $F(x)$ die Form habe:

$$F(x) = c_0 x^{n-1} + c_1 x^{n-2} + \cdots + c_{n-2} x + c_{n-1},$$

während $f(x)$ vom n^{ten} Grade sei. Da $F(x)$ dann vom *niedrigerem* Grade als $f(x)$ ist, wird $G(x)$ in der Formel (3) von Nr. 385 gleich Null. Multiplizieren wir nun die Formel mit $f(x)$, wobei die Divisionen $f(x):(x-a)$ usw. sämtlich aufgehen, weil $a, b, \cdots l$ die einfachen Nullstellen von $f(x)$ sind, so finden wir durch Gleichsetzen der Koeffizienten von x^{n-1} auf beiden Seiten:

$$c_0 = \gamma \left[\frac{F(a)}{f'(a)} + \frac{F(b)}{f'(b)} + \cdots + \frac{F(l)}{f'(l)}\right],$$

wobei γ den Koeffizienten der höchsten Potenz von x in $f(x)$, also den von x^n bedeutet. Wenn nun $c_0 = 0$ ist, also $F(x)$ im Grade mindestens zwei Einheiten niedriger als $f(x)$ ist, so folgt der bei algebraischen Untersuchungen oft nützliche

Satz 5: Hat die ganze rationale Funktion $f(x)$ nur einfache Nullstellen $a, b, \cdots l$, und bedeutet $F(x)$ eine ganze rationale Funktion, deren Grad um mindestens zwei Einheiten niedriger als der von $f(x)$ ist und die keine der Stellen $a, b, \cdots l$ zu Nullstellen hat, so gilt die Gleichung:

$$\frac{F(a)}{f'(a)} + \frac{F(b)}{f'(b)} + \cdots + \frac{F(l)}{f'(l)} = 0.$$

387. Erste Methode zur Berechnung der Partialbrüche. Wir wenden uns wieder zu dem allgemeinsten, in Nr. 383 betrachteten Falle zurück. Der grundlegende Satz 1 von Nr. 382 enthält zugleich eine Methode zur Ausführung der Zerlegung. Denn wenn wir wieder $f(x):(x-a)^\alpha = f_1(x)$ setzen, so kommt:

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{A}{(x-a)^\alpha} + \frac{F_1(x)}{(x-a)^{\alpha-1} f_1(x)}, \tag{1}$$

wobei, wie wir in Nr. 382 sahen:

$$A = \frac{F(a)}{f_1(a)}, \quad F_1(x) = \frac{F(x) - \frac{F(a)}{f_1(a)} f_1(x)}{x - a}$$

ist und der letzte Bruch mit $x - a$ gekürzt werden kann. Wenden wir denselben Satz 1 weiter auf den zweiten Bruch rechts in (1) an, so finden wir ebenso die anderen Konstanten. Aber in dem Falle, wo $f(x)$ nicht lauter einfache Nullstellen hat (vgl. Nr. 385), ist dies Verfahren doch ziemlich umständlich.

388. Zweite Methode zur Berechnung der Partialbrüche. Man kann auch die sogenannte *Methode der unbestimmten Koeffizienten* benutzen, d. h. die Konstanten durch Koeffizientenvergleichung auf beiden Seiten der Gleichung des Satzes 2 in Nr. 383 berechnen. Wie in (2), Nr. 383, ist, indem wir für $f_1(x)$ wieder $f(x) : (x-a)^\alpha$ schreiben, anzusetzen:

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{A}{(x-a)^\alpha} + \frac{A_1}{(x-a)^{\alpha-1}} + \cdots + \frac{A_{\alpha-1}}{x-a} + \frac{(x-a)^\alpha F_\alpha(x)}{f(x)}.$$

Multiplizieren wir diese Gleichung mit $f(x)$ und ersetzen wir x durch $a + h$, so kommt:

$$(1) \quad F(a+h) = A\frac{f(a+h)}{h^\alpha} + A_1\frac{f(a+h)}{h^{\alpha-1}} + \cdots + A_{\alpha-1}\frac{f(a+h)}{h} + h^\alpha F_\alpha(a+h).$$

Nun gibt die Taylorsche Formel:

$$(2) \qquad F(a+h) = F(a) + \frac{h}{1!}F'(a) + \frac{h^2}{2!}F''(a) + \cdots,$$

$$f(a+h) = f(a) + \frac{h}{1!}f'(a) + \frac{h^2}{2!}f''(a) + \cdots.$$

Diese Entwicklungen sind endlich, da F und f ganze rationale Funktionen von h sind. Weil a eine α-fache Nullstelle von $f(x)$ bedeutet, ist außerdem $f(a) = 0$, $f'(a) = 0, \cdots f^{(\alpha-1)}(a) = 0$ nach Satz 22 in Nr. 378, so daß kommt:

$$(3) \qquad f(a+h) = \frac{h^\alpha}{\alpha!}f^{(\alpha)}(a) + \frac{h^{\alpha+1}}{(\alpha+1)!}f^{(\alpha+1)}(a) + \cdots$$

Setzen wir die Werte (2) und (3) in (1) ein, so ergibt sich für jeden Wert von h:

$$F(a)+\frac{h}{1!}F'(a)+\frac{h^2}{2!}F''(a)+\cdots+\frac{h^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!}F^{(\alpha-1)}(a)+\cdots$$
$$=A\left[\frac{1}{\alpha!}f^{(\alpha)}(a)+\frac{h}{(\alpha+1)!}f^{(\alpha+1)}(a)+\cdots\right]$$
$$+A_1\left[\frac{h}{\alpha!}f^{(\alpha)}(a)+\frac{h^2}{(\alpha+1)!}f^{(\alpha+1)}(a)+\cdots\right]$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+A_{\alpha-1}\left[\frac{h^{\alpha-1}}{\alpha!}f^{(\alpha)}(a)+\frac{h^\alpha}{(\alpha+1)!}f^{(\alpha+1)}(a)+\cdots\right]+h^\alpha F_\alpha(a+h).$$

Das letzte Glied enthält nur solche Potenzen von h, die von höherem als $(\alpha-1)^{\text{tem}}$ Grade sind. Die Vergleichung der Koeffizienten entsprechender Potenzen von h auf beiden Seiten bis zu $h^{\alpha-1}$ liefert nun:

$$F(a)=\frac{A}{\alpha!}f^{(\alpha)}(a),$$
$$\frac{1}{1!}F'(a)=\frac{A}{(\alpha+1)!}f^{(\alpha+1)}(a)+\frac{A_1}{\alpha!}f^{(\alpha)}(a),$$
$$\frac{1}{2!}F''(a)=\frac{A}{(\alpha+2)!}f^{(\alpha+2)}(a)+\frac{A_1}{(\alpha+1)!}f^{(\alpha+1)}(a)+\frac{A_2}{\alpha!}f^{(\alpha)}(a),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{1}{(\alpha-1)!}F^{(\alpha-1)}(a)=\frac{A}{(2\alpha-1)!}f^{(2\alpha-1)}(a)+\frac{A_1}{(2\alpha-2)!}f^{(2\alpha-2)}(a)+\cdots$$
$$\cdots+\frac{A_{\alpha-1}}{\alpha!}f^{(\alpha)}(a).$$

Aus der ersten Gleichung geht der Wert von A, alsdann aus der zweiten der von A_1, aus der dritten der von A_2 usw., schließlich aus der letzten der von $A_{\alpha-1}$ hervor, denn der Koeffizient $f^{(\alpha)}(a)$ ist nach Satz 22 in Nr. 378 von Null verschieden.

Man kann auch in der in Satz 2, Nr. 383, angegebenen Entwicklung zunächst die ganze Funktion $G(x)$ durch Partialdivision (vgl. Satz 4 in Nr. 384) ermitteln und darauf alle Nenner durch Multiplikation mit $(x-a)^\alpha(x-b)^\beta\cdots(x-l)^\lambda$ entfernen. Schließlich vergleicht man dann die Koeffizienten gleich hoher Potenzen von x auf beiden Seiten, wodurch sich lineare Gleichungen für die unbekannten Konstanten $A, A_1, \cdots A_{\alpha-1}, \cdots L, L_1, \cdots L_{\lambda-1}$ ergeben.

389. Dritte Methode zur Berechnung der Partialbrüche. Endlich kann man die konstanten Zähler der Partialbrüche auch durch ein Verfahren gewinnen, das nur Partialdivisionen erfordert. Setzen wir nämlich wieder $(x-a)^\alpha f_1(x)$ für $f(x)$ und $a+h$ statt x, so gibt die Gleichung (1) der vorigen Nummer:

$$\frac{F(a+h)}{f_1(a+h)} = A + A_1 h + A_2 h^2 + \cdots + A_{\alpha-1} h^{\alpha-1} + \frac{h^\alpha F_\alpha(a+h)}{f_1(a+h)}.$$

Ordnen wir $F(a+h)$ und $f_1(a+h)$ nach steigenden Potenzen von h und dividieren wir dann $F(a+h)$ mit $f_1(a+h)$, bis ein Rest vom mindestens α^{ten} Grade bleibt, so muß der bis dahin erhaltene Quotient gerade der Ausdruck

$$A + A_1 h + A_2 h^2 + \cdots + A_{\alpha-1} h^{\alpha-1}$$

sein. Ebenso bestimmt man die zu den Nullstellen $\beta, \gamma, \cdots \lambda$ gehörigen Konstanten. Es wird jedoch einfacher sein, um $B, B_1, \cdots B_{\beta-1}$ zu finden, das nämliche Verfahren auf die Brüche $F_\alpha(a+h) : f_1(a+h)$ usw. anzuwenden.

390. Weitere Ausführung der dritten Methode. Die letzte Methode hat noch den Vorzug, für die Zähler der Partialbrüche zugleich ihren allgemeinen algebraischen Ausdruck zu liefern. Denn die Partialdivision von $F(a+h)$ mit $f_1(a+h)$ gibt die Entwicklung des Bruches nach den steigenden Potenzen von h und kann also auch nach der Taylorschen Formel gefunden werden. Bezeichnen wir $F(x) : f_1(x)$ mit $\varphi(x)$, so wird:

$$\frac{F(a+h)}{f_1(a+h)} = \varphi(a+h) =$$

$$\varphi(a) + \frac{h}{1!}\varphi'(a) + \cdots + \frac{h^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!}\varphi^{(\alpha-1)}(a) + h^\alpha R_1,$$

wo $h^\alpha R_1$ den Rest bedeutet. Es kommt also:

$$A = \varphi(a), \quad A_1 = \frac{\varphi'(a)}{1!}, \quad A_2 = \frac{\varphi''(a)}{2!}, \cdots A_{\alpha-1} = \frac{\varphi^{(\alpha-1)}(a)}{(\alpha-1)!}.$$

Dies liefert den

Satz 6: Ist $f(x) = (x-a)^\alpha (x-b)^\beta \cdots (x-l)^\lambda$, *wo* $a, b, \cdots l$ *voneinander verschieden und* $\alpha, \beta, \cdots \lambda$ *positive ganze Zahlen sind, ist ferner* $F(x)$ *eine ganze rationale Funktion, die keine der Stellen* $a, b, \cdots l$ *zu Nullstellen hat, gibt überdies die Partial-*

division von $F(x)$ durch $f(x)$ die ganze rationale Funktion $G(x)$ und wird endlich noch:

$$\varphi(x) = (x-a)^\alpha \frac{F(x)}{f(x)}, \quad \psi(x) = (x-b)^\beta \frac{F(x)}{f(x)}, \cdots \omega(x) = (x-l)^\lambda \frac{F(x)}{f(x)}$$

gesetzt, so ist:

$$\begin{aligned}\frac{F(x)}{f(x)} = G(x) &+ \frac{\varphi(a)}{(x-a)^\alpha} + \frac{\varphi'(a)}{1!\,(x-a)^{\alpha-1}} + \cdots + \frac{\varphi^{(\alpha-1)}(a)}{(\alpha-1)!\,(x-a)} \\ &+ \frac{\psi(b)}{(x-b)^\beta} + \frac{\psi'(b)}{1!\,(x-b)^{\beta-1}} + \cdots + \frac{\psi^{(\beta-1)}(b)}{(\beta-1)!\,(x-b)} \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &+ \frac{\omega(l)}{(x-l)^\lambda} + \frac{\omega'(l)}{1!\,(x-l)^{\lambda-1}} + \cdots + \frac{\omega^{(\lambda-1)}(l)}{(\lambda-1)!\,(x-l)}.\end{aligned}$$

391. Andere Darstellung der Partialbruchzerlegung. Man kann dem Ergebnisse eine sehr elegante und knappe Form geben. Es möge nämlich der bisher mit $F(x):f(x)$ bezeichnete Bruch jetzt durch $\Phi(x)$ ausgedrückt werden, so daß $\Phi(x)$ eine gebrochene rationale Funktion ist, deren Zähler und Nenner relativ prim sind. Die Nullstellen des Nenners wollen wir mit $x_1, x_2, \cdots x_\mu$ bezeichnen, und sie seien bzw. m_1-fach, m_2-fach, $\cdots$ $\cdots m_\mu$-fach. Zur Abkürzung werde wie vorhin:

$$\varphi(x) = (x-x_1)^{m_1}\Phi(x) \tag{1}$$

gesetzt. Dies ist der bisherige Ausdruck $F(x):f_1(x)$, der also für $x = x_1$ einen endlichen und von Null verschiedenen Wert hat. Nach dem letzten Satze ist die Summe der zur Nullstelle x_1 gehörigen Partialbrüche diese:

$$\sum_0^{m_1-1}{}_k \frac{\varphi^{(k)}(x_1)}{k!\,(x-x_1)^{m_1-k}},$$

worin natürlich $\varphi^{(0)}(x_1)$ die Funktion $\varphi(x_1)$ selbst bedeutet. Diese Summe ergibt sich auch, wenn wir in der folgenden Funktion von einer Hilfsgröße t:

$$\sum_0^{m_1-1}{}_k \frac{\varphi^{(k)}(x_1+t)}{k!\,(x-x_1-t)^{m_1-k}}$$

für t den Wert Null setzen

Nach Satz 6 in Nr. 71 liefert nun die $(m_1-1)^{\text{te}}$ Ableitung der Funktion $\varphi(x_1+t)\cdot(x-x_1-t)^{-1}$ nach t genau die soeben

angegebene Summe, aber multipliziert mit $(m_1 - 1)!$. Die letzte Summe wird mithin gleich:

$$\frac{1}{(m_1-1)!}\,\frac{d^{m_1-1}[\varphi(x_1+t):(x-x_1-t)]}{d t^{m_1-1}}.$$

Nach (1) ist $\varphi(x_1+t) = t^{m_1}\,\Phi(x_1+t)$, so daß also, wenn überdies $G(x)$ wie in Satz 6, Nr. 390, die bei der Partialbruchzerlegung übrig bleibende ganze Funktion ist, die Formel dieses Satzes so lautet:

$$(2)\quad \Phi(x) = G(x) + \sum_1^{\mu}{}_j^0 \frac{1}{(m_j-1)!}\,\frac{d^{m_j-1}[t^{m_j}\Phi(x_j+t):(x-x_j-t)]}{d t^{m_j-1}},$$

wobei sich die Summe über alle μ Nullstellen $x_1, x_2, \ldots x_\mu$ erstreckt und der Index 0 beim Summenzeichen andeutet, daß schließlich für t der Wert Null gesetzt werden soll.

392. Ausdruck für die auftretende ganze Funktion. Die in der letzten Formel (2) auftretende ganze Funktion $G(x)$ läßt sich ebenfalls durch Φ ausdrücken. Denn wir wissen, daß $G(x)$ diejenige ganze Funktion ist, die sich bei der Partialdivision der gebrochenen Funktion $\Phi(x)$ ergibt, so daß der Grad n von $G(x)$ gleich dem Überschuß des Grades des Zählers von $\Phi(x)$ über den Grad des Nenners von $\Phi(x)$ ist. Wird nun in der letzten Formel x durch $1:z$ ersetzt und die Gleichung mit z^n multipliziert, so kommt:

$$z^n\Phi\left(\frac{1}{z}\right) = z^n G\left(\frac{1}{z}\right) + z^{n+1}\sum_0^{\mu}{}_j^0 \frac{1}{(m_j-1)!}\,\frac{d^{m_j-1}[t^{m_j}\Phi(x_j+t):\{1-(x_j+t)z\}]}{d t^{m_j-1}}.$$

Da rechts in der Summe die Größe z nur in Nennern von Brüchen in der Form von Potenzen von $1-(x_j+t)z$ auftritt und diese Brüche nach ganzen positiven Potenzen von z entwickelt werden können, so sieht man: Wenn $z^n\Phi(1:z)$ in eine Reihe nach wachsenden positiven Potenzen von z entwickelt wird, muß die Summe aller derjenigen Glieder, deren Grad in z nicht höher als der n^{te} ist, gerade gleich $z^n G(1:z)$ sein. Denn man beachte, daß $G(1:z)$ eine ganze rationale Funktion n^{ten} Grades von $1:z$ bedeutet.

Die Entwicklung von $z^n\Phi(1:z)$ lautet aber:

$$\left[z^n\Phi\left(\frac{1}{z}\right)\right]_0 + \frac{z}{1!}\left[\frac{d}{dz}z^n\Phi\left(\frac{1}{z}\right)\right]_0 + \frac{z^2}{2!}\left[\frac{d^2}{dz^2}z^n\Phi\left(\frac{1}{z}\right)\right]_0 + \cdots,$$

wobei der Index 0 die Substitution $z=0$ andeuten soll. Statt z dürfen wir in den eckigen Klammern irgend ein anderes Zeichen, z. B. t, benutzen. Folglich ist:

$$z^n G\left(\frac{1}{z}\right)=\left[t^n \Phi\left(\frac{1}{t}\right)\right]_0+\frac{z}{1!}\left[\frac{d}{dt} t^n \Phi\left(\frac{1}{t}\right)\right]_0+\cdots+\frac{z^n}{n!}\left[\frac{d^n}{dt^n} t^n \Phi\left(\frac{1}{t}\right)\right]_0,$$

also, wenn wir wieder $1:z=x$ einführen und die Summe mittels eines Summenzeichens knapper zusammenfassen:

$$G(x)=\sum_0^n{}_k \frac{x^k}{(n-k)!}\left[\frac{d^{n-k}\left\{t^n \Phi\left(\frac{1}{t}\right)\right\}}{dt^{n-k}}\right]_{t=0}. \tag{1}$$

Diese Formel läßt sich noch anders schreiben. Will man nämlich $t^{n+k}\Phi(1:t)$ nach ganzen positiven Potenzen von t entwickeln, so kann man zunächst $t^n\Phi(1:t)$ entwickeln und dann das Ergebnis mit t^k multiplizieren. Daraus folgt, daß der Koeffizient von t^{n-k} in der Entwicklung von $t^n\Phi(1:t)$ derselbe sein muß wie der Koeffizient von t^n in der Entwicklung von $t^{n+k}\Phi(1:t)$. Es ist also:

$$\frac{1}{(n-k)!}\left[\frac{d^{n-k}\left\{t^n \Phi\left(\frac{1}{t}\right)\right\}}{dt^{n-k}}\right]_{t=0}=\frac{1}{n!}\left[\frac{d^n\left\{t^{n+k} \Phi\left(\frac{1}{t}\right)\right\}}{dt^n}\right]_{t=0},$$

was sich übrigens auch leicht direkt nachweisen läßt. Die Formel (1) geht demnach über in:

$$G(x)=\frac{1}{n!}\sum_0^n{}_k x^k\left[\frac{d^n\left\{t^{n+k} \Phi\left(\frac{1}{t}\right)\right\}}{dt^n}\right]_{t=0}$$

oder:

$$G(x)=\frac{1}{n!}\left[\frac{d^n}{dt^n} t^n \Phi\left(\frac{1}{t}\right)\left\{1+tx+t^2x^2+\cdots+t^nx^n\right\}\right]_{t=0}. \tag{2}$$

Hier dürfen wir in der geschweiften Klammer, ohne den Wert des ganzen Ausdrucks zu ändern, beliebig hohe ganze Potenzen von tx addieren, deren Grade größer als n sind, denn der Ausdruck

$$t^n \Phi\left(\frac{1}{t}\right)\cdot t^{n+i}x^{n+i} \tag{3}$$

ist eine Funktion von t, deren n^{te} Ableitung nach t für $t=0$

verschwindet. Denn weil $\Phi\left(\frac{1}{t}\right)$ eine gebrochene Funktion von t ist, deren Nenner einen um n Einheiten höheren Grad als der Zähler hat, so beginnt die Entwicklung der Funktion (3) nach t mit t^{n+i}, die Entwicklung ihres n^{ten} Differentialquotienten folglich mit t^i. Sie ist also gleich Null für $t = 0$, sobald $i = 1, 2, 3, \ldots$ ist.

Daher können wir (2) ersetzen durch:

$$G(x) = \frac{1}{n!}\left[\frac{d^n}{dt^n} t^n \Phi\left(\frac{1}{t}\right)\{1 + tx + t^2x^2 + \cdots\}\right]_{t=0},$$

wo jetzt in der geschweiften Klammer eine unendliche Reihe steht, die nach Satz 1 in Nr. 101 die Summe $1:(1-tx)$ hat, da ja $|tx|$ beliebig klein angenommen werden kann, weil schließlich $t = 0$ gesetzt werden soll.

Folglich ergibt sich schließlich:

$$G(x) = \frac{1}{n!}\left[\frac{d^n}{dt^n}\frac{t^n\Phi\left(\frac{1}{t}\right)}{1-tx}\right]_{t=0}.$$

393. Endgültige Darstellung der gesamten Partialbruchzerlegung. Wenn wir den zuletzt gefundenen Wert von $G(x)$ in die Formel (2) von Nr. 391 einsetzen, so gelangen wir zu einer vollständigen analytischen Darstellung der ganzen Partialbruchzerlegung der gebrochenen rationalen Funktion $\Phi(x)$, nämlich zu dem

Satz 7: Ist $\Phi(x)$ eine gebrochene rationale Funktion von x, deren Zähler im Grade um n Einheiten größer als der Nenner ist, und sind $x_1, x_2, \ldots x_\mu$ die Nullstellen des Nenners, die bzw. m_1-fach, m_2-fach, $\ldots$ m_μ-fach sind, während der Zähler keine dieser Stellen zu Nullstellen hat, so kann die Partialbruchzerlegung von $\Phi(x)$ in dieser Form dargestellt werden:

$$\Phi(x) = \left[\frac{1}{n!}\frac{d^n}{dt^n}\frac{t^n\Phi\left(\frac{1}{t}\right)}{1-tx} + \sum_1^{\mu}{}_j \frac{1}{(m_j-1)!}\frac{d^{m_j-1}}{dt^{m_j-1}}\frac{t^{m_j}\Phi(x_j+t)}{x-x_j-t}\right]_{t=0}.$$

Ist der Grad des Zählers von $\Phi(x)$ nicht größer als der des Nenners, so gilt dieselbe Formel; doch ist dann das erste Glied in der Klammer zu streichen.

§ 3. Anwendungen.

394. Vorbereitende Sätze. Die entwickelte Theorie gilt allgemein im Bereiche der komplexen Zahlen, bedarf aber, wenn man sich auf den Bereich der reellen Zahlen beschränken will, noch einer Ergänzung. Sind nämlich die Koeffizienten der gebrochenen rationalen Funktion sämtlich reell, so fordern wir eine solche Zerlegung der Funktion, in der überhaupt nur reelle Zahlen vorkommen. Die Schwierigkeit liegt dabei darin, daß unter den Nullstellen des Nenners komplexe Zahlen vorhanden sein können.

Ist z. B. $h+ik$ eine gerade m-fache Nullstelle des Nenners, so ist nach Satz 24 in Nr. 378 auch $h-ik$ eine gerade m-fache Nullstelle des Nenners, der daher die Faktoren

$$(x-h-ik)^m(x-h+ik)^m=[(x-h)^2+k^2]^m,$$

also die m^{te} Potenz einer *reellen* ganzen quadratischen Funktion enthält, die wir auf die Form x^2+px+q bringen können. Es gilt nun der

Satz 8: Liegt eine reelle gebrochene rationale Funktion $F(x):f(x)$ vor, deren Zähler und Nenner relativ prim sind, ist ferner x^2+px+q das reelle Produkt aus zwei konjugiert komplexen Faktoren des Nenners und tritt dieser Faktor x^2+px+q gerade in der m^{ten} Potenz auf, so daß der Nenner die Form:

$$f(x)=(x^2+px+q)^m f_1(x)$$

hat, wo $f_1(x)$ eine reelle ganze rationale Funktion bedeutet, so läßt sich die gebrochene Funktion auf eine solche Form:

$$\frac{F(x)}{f(x)}=\frac{Px+Q}{(x^2+px+q)^m}+\frac{F_1(x)}{(x^2+px+q)^{m-1}f_1(x)}$$

bringen, in der P und Q reelle Konstanten sind und $F_1(x)$ eine reelle ganze rationale Funktion ist.

Es gilt nämlich für jedes P und Q die Identität;

$$(1)\quad \frac{F(x)}{f(x)}=\frac{F(x)}{(x^2+px+q)^m f_1(x)}=\frac{Px+Q}{(x^2+px+q)^m}+\frac{F(x)-(Px+Q)f_1(x)}{(x^2+px+q)^m f_1(x)},$$

und man kann die reellen Konstanten P und Q so bestimmen, daß der Zähler des letzten Bruches durch x^2+px+q teilbar wird, d. h. daß er verschwindet, wenn man darin für x eine

der beiden konjugiert komplexen Nullstellen $h \pm ik$ von $x^2 + px + q$ setzt. Denn wir fordern:

$$F(h \pm ik) - [P(h \pm ik) + Q] f_1(h \pm ik) = 0.$$

Zerlegen wir nun $F(h \pm ik) : f_1(h \pm ik)$ in seinen reellen und rein imaginären Teil, bringen wir also diesen Bruch auf die Form $M \pm iN$, so wird $P(h \pm ik) + Q = M \pm iN$, daher einzeln $Ph + Q = M$ und $Pk = N$, so daß $P = N:k$ und $Q = (Mk - Nh):k$ die gesuchten Werte von P und Q sind. Da bei dieser Annahme der letzte Zähler in (1) durch $x^2 + px + q$ teilbar ist, bezeichnen wir das Ergebnis der Teilung mit $F_1(x)$ und gelangen so zu der Formel des Satzes.

Indem wir denselben Satz auf den letzten Bruch anwenden, der in der Formel des Satzes auftritt, und dasselbe Verfahren so oft wiederholen, bis alle Faktoren $x^2 + px + q$ aufgebraucht sind, gelangen wir zu dem

Satz 9: Liegt eine reelle gebrochene rationale Funktion $F(x) : f(x)$ vor, deren Zähler und Nenner relativ prim sind, ist ferner $x^2 + px + q$ das reelle Produkt aus zwei konjugiert komplexen Faktoren des Nenners und tritt dieser Faktor $x^2 + px + q$ gerade in der m^{ten} Potenz auf, so daß der Nenner die Form $(x^2 + px + q)^m f_1(x)$ hat, wo $f_1(x)$ eine reelle ganze rationale Funktion bedeutet, die weder den Faktor $x^2 + px + q$ noch auch einen seiner beiden imaginären linearen Faktoren enthält, so läßt sich die gebrochene Funktion auf eine solche Form:

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{Px + Q}{(x^2 + px + q)^m} + \frac{P_1 x + Q_1}{(x^2 + px + q)^{m-1}} + \cdots + \frac{P_{m-1} x + Q_{m-1}}{x^2 + px + q} + \frac{F_m(x)}{f_1(x)}$$

bringen, in der $P, Q, P_1, Q_1, \ldots P_{m-1}, Q_{m-1}$ reelle Konstanten sind und $F_m(x)$ eine reelle ganze rationale Funktion ist.

395. Die allgemeine reelle Partialbruchzerlegung. Verbindet man diesen Satz mit dem Satz 2 in Nr. 383, so gelangt man zu der folgenden allgemeinen *reellen* Zerlegung einer gebrochenen Funktion:

Satz 10: Ist $F(x) : f(x)$ eine reelle gebrochene rationale Funktion, deren Zähler und Nenner relativ prim sind, und ist

der Nenner in seine verschiedenen reellen linearen und quadratischen Faktoren zerlegt worden:

$$f(x) = (x-a)^\alpha \cdots (x-l)^\lambda (x^2+px+q)^m \cdots (x^2+rx+s)^n,$$

so gibt es eine reelle Zerlegung von der Form:

$$\begin{aligned}\frac{F(x)}{f(x)} = G(x) &+ \frac{A}{(x-a)^\alpha} + \frac{A_1}{(x-a)^{\alpha-1}} + \cdots + \frac{A_{\alpha-1}}{x-a} \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &+ \frac{L}{(x-l)^\lambda} + \frac{L_1}{(x-l)^{\lambda-1}} + \cdots + \frac{L_{\lambda-1}}{x-l} \\ &+ \frac{Px+Q}{(x^2+px+q)^m} + \frac{P_1x+Q_1}{(x^2+px+q)^{m-1}} + \cdots + \frac{P_{m-1}x+Q_{m-1}}{x^2+px+q} \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &+ \frac{Rx+S}{(x^2+rx+s)^n} + \frac{R_1x+S_1}{(x^2+rx+s)^{n-1}} + \cdots + \frac{R_{n-1}x+S_{n-1}}{x^2+rx+s},\end{aligned}$$

wobei $G(x)$ eine reelle ganze rationale Funktion bedeutet, die auch gleich Null sein kann, während die in den Zählern auftretenden Größen reelle Konstanten sind.

396. Nur eine Art der reellen Partialbruchzerlegung. Nach den Auseinandersetzungen in Nr. 384 können wir, um zu zeigen, daß es *nur eine* solche reelle Zerlegung gibt, voraussetzen, daß dies schon für diejenigen Partialbrüche bewiesen worden sei, die zu den linearen Faktoren $x-a, \cdots x-l$ gehören. Dasselbe zeigen wir nun auch für die übrigen Glieder der Entwicklung. Es möge also eine zweite Entwicklung wie die des Satzes 10 angenommen werden; wir bezeichnen in ihr die Konstanten mit denselben Buchstaben, aber mit Akzenten versehen, und setzen also statt m und n die Zeichen m' und n'. Wenn nun

$$(1) \qquad \frac{Px+Q}{(x^2+px+q)^m} \quad \text{und} \quad \frac{P'x+Q'}{(x^2+px+q)^{m'}}$$

die Glieder der beiden Entwicklungen sind, die im Nenner x^2+px+q in der höchsten Potenz enthalten, so sei etwa $m > m'$. Alsdann multiplizieren wir die Gleichung, die sich ergibt, wenn die eine Entwicklung der anderen gleichgesetzt wird, mit der m^{ten} Potenz von x^2+px+q Dann verschwinden alle Nenner mit x^2+px+q, aber alle Glieder enthalten

$x^2 + px + q$ als Faktor mit Ausnahme von $Px + Q$. Da die Formel für alle Werte von x gelten soll, so muß sie auch für die beiden Nullstellen $x = h \pm ik$ von $x^2 + px + q$ bestehen, für die alle Glieder mit Ausnahme von $Px + Q$ verschwinden, so daß $P(h \pm ik) + Q = 0$ sein muß, also $Ph + Q = 0$ und $Pk = 0$, weil P und Q reell sind. Wegen $k \neq 0$ ist mithin $P = 0$ und $Q = 0$, was der Voraussetzung widerspricht. Folglich kann nicht $m > m'$ sein. Ebenso kann auch nicht $m' > m$ sein. Also muß $m = m'$ sein.

Wenn wir nun wieder die ganze Gleichung mit der m^{ten} Potenz von $x^2 + px + q$ multiplizieren, so enthalten alle Glieder den Faktor $x^2 + px + q$, nur nicht die Glieder $Px + Q$ und $P'x + Q'$. Wird wieder $x = h \pm ik$ gesetzt, so bleibt also übrig:

$$P(h \pm ik) + Q = P'(h \pm ik) + Q',$$

d. h.:

$$(P - P')h + (Q - Q') = 0, \quad (P - P')k = 0,$$

woraus $P = P'$ und $Q = Q'$ folgt.

Hiernach können wir in der Formel, die durch Gleichsetzen der beiden Entwicklungen gewonnen wurde, die Glieder (1) auf beiden Seiten streichen. Dasselbe Verfahren lehrt dann, auf die übrig gebliebene Gleichung wiederholt angewandt, daß auch alle anderen Glieder rechts und links übereinstimmen.

Satz 11: Es gibt nur eine reelle Zerlegung einer gebrochenen rationalen Funktion in der in Satz 10, Nr. 395, angegebenen Form.

397. Methode zur Berechnung. Um die reelle Zerlegung wirklich zahlenmäßig auszuführen, wird man die ganze Funktion $G(x)$ und die zu den reellen Nullstellen des Nenners gehörigen Partialbrüche nach den in Nr. 385—393 angegebenen Methoden ausrechnen. Die Brüche, die zu den konjugiert komplexen Nullstellen des Nenners gehören, kann man dann nacheinander nach derjenigen Methode bestimmen, die beim Beweise des Satzes 8 in Nr. 394 angewandt wurde. Auch die Methode der unbestimmten Koeffizienten ist brauchbar.

Wenn insbesondere alle konjugiert komplexen Nullstellen des Nenners einfache Nullstellen sind, kann man die reelle Entwicklung auch so ableiten, daß man zuerst, ohne Rücksicht darauf, ob die Nullstellen reell oder komplex sind, die

allgemeine Entwicklung nach Nr. 385 aufstellt und dann jedesmal die beiden zu konjugiert komplexen Nullstellen gehörigen Brüche auf ihren gemeinsamen Nenner bringt. Sind nämlich $h \pm ik$ zwei einfache konjugiert komplexe Nullstellen des Nenners, so ergeben sich nach (3) in Nr. 385 in der Entwicklung die beiden Glieder:

$$(1) \qquad \frac{F(h+ik)}{f'(h+ik)(x-h-ik)} + \frac{F(h-ik)}{f'(h-ik)(x-h+ik)}.$$

Sind in $F(h+ik):f'(h+ik)$ die reellen Glieder von den rein imaginären getrennt worden, d. h. ist dieser Bruch auf die Form $A+iB$ gebracht worden, so hat $F(h-ik):f'(h-ik)$ die Form $A-iB$. Also ist die Summe (1) gleich:

$$\frac{A+iB}{x-h-ik} + \frac{A-iB}{x-h+ik} = \frac{2Ax-2(Ah+Bk)}{(x-h)^2+k^2}$$

und somit auf die verlangte reelle Form gebracht.

398. Die Interpolationsformel von Lagrange. Als Anhang erwähnen wir noch die Formel, mittels derer man die Aufgabe löst, diejenige *ganze rationale* Funktion von x vom höchstens n^{ten} Grade zu berechnen, die für $n+1$ *verschiedene gegebene* Werte $x_0, x_1, \ldots x_n$ von x die *gegebenen* Werte $u_0, u_1, \ldots u_n$ hat. Gäbe es *zwei* verschiedene derartige Funktionen $F(x)$ und $G(x)$ vom höchstens n^{ten} Grade, so wäre die Funktion $F(x)-G(x)$ für $x = x_0, x_1, \ldots x_n$ gleich Null, also für $n+1$ verschiedene Stellen, während sie doch vom höchstens n^{ten} Grade ist und mithin nur n verschiedene Nullstellen haben kann. Sicher kann es also höchstens *eine* Funktion von der verlangten Art geben.

Um zu zeigen, daß es eine gibt und welche Gestalt sie hat, setzen wir:

$$(1) \qquad f(x) = (x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n).$$

Alsdann kommt:

$$(2) \quad f'(x_k) = (x_k-x_0)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n).$$

Es ist $f(x)$ vom $(n+1)^{\text{ten}}$ Grade. Wenn nun $F(x)$ irgend eine ganze rationale Funktion vom höchstens n^{ten} Grade bedeutet, gibt es nach (3) in Nr. 385 eine Entwicklung von der Form:

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{F(x_0)}{f'(x_0)}\cdot\frac{1}{x-x_0} + \frac{F(x_1)}{f'(x_1)}\cdot\frac{1}{x-x_1} + \cdots + \frac{F(x_n)}{f'(x_n)}\cdot\frac{1}{x-x_n}.$$

Dabei wird vorausgesetzt, daß $F(x)$ keine der Stellen x_0, x_1, $\ldots x_n$ als Nullstelle hat. Multiplikation mit $f(x)$ gibt wegen (1) und (2), wenn noch:

$$F(x_0) = u_0, \quad F(x_1) = u_1, \cdots F(x_n) = u_n$$

gesetzt wird:

$$F(x) = u_0 \frac{(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\cdots(x_0-x_n)} + u_1 \frac{(x-x_0)(x-x_2)\cdots(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\cdots(x_1-x_n)} +$$
$$\cdots + u_n \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)\cdots(x_n-x_{n-1})}.$$

Hier liegt offenbar eine ganze rationale Funktion von höchstens n^{tem} Grade vor, die für $x = x_0$, $x_1, \ldots x_n$ die Werte u_0, $u_1, \ldots u_n$ hat, und nach dem Vorhergehenden ist es die *einzige* ganze rationale Funktion, die für die $n+1$ verschiedenen Werte $x_0, x_1, \ldots x_n$ von x die vorgeschriebenen Werte u_0, $u_1, \ldots u_n$ hat.

Diese Gleichung heißt die *Interpolationsformel von Lagrange.*

Sachregister.

Die Zahlen bedeuten nicht die Seiten, sondern die Nummern des Textes. In der Regel gehen unter ein und demselben Stichworte die allgemeineren Begriffe den spezielleren voran. Funktion ist mit Fkt. abgekürzt.

A.

H.

L.

M.

N.

O.

P.

S.

T.

V.

W.

Z.

Berichtigungen.

Seite 74, Zeile 1 von unten lies zuletzt: $\frac{u'}{u}$.
„ 155, „ 3 „ oben „ : mit statt von.
„ 372, „ 4 „ „ „ : *Hyperbel.*
„ 382, „ 13 „ „ ist das erste Komma zu streichen.
„ 397, „ 5 „ unten ist das Wort: hat zu streichen.

Abraham, Professor Dr. **M.,** Professor an der University of Illinois, Theorie der Elektrizität. 2 Bände.

I. Band. Einführung in die Maxwellsche Theorie der Elektrizität. Mit einem einleitenden Abschnitte über das Rechnen mit Vektorgrößen in der Physik. Von Dr. A. Föppl. 3. Auflage von Dr. M. Abraham. Mit 11 Figuren im Text. [XVIII u. 460 S.] gr. 8. 1907. In Leinwand geb. n. M. 12.—

II. — Elektromagnetische Theorie der Strahlung. Von Dr. M. Abraham. Mit 5 Figuren im Text. [X u. 404 S.] gr. 8. 1905. In Leinwand geb. n. M. 10.—

Baule, Dr. **Anton,** Professor an der Kgl. Forstakademie zu Münden, Lehrbuch der Vermessungskunde. 2. erweiterte und vielfach umgearbeitete Auflage. Mit 280 Figuren im Text. [VIII u. 471 S.] gr. 8. 1901. In biegsamen Leinwandband geb. n M. 8.80.

Blaschke, Regierungsrat Dr. **E.,** Professor an der k. k. Technischen Hochschule zu Wien, Vorlesungen über mathematische Statistik. Die Lehre von den statistischen Maßzahlen. Mit 17 Textfiguren und 5 Tafeln. [VIII u. 268 S.] gr. 8. 1906. In Leinwand geb. n. M. 7.40.

Bucherer, Dr. **A. H.,** Privatdozent an der Universität Bonn, mathematische Einführung in die Elektronentheorie. Mit 14 Figuren im Text. [IV u. 148 S.] gr. 8. 1904. In Leinwand geb. n. M. 3.20.

——— Elemente der Vektoranalysis. Mit Beispielen aus der theoretischen Physik. 2. Auflage. [VIII u. 103 S.] gr. 8. 1905. In Leinwand geb. n. M. 2.40.

Burkhardt, Dr. **H.,** Professor an der Universität Zürich, Vorlesungen über die Elemente der Differential- und Integralrechnung und ihre Anwendung zur Beschreibung von Naturerscheinungen. Mit 38 Figuren im Text. [XI u. 252 S.] gr. 8. 1907. In Leinwand geb. n. M. 6.—

Cantor, Geheimer Hofrat Dr. **M.,** politische Arithmetik oder die Arithmetik des täglichen Lebens. 2. Auflage. [X u. 155 S.] gr. 8. 1903. In Leinwand geb. n. M. 1.80.

Cesàro, Ernesto, Professor der Mathematik an der Kgl. Universität Neapel, elementares Lehrbuch der algebraischen Analysis und der Infinitesimalrechnung. Mit zahlreichen Übungsbeispielen. Nach einem Manuskript des Verfassers deutsch herausgegeben von Dr. G. Kowalewski, Professor an der Universität Bonn. Mit 97 Figuren im Text. [VI u. 894 S.] gr. 8. 1904. In Leinwand geb. n. M. 15.—

Czuber, Hofrat Dr. **Emanuel,** Professor an der k. k. Techn. Hochschule zu Wien, Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung. 2 Bände. 2. sorgfältig durchgesehene Auflage. gr. 8. 1906. In Leinwand geb. je n. M. 12.—
I. Band. Mit 115 Figuren im Text. [XIV u. 560 S.] — II. Band. Mit 87 Figuren im Text. [VIII u. 532 S.]

——— Einführung in die höhere Mathematik. [ca. 300 S.] gr. 8. In Leinwand geb. [Erscheint im September 1908.]

——— Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Anwendung auf Fehlerausgleichung, Statistik und Lebensversicherung. [XIV u. 594 S.] gr. 8. 1903. In Leinwand geb. n. M. 24.— [2. vermehrte Auflage unter der Presse.]

Durège, Dr. **H.,** weil. Professor an der Universität Prag, Elemente der Theorie der Funktionen einer komplexen veränderlichen Größe. In 5. Auflage neu bearbeitet von Dr. L. Maurer, Professor an der Universität Tübingen. Mit 41 Figuren im Text. [X u. 397 S.] gr. 8. 1906. geh. n. M. 9.—, in Leinwand geb. n. M. 10.—

——— Theorie der elliptischen Funktionen. In 5. Auflage neu bearbeitet von Dr. L. Maurer, Professor an der Universität Tübingen. Mit 36 Figuren im Text. [VIII u. 436 S.] gr. 8. 1908. geh. n. M. 10.—, in Leinwand geb. n. M. 11.—

Ebner, Dr. **F.,** Oberlehrer an der Kgl. Maschinenbauschule zu Einbeck, Leitfaden der technisch wichtigen Kurven. Mit 93 Figuren im Text. [VIII u. 197 S.] gr. 8. 1906. In Leinwand geb. n. *M.* 4.—

Eggert, Dr. **O.,** Professor an der Technischen Hochschhule zu Danzig, Einführung in die Geodäsie. Mit 237 Figuren im Text. [X u. 437 S.] gr. 8. 1907. In Leinwand geb. n. *M* 10.—

Enriques, F., Professor an der Universität Bologna, Vorlesungen über projektive Geometrie. Deutsche Ausgabe von Dr. phil. Hermann Fleischer in Königsberg i. Pr. Mit einem Einführungswort von F. Klein und 187 Figuren im Text. [XIV u. 374 S.] gr. 8. 1903. geh. n. *M.* 8.—, in Leinwand geb. n. *M.* 9.—

Felgentraeger, Dr. **W.,** Privatdozent an der Technischen Hochschule zu Charlottenburg, Theorie, Konstruktion und Gebrauch der feineren Hebelwage. Mit 125 Figuren im Text. [VI u. 310 S.] gr. 8. 1907. In Leinwand geb. n. *M.* 8.—

Ferraris, Galileo, wissenschaftliche Grundlagen der Elektrotechnik. Nach den Vorlesungen über Elektrotechnik, gehalten in dem R. Museo Industriale zu Turin. Deutsch herausgegeben von Dr. Leo Finzi, Privatdozent an der Kgl. Technischen Hochschule zu Aachen. Mit 161 Figuren im Text. [XII u. 358 S.] gr. 8. 1901. In Leinwand geb. n. *M.* 12.—

Fiedler, Dr. **W.,** vorm. Professor am Polytechnikum zu Zürich, die darstellende Geometrie in organischer Verbindung mit der Geometrie der Lage. Für Vorlesungen und zum Selbststudium. In 3 Teilen. gr. 8.

I. Teil. Die Methoden der darstellenden und die Elemente der projektivischen Geometrie. 4. Auflage. Mit zahlreichen Figuren im Text und auf 2 lithogr. Tafeln. [XXIV u. 431 S.] 1904. geh. n. *M.* 10.—, in Leinwand geb. n. *M.* 11.—

II. — Die darstellende Geometrie der krummen Linien und Flächen. 3. Auflage. Mit zahlreichen Figuren im Text und auf 16 lithogr. Tafeln. [XXXIII u. 560 S.] 1885. geh. n. *M.* 14.—, in Leinwand geb. n. *M.* 15.40.

III. — Die konstruierende und analytische Geometrie der Lage. 3. Auflage. Mit zahlreichen Figuren im Text und 1 lithogr. Tafel. [XXX u. 660 S.] 1888. geh. n. *M.* 16.—, in Leinwand geb. n. *M.* 17.40.

Föppl, Dr. **Aug.,** Professor an der Kgl. Technischen Hochschule zu München, Vorlesungen über technische Mechanik. In 6 Bänden. gr. 8. In Leinwand geb.

I. Band. Einführg. i. d. Mechanik. 3. Aufl. Mit 103 Figuren. [XVI u. 428 S.] 1905. n. *M.* 10.—
II. — Graphische Statik. 2. Aufl. Mit 176 Figuren. [XII u. 471 S.] 1903. n. *M.* 10.—
III. — Festigkeitslehre. 3. Aufl. Mit 83 Figuren. [XVI u. 434 S.] 1905 n. *M.* 10.—
IV. — Dynamik. 2. Aufl. Mit 69 Figuren. [XV u. 506 S.] 1901. n. *M.* 12.—
V. — Die wichtigsten Lehren der höheren Elastizitätstheorie. Mit 44 Figuren [XII u. 391 S.] 1907. n. *M.* 10.—
VI. — Die wichtigsten Lehren der höheren Dynamik. [In Vorbereitung.]

Fort, O., und **O. Schlömilch,** Lehrbuch der analytischen Geometrie. 2 Teile.

I. Teil: Analytische Geometrie der Ebene von O. Fort, weil. Professor am Kgl. Sächs. Polytechnikum zu Dresden. 7. Auflage besorgt von Dr. R. Heger, Professor an der Kgl. Technischen Hochschule zu Dresden. Mit Holzschnitten. [XVII u. 268 S.] gr. 8. 1904. geh. n. *M.* 4.—, in Leinwand geb. n. *M.* 4.80.

II. — Analytische Geometrie des Raumes von Dr. O. Schlömilch, weil. Kgl. S. Geh. Rat a. D. 6. Auflage von R. Heger in Dresden. Mit Holzschnitten. [VIII u. 338 S.] 1898. geh. n. *M.* 5.—, in Leinwand geb. n. *M.* 5.80.

Fuhrmann, Geheimer Hofrat Dr. **Arwed,** weiland Professor zu Dresden. Aufgaben aus der analytischen Mechanik. Übungsbuch und Literaturnachweis für Studierende der Mathematik, Physik, Technik usw. In 2 Teilen. gr. 8. geb.

Einzeln:

I. Teil: Aufgaben aus der analytischen Statik fester Körper. 3. verbesserte und vermehrte Auflage. Mit 34 Figuren im Text. [XII u. 206 S.] 1904. geb. n. *M.* 3.60.

II. — Aufgaben aus der analytischen Dynamik fester Körper. 2. verbesserte und vermehrte Auflage. Mit Figuren im Text. [VI u. 222 S.] 1882. geb. n. *M.* 4.20.

Gans, Dr. **R.,** Privatdozent an der Universität Tübingen, Einführung in die Vektoranalysis. Mit Anwendungen auf die mathematische Physik. Mit 31 Figuren im Text. [X u. 98 S] gr. 8. 1905. In Leinwand geb. n. ℳ 2.80.

Ganter, Dr. **H.,** Professor an der Kantonschule zu Aarau, und Dr. **F. Rudio,** Professor am Polytechnikum zu Zürich, die Elemente der analytischen Geometrie. Zum Gebrauch an höheren Lehranstalten sowie zum Selbststudium. Mit vielen Textfiguren und zahlreichen Übungsbeispielen. In 2 Teilen. gr. 8. In Leinwand geb. jeder Teil n. ℳ 3.—

I. Teil: Die analytische Geometrie der Ebene. 6. verbesserte Auflage. Mit 53 Figuren. [VIII u. 190 S.] 1906.
II. — Die analytische Geometrie des Raumes. 3. verbesserte Auflage. Mit 12 Figuren. [X u. 186 S.] 1901.

Genocchi, Dr. jur. **Angelo,** weil. Professor an der Universität Turin, Differentialrechnung und Grundzüge der Integralrechnung, herausgegeben von Guiseppe Peano. Autorisierte deutsche Übersetzung von Professor Dr. G. Bohlmann in Berlin und A. Schepp, weil. Oberleutnant a. D. in Wiesbaden. Mit einem Vorwort von Dr. A. Mayer, Professor an der Universität Leipzig. [VII u. 399 S.] gr. 8. 1899. In Leinwand geb. n. ℳ 12.—

Haimovici, E., Dipl.-Ingenieur in Leipzig, graphische Tabellen und graphisch dargestellte Formeln zur sofortigen Dimensionierung von Eisenbeton-Plattendecken resp. Plattenbalken bei beliebiger, aber wirtschaftlich-rationeller Ausnutzung der Materialien, Eisen und Beton, hinsichtlich ihrer Inanspruchnahme auf Zug resp. Druck. Aufgestellt in vollkommener Übereinstimmung mit den preußischen Ministerialbestimmungen vom 16. April 1904. Mit 5 Lichtdrucktafeln auf millimetriertem Grund 48/63 cm. [52 S.] gr. 8. 1906. In Leinwand geb. n. ℳ 15.—

Heffter, Dr. **L.,** Professor an der Universität Kiel, und Dr. **C. Koehler,** Professor an der Universität Heidelberg, Lehrbuch der analytischen Geometrie. In 2 Bänden.

I. Band. Geometrie in den Grundgebilden erster Stufe und in der Ebene. Mit 136 Figuren im Text. [XVI u. 526 S.] gr. 8. 1905. In Leinwand geb. n. ℳ 14.—
II. — Geometrie im Bündel und im Raume. [In Vorbereitung.]

Hering, K., Ingenieur in Darmstadt, das 200jährige Jubiläum der Dampfmaschine 1706—1906. Eine historisch-technisch-wirtschaftliche Betrachtung. Mit 13 Figuren im Text. [IV u. 58 S.] gr. 8. 1907. geh. n. ℳ 1.60.

Heun, Dr. **K.,** Professor an der Technischen Hochschule zu Karlsruhe, und **R. v. Mises,** Assistent an der k. k. Technischen Hochschule zu Brünn, die kinetischen Probleme der modernen Maschinenlehre. gr. 8. In Leinwand geb. [In Vorbereitung.]

Holzmüller, Professor Dr. **Gustav,** vorm. Direktor der Provinzialgewerbeschule zu Hagen i. W., die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung. 2 Teile. I. Teil, enthaltend die statischen Momente und Schwerpunktslagen, die Trägheits- und Zentrifugalmomente für die wichtigsten Querschnittsformen und Körper der technischen Mechanik in rechnender und graphischer Behandlung unter Berücksichtigung der Methoden von Nehls, Mohr, Culmann, Land und Reye. Mit 287 Figuren und zahlreichen Übungsaufgaben. [XI u. 340 S.] gr 8. 1897. In Leinwand geb. n. ℳ 5.—

Jahnke, Dr. **E.,** Professor an der Kgl. Bergakademie zu Berlin, Vorlesungen über die Vektorenrechnung mit Anwenduugen auf Geometrie, Mechanik und mathematische Physik. Mit 32 Figuren im Text. [XII u. 236 S.] gr. 8. 1905. In Leinwand geb. n. ℳ 5.60.

Jellet, John P., B. D., weil. Senior Fellow an dem Trinity College zu Dublin, die Theorie der Reibung. Deutsch bearbeitet von Geh. Rat. Dr. J. Lüroth, Professor an der Universität Freiburg i. Br., und A. Schepp, weil. Oberleutnant a. D. in Wiesbaden. Mit zahlreichen Figuren im Text. [X u. 239 S.] gr. 8. 1890. geh. n. ℳ 6.—

Perry, Dr. **John,** F. R. S., Professor der Mechanik und Mathematik am Royal College of Science zu London, höhere Analysis für Ingenieure. Autorisierte deutsche Bearbeitung von Dr. Robert Fricke, Professor an der Technischen Hochschule zu Braunschweig, und Fritz Süchting, Direktor des Städt. Elektrizitätswerkes zu Bremen. Mit 106 Figuren. [X u. 423 S.] gr. 8. 1902. In Leinwand geb. n. M. 12.—

——— angewandte Mechanik. Ein Lehrbuch für Studenten, welche Versuche anstellen und numerische und graphische Beispiele durcharbeiten wollen. Berechtigte deutsche Ausgabe von Ingenieur Rudolf Schick in Cöln. [ca. 35 Bog.] gr. 8. In Leinwand geb. [Erscheint im August 1908.]

Petit-Bois, G., Bergingenieur in José bei Herve, Tafeln unbestimmter Integrale. [XII u. 154 S.] 4. 1906. geh. n. M. 8.—

Repertorium der höheren Mathematik (Definitionen, Formeln, Theoreme, Literatur) von Dr. Ernst Pascal, ord. Professor an der Universität Neapel. Autorisierte deutsche Ausgabe von A. Schepp in Wiesbaden. 2. verbesserte Auflage. In 2 Teilen. 8. In Leinwand geb.

I. Teil: Die Analysis. Herausgegeben von Dr. P. Epstein, Privatdozent an der Universität Straßburg i. E.
II. — Die Geometrie Herausgegeben von Dr. H. E. Timerding, Professor an der Universität Straßburg i. E.

[Teil I erscheint Oktober 1908, Teil II Ostern 1909.]

Routh, Edward John, Sc. D., LL. D., F. R. S., usw., weiland Professor an der Universität Cambridge, die Dynamik der Systeme starrer Körper. In 2 Bänden mit zahlreichen Beispielen. Autorisierte deutsche Ausgabe von Adolf Schepp, weiland Oberleutnant a. D. in Wiesbaden. Mit einem Vorwort von F. Klein. gr. 8. 1898. In Leinwand geb. n. M. 24.—

I. Band: Die Elemente. Mit 57 Figuren im Text. [XII u. 472 S.] n. M. 10.—
II. — Die höhere Dynamik. Mit 38 Figuren im Text. [X u. 544 S.] n. M. 14.—

Salmon-Fiedler, analytische Geometrie des Raumes. Deutsch bearbeitet von Dr. Wilhelm Fiedler, Professor am Eidgenössischen Polytechnikum zu Zürich. 4. bzw. 3. verbesserte Auflage. 2 Teile. gr. 8. geh. n. M. 24.—, in Leinwand geb. n. M 26.40. Einzeln:

I. Teil: Die Elemente und die Theorie der Flächen zweiten Grades. 4. verbesserte Auflage. Mit Holzschnitten im Text. [XXXIV u. 448 S.] 1898. geh. n. M. 8.—, in Leinwand geb. M. 9.—
II. — Analytische Geometrie der Kurven im Raume und der algebraischen Flächen. 3. Auflage. Mit Holzschnitten im Text. [LXXII u. 686 S.] 1880. geh. n. M. 16.—, in Leinwand geb. M. 17.40.

——— analytische Geometrie der Kegelschnitte mit besonderer Berücksichtigung der neueren Methoden. Nach George Salmon frei bearbeitet von Dr. Wilhelm Fiedler, Professor am Eidgenössischen Polytechnikum zu Zürich. 2 Teile. gr. 8. In Leinwand geb. n. M. 19.—

Einzeln: I. Teil. 7. verbesserte Auflage. [XXXIV u. 444 S.] 1907. In Leinwand geb. n. M. 10.—
II. Teil. 6. Auflage. [XXIV u. S. 443—854.] 1903. geh. n. M. 8.—, in Leinwand geb. n. M. 9.—

——— analytische Geometrie der höheren ebenen Kurven. Deutsch bearbeitet von Dr. Wilhelm Fiedler, Professor am Eidgenössischen Polytechnikum zu Zürich. 2. verbesserte Auflage. [XVI u. 508 S.] gr. 8. 1882. geh. n. M. 11.20, in Leinwand geb. n. M. 12.20.

Schlink, Dr. W., Dipl.-Ing., Professor an der Technischen Hochschule zu Braunschweig, Statik der Raumfachwerke. Mit 214 Abbildungen und 2 Tafeln. [XIV u. 390 S.] gr. 8. 1907. In Leinwand geb. n. M 9.—

